

Derivada de função inversa

1. Seja $f(x) = x + e^x$ e seja g a função inversa de f . Mostre que $g'(x) = \frac{1}{1+e^{g(x)}}$. Calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.
2. Seja f uma função de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dada pela lei $f(x) = x + \sin(x)$.

Verifique que (definindo de maneira oportuna o contradomínio) f é invertível, e calcule a derivada de f^{-1} nos pontos 0 , $\frac{\pi+2}{2}$ e $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$.

Derivadas de ordem superior

3. Calcule a derivada segunda

$$(a) y = e^{-x} - e^{-2x} \quad (b) y = e^{-x} \cos 2x \quad (c) y = \frac{\sin(3x)}{e^x} \quad (d) f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1} \quad (e) y = xe^{\frac{1}{x}}$$

4. Determine f' , f'' e f''' para (a) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = 4x^4 + 2x$

5. Calcule e esboce os gráficos de f , f' e de f'' , onde $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 1 \\ 5x - 1, & x > 1 \end{cases}$

6. Determine a derivada de ordem n de:

$$(a) f(x) = \cos x \quad (b) f(x) = e^{-x} \quad (c) f(x) = \ln(x)$$

7. Calcule a derivada segunda de (a) $x \operatorname{sen} x$ (b) $x \ln x$ (c) $x^{10} + \frac{1}{x^3}$ (d) $e^x \cos x$

8. Determine a derivada de

$$(a) y = x \operatorname{arctg} x \quad (b) g(x) = \arccos(x^3) \quad (c) y = \cos(\operatorname{arc sen} x) \quad (d) y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\cos(2x)}$$

Derivada de funções definidas por partes

9. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(a) Mostre que f é derivável em $p = 1$ e calcule $f'(1)$

(b) Esboce o gráfico de f .

10. Para que valores de x a função $f(x) = x|x|$ é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' .

11. Em cada item abaixo

- (i) Esboce o gráfico (excetuado ponto f)
- (ii) Determine se f é contínua em x_1 dado
- (iii) Determine se f é derivável em x_1 dado

$$(a) g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}; \quad x_1 = 0 \quad (b) h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}; \quad x_1 = 0$$

$$(c) f(x) = |x-3|; \quad x_1 = 3 \quad (d) g(x) = \begin{cases} x+x^2 & \text{se } x > -1 \\ 0 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}; \quad x_1 = -1$$

$$(e) h(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x_1 = 0 \quad (f) f(x) = \sqrt[4]{x^2+2}; \quad x_1 = 0$$

12. Considere a função: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & \text{se } x \leq 1, \\ L+Mx & \text{se } x > 1. \end{cases}$

(a) Encontre todos os valores L e M tais que f seja contínua.

(b) Encontre todos os valores L e M tais que f seja derivável em todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Esboce o gráfico de f

GABARITO

Exercício 1 $g'(1) = 1/2$, $g''(1) = -1/8$

Exercício 2: $1/2$, 1 , $\frac{2}{\sqrt{2}+2}$

Exercício 10 $f'(x) = 2|x|$