3ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.6, dia 30-3-2011

1. Encontre um exemplo de uma equação $y' = f(t, y)$ que tenha uma solução maximal $y : (a, b) \in \mathbb{R}$ limitada mas não existe $\lim_{t\to b} y(t)$.

2. Considere o problema de Cauchy $y' = y + \lambda + g(y),\ y(0) = y_0$, onde g é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $g(y)/y \to 0$ quando $y \to 0$.
   Seja $\phi(t, y_0, \lambda)$ a solução do problema:
   - calcule $\frac{\partial\phi}{\partial y_0}(t, 0, 0)$ e $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t, 0, 0)$;
   - verifique a conta calculando explicitamente $\phi(t, y_0, \lambda)$ no caso $g \equiv 0$.

3. Considere o problema de Cauchy para a equação de segunda ordem
$$y'' = f(t, y, y', \lambda),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1\,.$$
   Seja $\phi(t, t_0, y_0, y_1, \lambda)$ a solução do problema: deduza as equações e dados iniciais às quais satisfazem as derivadas da solução $\phi(t, t_0, y_0, y_1, \lambda)$.

4. Mostre que as seguintes funções são fluxos sobre o espaço Y citado e calcule o gerador infinitesimal:
   - $Y = \mathbb{R}^2$, $\phi(t, x, y) = (e^t x, e^t y)$;
   - $Y = \mathbb{R}^2$, $\phi(t, x, y) = (x\cos(t) + y\sin(t), y\cos(t) - x\sin(t))$;
   - $Y = \mathbb{R}^2$, $\phi(t, x, y) = (xe^{-t}, (tx + y)e^{-t})$;
   - $Y = \mathbb{R}$, $\phi(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{y-1}{y}e^t} & se\ y > 1,\ t < ln(y/(y-1))\,, \\ \frac{1}{1-\frac{y-1}{y}e^t} & se\ y > 0,\ t < ln(y/(y-1))\,, \\ \frac{1}{1-\frac{y-1}{y}e^t} & se\ y \in (0, 1),\ t \in \mathbb{R}\,, \\ y & se\ y = 0\ ou\ 1,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

5. Calcule o fluxo gerado pelo campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ $f(x) = |x|x$.

ENTREGAR, até segunda dia 11, ex 3.