1 Problemas de primeira ordem

1.1 linear - semilinear

A forma mais geral para uma EDP semilinear de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$ é

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i}u(x) = F(x,u); \tag{1.1}$$

pondo os coeficientes a_i num vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever (1.1) na forma

$$\mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x) = F(x,u) : \tag{1.2}$$

a equação prescreve a derivada direcional ($\mathbf{a} \cdot \nabla u = D_a u$).

Definindo $L_x u = \mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x)$ temos $\chi_{L,x}(\xi) = \mathbf{a}(x) \cdot \xi$:
a condição de não-caracteristicidade torna-se $\nu \cdot \mathbf{a} \neq 0$:
o vetor **a** não pode ser tangente à superfície dos dados.

Problema de Cauchy.

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x) = F(x,u). \\ u(x) = \varphi(x) \qquad\qquad \text{em } S \end{cases} \tag{1.3}$$

Seja S dada parametricamente como $S = \{x = g(s) : s \in \omega\}$ onde $g : \omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Estratégia: construir curvas ao longo das quais a (1.1) torna-se uma EDO: calculamos as linhas integrais do campo vetorial $\mathbf{a}(x)$.

Para cada $s \in \omega$, resolvemos o sistema de EDOs em $\mathbb{R}^n$,

$$x_s'(t) = \mathbf{a}(x_s(t)), \qquad\qquad x_s(0) = g(s) \ : \tag{1.4}$$

a solução $x_s(t)$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ parametrizada em t dita projeção característica.

Agora se $u(x)$ é uma solução da EDP então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[u(x_s(t))] &= \nabla u(x_s(t)) \cdot x_s'(t) = \nabla u(x_s(t)) \cdot \mathbf{a}(x_s(t)) \\ &= F(x_s(t), u(x_s(t)) : \end{aligned} \tag{1.5}$$

Logo podemos adicionar a EDO

$$v_s'(t) = F(x_s(t), v_s(t)) \,, \qquad v_s(0) = \varphi(g(s)), \tag{1.6}$$

O método das características consiste em resolver o **Sistema característico**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_s(t) = \mathbf{a}(x_s(t)), & x_s(0) = g(s), \\ \frac{d}{dt} v_s(t) = F(x_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(s)), \end{cases} \tag{1.7}$$

obtendo a solução u ao longo das projeções características:

$$u(x_s(t)) = v_s(t) \,.$$

1.2 quaselinear

Consideremos agora o caso quaselinear

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\partial_{x_i}u(x) = b(x,u); \tag{1.8}$$

pondo de novo os coeficientes a_i num vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\mathbf{a}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x, u(x)). \tag{1.9}$$

A condição de não-caracteristicidade é ainda $\mathbf{a}(x,u)\cdot\nu \neq 0$: agora depende também dos dados de Cauchy.

Interpretação geométrica:

$$(\mathbf{a}(x,u), b(x,u)) \cdot (\nabla u(x), -1) = 0; \tag{1.10}$$

o vetor de $(\mathbf{a}(x,u), b(x,u)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente ao gráfico de u.

Logo para o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x,u)\cdot\nabla u(x) = b(x,u). \\ u(x) = \varphi(x) & \text{em } S = \{x = g(s)\} \end{cases} \tag{1.11}$$

as curvas integrais do campo vetorial em $\mathbb{R}^{n+1}$ $(\mathbf{a}(x,v), b(x,v))$ que passam pelos pontos $(x, \phi(x)) :\ x \in S$ estão no gráfico da solução.

Resolvemos então o **Sistema característico** associado:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s(t) = \mathbf{a}(x_s(t), v_s(t)), & x_s(0) = g(s), \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = b(x_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(s)), \end{cases} \tag{1.12}$$

obtendo $u(x_s(t)) = v_s(t)$.

