Lista n.6 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determine a matriz $f(A)$, onde:

a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$;

b) $f(t) = t^2 - 6t + 13$.

Exercício 2 Encontre o polinômio característico $p(\lambda)$ das matrizes

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 3 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determine:

a) todos os autovalores de A e os correspondentes autovetores;

b) uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$ seja diagonal;

c) A^5 (sugestão: calcule A^5 na base de autovetores e em seguida mude de base).

Exercício 4 Ache todos os autovalores e um conjunto máximal S de autovetores linearmente independentes para as seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Quais das matrizes podem ser diagonalizadas? Ache a matriz invertível P que a diagonaliza.

Exercício 5 Seja $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Determine:

a) o polinômio carcterístico $p_B(\lambda)$ e os autovalores de B;

b) um conjunto máximal S de autovetores linearmente independentes de B;

c) B é diagonalizável? Em caso afirmativo, ache P tal que $P^{-1}BP$ seja diagonal;

d) determine a multiplicidade algébrica e geométrica do autovalor $\lambda_1 = -2$ para a matriz B.

Exercício 6 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule todos os autovalores e os correspondentes autovetores de A, supondo A uma matriz real. A é diagonalizável? Em caso afirmativo encontre P tal que $P^{-1}AP$;

b) Supondo A uma matriz sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$, A é uma matriz diagonalizável? Em caso afirmativo encontre P tal que $P^{-1}AP$.

Exercício 7 Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.

a) Mostre que 0 é autovalor de A se, e somente se, a transformação associada a A não é injetora;

b) Mostre que AB e BA têm os mesmos autovalores;

c) Seja A invertível e λ um autovalor de A. Mostre que λ^{-1} é um autovalor de A^{-1};

d) Mostre que A e sua transposta A^T têm o mesmo polinômio característico.

Exercício 8 *Mostre que:*

a) Se A é uma matriz tal que $A^2 = 0$, então o único autovalor de A é zero;

b) Se duas matrizes A e B têm o mesmo autovetor v, então v também é autovetor de $A+B$ e AB. Quais são, em ambos os casos, os correspondentes autovetores?

Exercício 9 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$, onde a é um parâmetro real.

a) Diga para que valores de a, a matriz admite o autovalor zero;

b) Para esse valor de a, determine os autovalores restantes e todos os autovetores.

Exercício 10 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule o polinômio característico de A assim como os seus autovalores;

b) Para que valores de m a matriz A é diagonalizável?;

c) Para os valores obtidos encontre uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tal que $A = PDP^{-1}$.

Exercício 11 Sejam P_2 o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2 e $\{1, x, 1+x^2\}$ uma base de P_2. Considere as transformacoes lineares $T, S : P_2 \to P_2$ definidas por $T[p(x)] = p^{'}(x)$ e $S[p(x)] = xp^{'}(x)$.

a) Quais as matrizes das transformações T e S respeito à base considerada?

b) As matrizes obtidas em a) sâo diagonalizáveis? Em caso afirmativo, indique a matriz diagonalizante e a matriz diagonal obtida.

Exercício 12 Seja A uma matriz de ordem n com autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n$ todos distintos, e autovetores $v_1,\ v_2, ..., v_n$.

a) Mostre que $A^n = PD^nP^{-1}$, onde D e a matriz diagonal com os autovalores na diagonal principal e P é a matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes;

b) Determine A^{20}, sendo i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercício 13 Seja V o espaço vetorial de todas as sequências reais convergentes $\{x_n\}$. Defina $T : V \to V$ como segue: se $x = \{x_n\}$ é uma sequencia convergente cujo limite é a, considere $T(x) = \{y_n\}$, onde $y_n = a - x_n$ para $n \geq 1$. Prove que T tem somente dois autovalores $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = -1$ e determine os autoespaços correspondentes.