1ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Introdução, boa posição, tipo de não linearidade.

1. Seja $f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$. Use separação de variáveis para resolver os seguintes problemas de Cauchy para o Laplaciano, a Equação da Onda e a Equação do Calor:

$$\begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Comente a convergência dos dados e das suas derivadas, com respeito à convergência da solução, quando $n \to \infty$, (no caso da equação do calor considere separadamente o caso $y \geq 0$ e $y \leq 0$).

2. Classifique as equações a seguir, quanto a ordem, tipo de não linearidade, dependência dos coeficientes:
a) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$ b) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = u^2 + sinx$ c) $u_{xx}u_{yy} = 1$
d) $u_t = (x - y^2)u_{xx} + e^{-t}$ e) $u_{tt} = uu_{xxxxx} + u_{yy} + e^{-t}$ f) $u_{xx}u_y = 1$ g) $u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u^2 = u_y$
h) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xz} + u_x - 2u_y = u + e^y$ i) $u_{xx}u_{yy} + \arctan(u_{yy}) = 0$ j) $u_{xx}^2 u_x - u_{yy}u^2 = u_y$

3. Use separação de variáveis para achar uma solução da equação $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ que não seja da forma $Ax + By$. (sugestão: busque solução na forma $u(x,y) = X(x) + Y(y)$.)
(sol $(x\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{y})$

4. Encontre uma solução em $\mathbb{R}^2$ da equação $u_{xy} = f(x,y)$, usando duas integrações.

5. Encontre todas as soluções em $\mathbb{R}^3$ da equação $u_{xyz} = 0$, usando três integrações.

6. Exercícios do livro:
pag 5: ex 2,3,4,11,12.
pag 27: ex 1,2,3.