$\boxed{\text{Notação de multi-índice}}$

Um **multi-índice** será um elemento do *conjunto de multi-índices*:

$$MI_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \quad \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

notação $e_i = (0, .., 1, ..0)$ com 1 na i-ésima posição.

Definimos:

- *Módulo* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $\qquad |\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
- *Fatorial* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $\qquad \alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$.
- *Potência* de um vetor elevado a um multi-índice: dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in MI_n$, $\qquad x^\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.
- *Operador de derivação* com multi-índice: dada $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (suficientemente regular para não importar a ordem de derivação): $\qquad \partial^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$, $\qquad$ onde $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Também usaremos a notação u_x, u_{xy}, $u_{x_i x_j}$, ... para as derivadas parciais de u com respeito às variáveis indicadas, ∇u para o vetor gradiente e ∂_{x_i} ou ∂_i para os operadores de derivação.

Algumas fórmulas em notação de multi-índice:

Polinômio de Leibnitz:

$$\text{para } x \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}, \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in MI_n \\ |\alpha| = k}} \frac{|\alpha|\,!}{\alpha\,!} x^\alpha . \tag{0.1}$$

Série de Taylor de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em vizinhança de x_0:

$$S_{x_0}(x) = \sum_{\alpha \in MI_n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha\,!} (x - x_0)^\alpha .$$

Definição 0.1. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, uma **equação diferencial parcial de ordem k** é uma equação da forma

$$F\left(x, (\partial^\alpha u)_{\alpha \in A_n(k)}\right) = 0, \tag{0.2}$$

onde $F : D_F \to \mathbb{R}$ sendo D_F um aberto em $\Omega \times \mathbb{R}^{N_n(k)}$.

Definição 0.2. Uma função $u : \Omega' \to \mathbb{R}$ (sendo $\Omega' \subseteq \Omega$) é uma **solução clássica** de (0.2), quando

- as $\partial^\alpha u$ existem para todo $\alpha \in A_n(k)$; (às vezes pediremos também $u \in \mathcal{C}^k(\Omega')$),
- a equação (0.2) está bem definida e satisfeita em Ω', isto é,

$$F\left(x, (\partial^\alpha u(x))_{\alpha \in A_n(k)}\right) = 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega'.$$

Tipo de não linearidade

- **linear**, se é da forma
$$\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x),$$
onde a_α e f podem depender de $x \in \Omega$ apenas;

- **linear a coeficientes constantes**, se é linear e os a_α não dependem de x;

- **semilinear**, se é da forma
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u + G\left(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| < k}\right) = 0 :$$
isto é, é linear pelo menos nos termos de grau máximo;

- **quaselinear**, se é da forma
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) \partial^\alpha u + H\left(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| < k}\right) = 0 :$$
isto é, os coeficientes a_α com $|\alpha| = k$ dependem de $x \in \Omega$ e de $(\partial^\beta u)_{|\beta|<k}$, mas não de $(\partial^\beta u)_{|\beta|=k}$;

- **totalmente não-linear**, quando nenhum dos casos anteriores ocorre.

Exemplos importantes

- $u_t + xu_x = f(x,t)$ **transporte linear**
- $u_t + u\,u_x = f(x,t)$ **transporte quaselinear**
- $\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0$ **equação de Laplace** (em $\mathbb{R}^3: \; u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$)
- $\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u = 0$ **equação da onda** (em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2: \; u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$)
- $\partial_t u - c^2 \Delta_x u = 0$ **equação do calor** (em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2: \; u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0$)
- $|\nabla u| = 1$: **equação da ótica geométrica**
- $(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0$: **eq. do potencial aerodinâmico compressível** (c é a velocidade do som)
- $u_t + x^2 u_{xx} + xu_x - u = 0$ **eq. de Black-Scholes**

Problema de Cauchy

Queremos estudar o tipo de condições necessárias para obtermos existência, unicidade e dependência contínua dos dados (definição de **problema bem posto segundo Hadamard**).

Definição 0.3. Dadas uma equação $F\left(x,(\partial^\alpha u)_{\alpha\in A_n(k)}\right)=0$, uma hipersuperfície S em $\mathbb{R}^n$ de codimensão 1 e k funções ϕ_0, $\phi_1,\ldots,\phi_{k-1}:S\to\mathbb{R}$, chamamos **problema de Cauchy** para a equação acima, o problema de encontrar uma solução definida numa vizinhança V_S de S e que satisfaça

$$\partial_\nu^i u=\phi_i,\quad \forall i=0,1,\ldots,k-1,\quad \text{em } S$$

onde ν é o vetor normal a S.
Chamaremos de **dados de Cauchy** as funções ϕ_i e de **superfície dos dados** a superfície S.

