2^{a} Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.4, dia 23-3-2011

1. Considere a equação $y' = f(t,y)$ com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   a) É possível que existam duas soluções que tenham o ponto $p \in \mathbb{R}^n$ na imagem mas pelas quais o vetor tangente à imagem em p é diferente?
   b) Responda de novo no caso que f independa de t (equação autônoma).

2. Considere os problemas de Cauchy $y_n' = f_n(t, y_n),\ y_n(t_n) = p_n$,
   onde $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a,\ |y - p| \leq b\}$ são funções continuas que convergem uniformemente em Ω a uma função f, $t_n \to t_0$, $p_n \to p$.
   Prove que se y_n são soluções definidas em $[t_0 - a, t_0 + a]$, existe uma subsequência que converge uniformemente a uma solução do problema $y' = f(t,y),\ y(t_0) = p$.

3. Considere os problemas de Cauchy $y' = f(t,y),\ y(t_0) = p_0$ e $z' = g(t,z),\ z(t_0) = p_0$ onde $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ são contínuas e localmente Lipschitz e $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é um domínio retangular.
   - Mostre que se vale $f < g$ em Ω então vale $y < z$ para $t \in (t_0, \omega)$, sendo y e z soluções (únicas) dos dois problemas definidas em (t_0, ω).
   - Mostre que se vale $f \leq g$ em Ω então vale $y \leq z$ para $t \in [t_0, \omega)$.
   - Use o feito acima para mostrar que o problema de Cauchy $y' = y^2 + t^2 + sin(ty^3 - y),\ y(1) = 1$ não possui solução definida em $[1, \infty)$.
   - Use o feito acima para mostrar que o problema de Cauchy $y' = -Cosh(t^2 - ty^2)y^2,\ y(1) = 1$ possui solução não trivial definida em $[1, \infty)$ e cujo limite no infinito é 0.

4. a) Considere a equação $y' = f(t,y)$ com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que $y_1, y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ são soluções cujos gráficos interceptam-se em $(0,p)$ e em $(1,q)$ e delimitam uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$ homeomorfa a um círculo. Mostre que para todo $(t_0, y_0) \in D$ passa uma solução que também contém $(0,p)$ e $(1,q)$.
   b) Encontre um exemplo deste fenômeno.

5. Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to R$ de classe $\mathcal{C}^2$, considere o sistema
   $$y' = -\nabla F(y),\ y(0) = y_0$$
   e denote por $\phi_{y_0}(t)$ a (única) solução maximal, definida em $(\alpha_{y_0}, \omega_{y_0})$.
   - Mostre que $F(\phi_{y_0}(t))$ é não crescente.
   - Mostre que se $\omega_{y_0} = \infty$ e existe $\lim_{t\to\infty} \phi_{y_0}(t) = p \in \mathbb{R}^n$, então p é ponto crítico de F.
   - Mostre que se F é coerciva (isto é, $\lim_{|y|\to\infty} F(y) = +\infty$), então $\omega_{y_0} = \infty$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\phi_{y_0}(t)$ é limitada para $t \geq 0$.

6. Considere a equação (já resolvida explicitamente na lista 1)
   $$y' = 2t\sqrt{1 - y^2}\,.$$
   Discuta os seguintes pontos:
   - domínio Ω de definição da equação.
   - existência e unicidade da solução de um problema de Cauchy $y(t_0) = y_0$ em função de t_0 e y_0 (onde pode esperar que a solução não seja única?);
   - encontre as soluções constantes;

- encontre as regiões de Ω onde as soluções são crescentes ou decrescentes ou possuem derivada nula;
- esboce o andamento das soluções; esboce em particular uma solução maximal para os problemas $y(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y(0) = 1$ e $y(\sqrt{2\pi}) = 0$; quais destas soluções maximais são únicas?
- existem soluções com intervalo maximal $\mathbb{R}$? Existem soluções com intervalo maximal que não seja $\mathbb{R}$? (Justifique).
[Sugestão: compare com a resolução feita na lista 1 para verificar os resultados e para determinar o comportamento perto de onde não está da a unicidade.]

7. Considere a equação
$$y' = \frac{y}{1+y} \,.$$
Discuta os seguintes pontos:
- domínio Ω de definição da equação;
- existência e unicidade da solução de um problema de Cauchy $y(t_0) = y_0$ em função de t_0 e y_0;
- encontre as soluções constantes;
- encontre as regiões de Ω onde as soluções são crescentes ou decrescentes ou possuem derivada nula;
- encontre as regiões de Ω onde as soluções têm concavidade para cima ou para baixo (derive a equação para obter y'' em função de (t, y));
- justifique a seguinte afirmação: toda solução maximal que passa por (t_0, y_0) com $y_0 > 0$ é definida em todo $\mathbb{R}$ e tem limites 0 a $-\infty$ e $+\infty$ a $+\infty$; toda solução maximal que passa por (t_0, y_0) com $y_0 < 0$, $y(0) \neq -1$ está definida em uma semireta da forma $(-\infty, c)$ e tem limite a $-\infty$ igual a 0 se $y_0 \in (-1, 0)$ e $-\infty$ se $y_0 < -1$;
- esboce o andamento das soluções; esboce em particular uma solução maximal para os problemas $y(0) = 1$; $y(0) = -1/2$ e $y(0) = -2$.

8. Considere a equação
$$y'' = \frac{1}{1+y'} \,.$$
- Escreva um sistema equivalente.
- Discuta existência e unicidade da solução de um problema de Cauchy $y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1$ em função de t_0 e y_0, y_1.
- Encontre explicitamente todas as soluções [como a equação não depende de y pode por $z = y'$, calcular z e em seguida integrar].
- Esboce as soluções da equação no plano t, y e as imagens das soluções do sistema no em $\mathbb{R}^2$.

ENTREGAR, até segunda dia 4, ex 3 e ex 7.