Lista n.4 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 a) Seja A uma matriz $m \times n$ arbitrária sobre um corpo K. A matriz A determina uma aplicação $F : K^n \to K^m$ pela associação $v \longmapsto Av$. F é uma aplicação linear? Justifique.

b) Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação "projeção" sobre o plano xy dada por $G(x, y, z) = (x, y, 0)$. G é uma aplicação linear? Justifique.

c) Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação "translação" definida por $H(x, y) = (x + a, y + b)$. H é uma aplicação linear? Justifique.

d) A aplicação $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $P(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$ é linear? Justifique.

e) A aplicação $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $Q(x, y, z) = (x + 1, 2y, x + y)$ é linear? Justifique.

f) Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ com coeficientes no corpo K. Considere M uma matriz arbitrária de V e seja $T : V \to V$ definida por $T(A) = AM + MA$, onde $A \in V$. T é linear? Justifique.

Exercício 2 a) Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear para a qual $F(1, 2) = (2, 3)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$. Estabeleça uma fórmula para F e calcule nucleo e imagem;

b) Seja $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear para a qual $F(1) = (1, 1, 0, 1)$, $F(x) = (1, 1, 1, 1)$, $F(x^2+x^3) = (1, 0, 1, 0)$, $F(x^2-x^3) = (1, 0, 0, 0)$. Estabeleça uma fórmula para F e calcule nucleo e imagem;

c) Ache uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem é gerada pelos vetores $(1, 2, 0, 4)$ e $(2, 0, -1, -3)$; em seguida clcule seu nucleo.

Exercício 3 Seja V um espaço de dimensão 1. Mostre que qualquer transformação linear não nula $T : U \to V$ é sobrejetora.

Exercício 4 Seja $T \in \mathscr{L}(U)$. Mostre que $T^2 = 0$ se, e somente se, $T(U) \subseteq \mathscr{N}(T)$.

Exercício 5 Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Encontre o núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \,\mathrm{sen}(\theta), \mathrm{x\ sen}(\theta) + \mathrm{y} \cos(\theta)).$$

Exercício 6 Mostre que toda transformação linear bijetora $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva retas em retas, isto é, a imagem de uma reta por L é uma reta.

Exercício 7 *Sejam $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos. Mostre que o subespaço*

$$H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\}$$

tem dimensão $n - 1$.

Exercício 8 Sejam

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $P : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $P(X) = AX - XA$. Encontre o núcleo e a imagem de P.

Exercício 9 Verifique se $T(x,y,z) = (x-y, x-z, z-y)$ um automorfismo $\mathbb{R}^3$.

Exercício 10 a) Seja $Q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$Q(x,y,z,s,t) = (x + 2y + z - 3s + 4t, \quad 2x + 5y + 4z - 5s + 5t, \quad x + 4y + 5z - s - 2t).$$

Ache uma base e a dimensão da imagem de Q;

b) Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$g(x,y,z) = (x + 2y - z, y - z, x + y - 2z).$$

Determine uma base e a dimensão do núcleo de G;

c) Consideremos a aplicação matricial $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Ax$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma base e a dimensão da imagem e do nucleo de T;

d) Dada a aplição matricial $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Bx$, onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de S;

e) Sejam

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e $F : V \to V$ dada por $F(A) = AM - MA$. Encontre uma base e a dimensão do núcleo W de F.

Exercício 11 Suponhamos $F : V \to U$ e $G : U \to W$. Prove:

a) posto(G $\circ$ F) $\leq$ posto(G);

b) posto(G $\circ$ F) $\leq$ posto(F).

(O posto da aplicação é a dimensão da imagem).

Exercício 12 Suponhamos $f : V \to U$ linear com núcleo W e $f(v) = u$. Mostre que o conjunto

$$v + W = \{v + w : w \in W\}$$

é a pré-imagem de u, isto é, $f^{-1}(u) = v + W$.

Exercício 13 Determine se cada aplicação linear é ou não injetora. Se não for, encontre um vetor não-nulo v cuja imagem é 0.

a) $F(x,y) = (x - y, x - 2y)$;

b) $G(x,y) = (2x - 4y, 3x - 6y)$.

Exercício 14 Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(x,y,z) = (x+y-2z,\ x+2y+z,\ 2x+2y-3z)$.

a) Mostre que H é injetora;

b) Estabeleça uma formula para H^{-1}.

Exercício 15 Suponhamos $F : V \to U$ linear e V de fimensão finita. Mostre que V e a imagem de F têm a mesma dimensão se, e somente, F é injetora. Determine todas as aplicações lineares e injetoras $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

Gabarito

Exercício 2
(*a*) $F(x,y) = (y, 4y - 5x)$, $N(F) = \{0\}$, $I(F) = \mathbb{R}^2$.
(*a*) $F(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+b+c,\ a+b,\ b+(c+d)/2,\ a+b)$, $N(F) = \{a(1-x+2x^3) : a \in \mathbb{R}\}$, $I(F) =< (1,1,1,1), (1,0,1,0), (1,0,0,0) >$.
Exercício 8

a) $\mathcal{B}_{\mathcal{N}(T)} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$;

b) $\mathcal{B}_{Im(T)} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Exercício 10

a) $\mathcal{B}_{Im(Q)} = \{(1,2,1), (0,1,2)\}$ e dim[Im(Q)]=2;

b) $\mathcal{B}_{N(G)} = \{(3,-1,1)\}$ e dim[Im(G)]=1;

c) $\mathcal{B}_{Im(A)} = \{(1,1,3), (0,1,2)\}$ e dim[Im(A)]=2;
$\mathcal{B}_{N(A)} = \{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$ e dim[Im(A)]=2;

d) $\mathcal{B}_{Im(B)} = \{(1,3,-2), (0,1,-3)\}$ e dim[Im(B)]=2;
$\mathcal{B}_{N(B)} = \{(-1,-2,1)\}$ e dim[Im(B)]=1;

e) $\mathcal{B}_{\mathcal{N}(\mathcal{F})} = \{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$; e dim[Im(F)]=2;