Formulação do Problema de Cauchy
Superfície S qualquer:

$$\begin{cases} F\left(x,(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right)=0 \\ \partial_\nu^i u=\varphi_i \qquad\qquad \textit{em } S \quad (i=0,1,\ldots,k-1), \end{cases} \tag{0.3}$$

Hiperplano $\left\{x=(\xi,t):\ \xi\in\mathbb{R}^{n-1},\ t=0\right\}$:

$$\begin{cases} F\left(\xi,t,(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right)=0 \\ \partial_t^i u(\xi,0)=\varphi_i(\xi) \qquad \textit{para } \xi\in\mathbb{R}^{n-1} \quad (i=0,1,\ldots,k-1). \end{cases} \tag{0.4}$$

Alguns exemplos

Seja $f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$. Considere os problemas

$$(L) \begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (O) \begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução

(L) $u(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sinh(ny)$

(O) $u(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} \sin(nx) \sin(ny)$

(C) $u(x,y) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx) e^{-n^2 y}$

Equação $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2}$

A solução geral é $u(x,y) = f(y)$.

1) Problema $\boxed{u(0,y) = \varphi(y)}$

2) Problema $\boxed{u(x,0) = \psi(x)}$

(polinômio característico $\chi_L(a,b) = a$)

Equação $\boxed{\partial^2_{xy} u = 0}$ com $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

A solução geral é $u(x,y) = f(x) + g(y)$

1) Problema $\boxed{u(0,y) = \varphi(y),\ u_x(0,y) = \psi(y)}$

2) Problema $\boxed{u(x,x) = \varphi(x),\ u_x(x,x) = \psi(x)}$

solução $u(x,y) = \Psi(x) - \Psi(y) + \varphi(y)$

(polinômio característico $\chi_L(a,b) = ab$)

Com os dados de Cauchy ficam fixadas em S todas as derivadas nas direções tangentes e normais, até a ordem k, exceto a ∂^k_ν

Definição 0.4. Diremos que o problema de Cauchy é **não-característico** num ponto $x_0 \in S$ quando a equação, em x_0, pode ser resolvida com respeito à derivada $\partial_\nu^k u$; será **característico** quando não é possível.

O problema é **não-característico** se for não-característico em todo ponto de S.

0.1 Não-caracteristicidade no caso linear e semilinear

Caso linear:

Definição 0.5. Seja

$$L_x u = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u \tag{0.5}$$

um operador linear e S uma hipersuperfície de vetor normal ν: definimos

- **polinômio característico** de L em x: $\chi_{L,x}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$;
- **vetor característico** de L em x: $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\chi_{L,x}(\xi) = 0$;

Importante:

$$\chi_{L,x}(e_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(e_j)^\alpha = a_{ke_j}(x) = 0 :$$

significa que $\partial_{x_j}^k$ não aparece na equação.

• O valor do polinômio característico aplicado à normal independe das variáveis usadas.

Assim, ν característico significará que o operador L na direção ν não é realmente de ordem k e sim de ordem menor do que k.

Definição 0.6 (**Não-caracteristicidade no caso linear e semilinear**).
• Problema **característico** no ponto $x_0 \in S$ se $\nu(x_0) \in char_{x_0}(L)$;
• Problema **não-característico** se $\nu(x_0) \notin char_{x_0}(L)$.

0.2 O caso quaselinear

Como todas as derivadas de ordem menor que k em S são dadas pelos dados de Cauchy, podemos definir um polinômio característico (que agora depende dos dados de Cauchy) e usar a mesma definição:

$$QL_x u = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) \partial^\alpha u + H\left(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}\right) = 0 :$$

0.3 Não-caracteristicidade para problemas não-lineares

No caso não-linear também dependerá dos dados de Cauchy.

Aplicaremos o teorema da função implícita para garantir que seja possível determinar implicitamente $\partial_\nu^k u$ em toda uma vizinhança do ponto $x_0 \in \widetilde{S}$:

Caso $\nu = e_n$:

Existe uma única função $d : V_{x_0} \to \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{n-1} \simeq \{t = 0\}$) tal que estejam satisfeitas as hipóteses do teorema da função implícita quando d está no lugar de $\partial_\nu^k u$ e as outras derivadas são calculadas do dado de Cauchy:

$$\begin{cases} F\left(\xi, 0, (\partial^\beta \varphi_i(\xi))_{\substack{|(\beta,i)|\leq k,\\ i\neq k}}, d(\xi)\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d}\left(\xi, 0, (\partial^\beta \varphi_i(\xi))_{\substack{|(\beta,i)|\leq k,\\ i\neq k}}, d(\xi)\right) \neq 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{RESUMO}}$

Sempre podemos fazer uma mudança de variável, pelo menos localmente, que transforme o genérico problema

$$\begin{cases} F\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}\right) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i & \textit{em } S \quad (i = 0, 1, ..., k-1), \end{cases} \tag{0.6}$$

no problema na forma

$$\begin{cases} F\left(\xi, t, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}\right) = 0 \\ \partial_t^i u(\xi, 0) = \varphi_i(\xi) & \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (i = 0, 1, ..., k-1). \end{cases} \tag{0.7}$$

Além disso, se o original era não característico, então o transformado pode ser resolvido com respeito à $\partial_t^k u$:

$$\begin{cases} \partial_t^k u = \widetilde{F}\left(\xi, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \alpha\neq k e_n}}\right) \\ \partial_t^i u(\xi, 0) = \varphi_i(\xi) & \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (i = 0, 1, ..., k-1). \end{cases} \tag{0.8}$$