Definição 1.1.
– As linhas integrais do campo $(\mathbf{a}, b)$ são ditas **curvas características** da equação (1.9).
– Suas projeções em $\mathbb{R}^n$, isto é, as curvas $x_s(t)$, são ditas **projeções características** (dependem da solução!)

1.3 Resumo método das características

- resolvemos o sistema característico
- se u é solução da equação $\mathbf{a}(x,u)\cdot\nabla u(x) = b(x,u)$ então $u(x_s(t)) = b(x_s(t), u(x_s(t))$ logo $u(x_s(t)) = v_s(t)$
- se $x_s(t)$ define uma mudança de variáveis $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$, então de $v_s(t)$ obtemos $u(x)$

Este método leva ao

Teorema 1.2. *Se no problema*

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x,u)\cdot\nabla u(x) = b(x,u). \\ u(x) = \varphi(x) & \text{em } S = \{x = g(s)\}, \end{cases} \tag{1.13}$$

S é uma superfície de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathbf{a}, b, \varphi$ são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$ e a condição de não-característicidade está satisfeita, então existe uma vizinhança $N(S)$ tal que existe uma única solução $u \in \mathcal{C}^1(N(S))$ do problema, que depende com continuidade dos dados.

Além disso, tal solução pode ser calculada resolvendo o sistema característico na forma (1.12) e obtendo u em função de x eliminando os parâmetros.

O ponto fundamental da prova é mostrar que o sistema característico gera (localmente) a mudança de variáveis $\mathcal{C}^1$, o que é consequência da cond. de não-caracteristicidade e da dep. contínua dos dados para EDOs.

Exemplos:

$$\begin{cases} u_x + u_y = u. \\ u(x,0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x + u_y = u. \\ u(x,-x) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x + u_y = u. \\ u(x,x) = 1 \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} -y\,u_x + x\,u_y = u^2. \\ u(x,0) = 1/x, \qquad , x > 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} u\,u_x + u_y = 1. \\ u(x,x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u\,u_x + u_y = 1. \\ u(x,x) = 1 \end{cases} \tag{1.16}$$

1.4 Eq. de transporte

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) : \end{cases} \tag{1.17}$$

a solução é $u(x,t) = f(x - ct) \qquad (f \in \mathcal{C}^1?)$

f está sendo transportado com velocidade uniforme c (p.ex. temperatura num rio).

$$\begin{cases} u_t + c(x,t)u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x); \end{cases} \tag{1.18}$$

agora f é transportado com velocidade variável (ao longo das características).

$$\begin{cases} u_t + (c(x,t)u)_x = 0 \\ u(x,0) = f(x); \end{cases} \tag{1.19}$$

posso reescrever como $\boxed{u_t + c(x,t)u_x = -c_x(x,t)u\text{:}}$ u não é mais constante,

é diluído ou concentrado durante o transporte conforme se afastam/juntam as características.

No caso com mais variáveis (t tempo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) as eq. acima tornam-se
$u_t + \mathbf{c} \cdot \nabla_x u = 0$
$u_t + \mathbf{c}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_x u = 0$
$u_t + div_x(\mathbf{c}(\mathbf{x},t)u) = u_t + \mathbf{c}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla_x u + div_x \mathbf{c}(\mathbf{x},t)u = 0$
onde $\mathbf{c}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$.

Consideremos agora o problema quaselinear:

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x); \end{cases} \tag{1.20}$$

resolvendo via características obtemos

$$\begin{cases} t_s(\tau) & = \tau, \\ x_s(\tau) & = s + c(f(s))\tau, \\ v_s(\tau) & = f(s); \end{cases}$$

agora f é transportado com velocidade variável, que depende do dado.

Em geral não vai existir solução para todo t: cruzamento de características!

No caso $c(u) = u$ obtemos a chamada **equação de Burger**

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{1.21}$$

Em geral, a solução de classe $\mathcal{C}^1$ apenas existe até um certo instante t_{max}.

