7^{a} Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.12, dia 27-4-2011

1. Exercícios do Hildebrando: pag 176 n 8,9 (da Lista 4) e n1 (da Lista 5), pag 177 n2 .

2. Seja $X(t),\ t \in I$ uma matriz $n \times n$ não singular em todo I e de classe $\mathcal{C}^1$. Mostre que existe uma única matriz $A(t),\ t \in I$ contínua tal que X seja a matriz fundamental de $y' = A(t)y$.

3. Esboce o diagrama de fase de $y' = A(t)y$ para as seguintes matrizes A (classifique os casos bidimensionais)
a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;
d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Encontre a solução geral para $y' = A(t)y$ para as seguintes matrizes A:
a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Mostre que, se λ não é autovalor de A, então existe uma solução da forma $\mathbf{w}e^{\lambda t}$ do problema $y' = Ay + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, onde A é matriz $n \times n$ e $\mathbf{b}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. O que acontece se λ é autovalor de A?

6. Mostre que se $A(t),\ t \in I$ é contínua, e para todo $t \in I$ as matrizes $A(t)$ e $\left[\int_{t_0}^t A(s)ds\right]$ comutam, então a matriz $e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$ é matriz principal (com respeito a t_0) do sistema $y' = A(t)y$.

7. Calcule e^A sendo $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ matriz $2n \times 2n$. [Sugestão: use series]

8. Calcule a solução geral de
$$\begin{cases} x' = 4x + 9y + 3e^t \\ y' = -x - 2y - e^t \end{cases}$$
[Sugestão: em vez de usar a variações das constantes pode chutar a forma da solução particular e calcular os parâmetros envolvidos.]

9. Descreva os possíveis retratos de fase de sistemas homogêneos lineares a coeficientes constantes em $\mathbb{R}^3$.

10. • Mostre que a solução geral da "equação do oscilador harmônico"
$$y'' + \omega_0^2 y = 0\,,$$
com $\omega_0 > 0$, pode ser escrita na forma
$$A\sin(\omega_0 t + \gamma)\ :\quad A, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

- Mostre que a solução geral da "equação das vibrações forçadas"

$$y'' + \omega_0^2 y = c \sin(\omega t)$$

com $\omega_0 \neq \omega$ positivos, é

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \gamma) + \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \ : \quad A, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Qual é a solução quando $\omega_0 = \omega$?

- Calcule a solução geral da "equação das vibrações forçadas e amortecidas "

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = c \sin(\omega t)$$

com ω_0, ω, α positivos.

[Sugestão: chute a forma das soluções usando senos, cossenos e eventualmente um termo polinomial, e calcule os parâmetros envolvidos.]

11. Seja $X(T)$ uma matriz fundamental de $y' = A(t)y$. Suponha que $|X(t)| \leq K$ em $[0, \infty)$ e que $\liminf_{t\to\infty} \int_0^t Tr(A)(s)ds > -\infty$.
Mostre que $X^{-1}(t)$ é limitada em $[0, \infty)$ e nenhuma solução não trivial tende a zero em $+\infty$.

12. Sejam $\phi_1 = t$, $\phi_2 = t + e^t$ e $\phi_3 = 1 + t + e^t$ soluções de $y'' + ay' + b = f(t)$. Calcule a solução geral da equação. Pode também achar a, b e $f(t)$?

ENTREGAR, até segunda dia 9 de maio, dois retratos do exercício 3 mais o exercício 11