1 Sistema equivalente

Teorema 1.1. *Dado o problema de Cauchy não-característico (de ordem k, em n variáveis, resolvido com respeito a $\partial_t^k u$)*

$$\begin{cases} \partial_t^k u = F\left(\xi, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha|\le k \\ \alpha \neq k e_n}}\right) \\ \partial_t^j u(\xi, 0) = \varphi_j(\xi) \qquad\qquad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \qquad (j = 0, 1, ..., k-1) \end{cases} \tag{1.1}$$

com $F \in \mathcal{C}^1$, $\varphi_j \in \mathcal{C}^{k+1-j}$, existe um problema de Cauchy para um sistema de primeira ordem na forma

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(\xi, t, Y)\partial_{\xi_i} Y + B(x, t, Y) \\ Y(\xi, 0) = \Phi(\xi) \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

tal que existe uma relação bijetora entre as soluções $\mathcal{C}^{k+1}$ de (1.1) e as soluções $\mathcal{C}^1$ de (1.2).

1.1 Outras formas para o sistema

Com dados de Cauchy homogêneos e coeficientes independentes de t:

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(\xi, Y)\partial_{\xi_i} Y + B(\xi, Y) \\ Y(\xi, 0) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

Autônomo (coeficientes independentes das variáveis) e sem termo B

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(Y)\partial_{\xi_i} Y \\ Y(\xi, 0) = \Psi(\xi) \qquad\qquad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Equações:

(a) $N_n(k-1)$ equações

$$\partial_t y_\alpha = y_{\alpha+e_n} \qquad \text{para todo } \alpha \in MI_n \text{ com } |\alpha| < k; \tag{1.5}$$

(b) $N_n(k) - N_n(k-1) - 1$ equações

$$\partial_t y_\alpha = \partial_{\xi_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}} \qquad \text{para todo } \alpha \in MI_n \text{ com } |\alpha| = k \text{ e } \alpha \neq ke_n; \tag{1.6}$$

(c) (denotamos a seguir por $\widehat{Y}$ o vetor $(y_\alpha)_{\substack{|\alpha|\le k \\ \alpha\neq ke_n}}$)

$$\partial_t y_{ke_n} = \frac{\partial F}{\partial t}(\xi,t,\widehat{Y}) + \sum_{|\alpha|<k} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(\xi,t,\widehat{Y}) y_{\alpha+e_n} + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha\neq ke_n}} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(\xi,t,\widehat{Y}) \partial_{\xi_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}}. \tag{1.7}$$

Dados:

$$y_\alpha(\xi,0) = y_{(\beta,j)}(\xi,0) = \begin{cases} \partial^\beta \phi_j(\xi) & \text{se } \alpha \neq ke_n \\ F(\xi,0,(\partial^\beta \varphi_j(\xi))_{\substack{|(\beta,j)|\le k \\ j\neq k}}) & \text{se } \alpha = ke_n = (0,k)\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

2 Teorema de Cauchy-Kowalevski

Teorema 2.1. *(Cauchy-Kowalevski) Se no Problema (0.6)*

$$\begin{cases} F\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i \qquad\qquad \text{em } S \quad (i = 0, 1, ..., k-1), \end{cases} \tag{0.6}$$

os dados φ_j e a superfície S são analíticos em vizinhança de $x_0 \in S$, a função F é analítica em vizinhança destes dados e a condição de não-característicidade está satisfeita em $x_0 \in S$, então existe uma vizinhança de x_0 na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.

Teorema 2.2. *(Cauchy-Kowalevski em versão sistema) Se no Problema (1.3)*

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(\xi, Y)\partial_{\xi_i} Y + B(\xi, Y) \\ Y(\xi, 0) = 0 \qquad\qquad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{1.3}$$

as funções A_i, B são analíticas em vizinhança da origem $(\xi, Y) = (0, 0)$, então existe uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$ na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.

Idéia da Prova:

• escreve série de potências para os A_i, B, sejam $\mathbf{d}$ os coeficientes.

• mostra que se existir uma solução analítica então os coeficientes $\mathbf{c}$ de sua série podem ser obtidos dos coeficientes $\mathbf{d}$ através de uma lei polinomial a coef. não negativos. $\mathbf{c} = P(\mathbf{d})$

• acha uma majoração para os $\mathbf{d}$

• resolve exatamente um sistema análogo ao original mas com novos $\widetilde{\mathbf{d}}$ todos iguais e majorantes.

• então os $\widetilde{\mathbf{c}}$ da sol obtida maioram os $\mathbf{c}$... logo a série da solução converge: **a solução existe (e é unica pois os c são univocamente determinados).**

Teorema 2.3 (Teorema de Holmgren)**.** *Se no Problema (0.6)*

$$\begin{cases} F\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}\right) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i & \textit{em } S \quad (i = 0, 1, ..., k-1), \end{cases} \tag{0.6}$$

a equação é linear a coeficientes analíticos, S é analítica e não-característica e os dados φ_j são funções quaisquer, então, dado um compacto de S, existe uma vizinhança dele na qual existe no máximo uma solução.