2 Equações de conservação

Uma equação de conservação em uma dimensão espacial é uma equação na forma (dita forma de divergência)

$$u_t + (F(u))_x = 0. \tag{2.1}$$

Se F é regular a equação pode ser escrita na forma $u_t + F'(u)u_x = 0$, isto é, na mesma forma da equação do problema (1.20). Ela modela fenômenos de conservação:

No caso com mais variáveis (t tempo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) a eq. acima torna-se

$$u_t + div_x(F(u)) = u_t + F'(u) \cdot \nabla_x u$$

onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

2.1 Soluções integrais

Queremos procurar uma noção mais geral de solução, que possa apresentar irregularidades.

A técnica para fazer isso é a seguinte:
— assumimos u regular para fazer sentido a EDP,
— reformulamos o problema de uma forma onde não apareçam mais as derivadas e que seja equivalente à EDP original no caso de soluções regulares,
— assumimos esta nova formulação para definir **soluções em sentido generalizado**.

Se u é de classe $\mathcal{C}^1$ e é solução de (2.1), fixados $t > 0$ e $a < b$ integramos em $[a, b]$ a equação obtendo a

formulação integral da EDP $\quad u_t + (F(u))_x = 0$:

$$\int_a^b [u_t + F(u)_x] dx = \\ \frac{d}{dt}\left(\int_a^b u(\xi, t)\, d\xi\right) + F(u(b, t)) - F(u(a, t)) = 0\,, \tag{2.2}$$
para todos $t > 0$ e $a < b$.

- As duas formulações são equivalentes para funções de classe $\mathcal{C}^1$.
- (2.2) faz sentido para u apenas integrável.
- A formulação (2.2) mostra melhor o significado físico da EDP (2.1): se u representa a densidade (linear) de alguma substância, então $\int_a^b u(\xi, t)\, d\xi$ é a quantidade total que está no segmento $[a, b]$: então pode variar apenas se substância sai ou entra em A ou em B: F representa então o fluxo da substância na direção positiva do eixo x. A equação representa a **lei de conservação** desta substância.

  Se a substância se movimenta com velocidade v então $F = vu$:

  - se v só depende de x, t temos a (1.19): $u_t + (v(x, t)u)_x = 0$
  - se v depende de u temos a (2.1) com $F(u) = v(u)\, u$.

- se $v(u) = u/2$ temos a equação de Burger: $u_t + uu_x = 0$: corresponde a $F(u) = u^2/2$

2.2 Choque

Pode existir uma solução integral de $u_t + (F(u))_x = 0$ descontínua? Come deve ser?

Considero o **Problema de Riemann**, onde a condição inicial é descontínua:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_l & se \quad x < 0 \\ u_r & se \quad x > 0\,. \end{cases} \end{cases} \tag{2.3}$$

Busquemos uma solução integral descontinua onde as constantes u_l, u_r são separadas por uma curva $x = \xi(t)$:
se $a < \xi(t) < b$ temos

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b u dx\right) + F(u(b,t)) - F(u(a,t)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[u_l(\xi(t) - a) + u_r(b - \xi(t))\right] + F(u_r) - F(u_l),$$

logo

$$\xi'(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}\,.$$

Esta é chamada **condição de salto de Rankine-Hugoniot**: qualquer solução integral que possua uma descontinuidade deve satisfazê-la.

Observação 2.1. Observe que no caso linear $F(u) = cu$ ou $F(x,t,u) = c(x,t)u$ a condição de Rankine-Hugoniot torna-se

$$\xi'(t) = \frac{c(\xi(t),t)(u_l - u_r)}{(u_l - u_r)} = c(\xi(t),t)$$

isto é, as descontinuidades viajam exatamente ao longo das projeções características.

O mesmo acontece no caso quaselinear se considerarmos singularidades mais fracas, isto é, soluções integrais que sejam contínuas mas possuam descontinuidades nas derivadas primeiras.

◁