Lista n.2 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Quais dos ternos seguintes $(A, +, .)$ são espaços lineares (A representa um conjunto, + e . representam as operações adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores). Se não forem espaços lineares indicar os axiomas violados.

a) O conjunto de ternos ordenados (x,y,z) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z})$ e $k.(x, y, z) = (kx, y, z)$.

b) O conjunto de ternos ordenados (x,y,z) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z})$ e $k.(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

c) O conjunto de ternos ordenados (x,y,z) de reais com as operações:
$(x, y, z) + (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z})$ e $k.(x, y, z) = (2kx, 2ky, 2kz)$.

d) O conjunto de pares ordenados (x, y) de reais, em que $x \geq 0$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

e) O conjunto de pares ordenados (x, y) de reais, com as operações:
$(x, y) + (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + \tilde{x} + 1, y + \tilde{y} + 1)$ e $k.(x, y, z) = (kx, ky)$.

f) O conjunto dos reais positivos com as operações: $x + \tilde{x} = x\tilde{x}$ e $kx = x^k$.

g) O conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

com a adição de matrizes e multiplicação usual por escalares.

i) O conjunto das funções reais, tais que $f(1) = 0$, com as operações usuais de adição e multiplicação definidas ponto a ponto.

j) O conjunto das funções reais, tais que f é periódica (isto é, $\exists\, \tau > 0 : f(t + \tau) = f(t)$) com as operações usuais de adição e multiplicação definidas ponto a ponto. (Atenção: pensem bem!!)

k) O conjunto das matrizes 2×2 da forma:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix},$$

com a adição de matrizes e multiplicação usual por escalares.

l) Um conjunto formado por uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem (operações de $\mathbb{R}^3$).

m) Um conjunto formado por um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem (operações de $\mathbb{R}^3$).

Exercício 2 Determine quais são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

a) Os vetores da forma (a,0,0);

b) Os vetores da forma (a,1,1);

c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$;

d) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y + 1\}$.

Exercício 3 Determine quais são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a) Matrizes da forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
em que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;

b) Matrizes da forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
em que $a + d = 0$;

c) As matrizes 2×2 em que $A = A^t$;

d) Matrizes da forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
em que $c = 0$ (matrizes triangulares superiores);

e) As matrizes 2×2 em que $\det(A) = 0$.

Exercício 4 Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de P_3.

a) Os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ de coeficientes reais em que $a_0 = 0$;

b) Os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ de coeficientes reais em que $a_0 + a_1 + a_2 = 0$;

c) Os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ de coeficientes reais em que $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$;

d) Os polinômios $a_0 + a_1t$ com coeficientes reais.

Exercício 5 Quais dos conjuntos seguintes são subespaços do espaço das funções reais com as operações usuais

a) As funções f tais que $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) As funções f tais que $f(0) = 0$;

c) As funções f tais que $f(0) = 2$;

d) As funções constantes;

e) As funções da forma $a + b\,\mathrm{sen(2x)} + \mathrm{k}\cos(2\mathrm{x})$, $\forall a, b, k \in \mathbb{R}$.

Exercício 6 Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de
$u = (1, -1, 3)$ e de $v = (2, 4, 0)$:

a) $w_1 = (3, 3, 3)$;

b) $w_2 = (2, 4, 6)$;

c) $w_3 = (1, 5, 6)$;

d) $w_4 = (0, 0, 0)$;

Exercício 7 Exprimir os vetores seguintes como combinação linear de $2 + t + 4t^2$, $1 - t + 3t^2$ e de $3 + 2t + 5t^2$.

a) $5 + 9t + 5t^2$;

b) $2 + 6t^2$;

c) 0;

d) $2 + 2t + 3t^2$.

Exercício 8 Exprimir as matrizes a), b), c) e d) como combinações lineares de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; e \; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 9 Em cada caso determinar se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$.

a) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 0)$, $v_3 = (3, 0, 0)$;

b) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 2)$, $v_3 = (8, -1, 8)$;

c) $v_1 = (3, 1, 4)$, $v_2 = (2, -3, 5)$, $v_3 = (5, -2, 9)$, $v_4 = (1, 4, -1)$;

d) $v_1 = (1, 3, 3)$, $v_2 = (1, 3, 4)$, $v_3 = (1, 4, 3)$, $v_4 = (6, 2, 1)$.

Exercício 10 Seja E o espaço gerado por:

$$f = \cos^2(t) \; e \; g = \text{ sen}^2(\text{t}).$$

Determine se os vetores abaixo pertencem a E:

a) $\cos(2t)$;

b) $3 + t^2$;

c) 1;

d) sen(t).

Exercício 11 Mostre que o espaço vetorial V dos polinômios sobre qualquer corpo K não pode ser gerado por um número finito de vetores.

Exercício 12 Sejam u, v e w vetores independentes. Mostre que u+v, u-v e u-2v+w são também independentes.

Exercício 13 Sejam v_1,...,v_n vetores independentes, e suponha que u é uma combinação linear dos v_i, digamos $u = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$, onde os a_i são escalares. Mostre que a representação de u acima é única.

Exercício 14 Suponha que $S = \{v_1, ..., v_n\}$ contém um subconjunto dependente, digamos $\{v_1, ..., v_r\}$. Mostre que S é também um conjunto dependente. Portanto, cada subconjunto de um conjunto independente é independente.

Exercício 15 Suponha que $\{v_1, ..., v_n\}$ é independente, mas $\{v_1, ..., v_n, w\}$ é dependente. Mostre que w é uma combinação linear dos vetores v_i.

Exercício 16 Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. Mostre que:

i) U e W estão contidos em U+W;

ii) U+W é o menor subespaço de V contendo U e W.

Exercício 17 Suponha que U e W são subespaços de um espaço vetorial V e que $\{u_i\}$ gera U e $\{w_j\}$ gera W. Mostre que $\{u_i, w_j\}$, isto é, $\{u_i\} \cup \{w_j\}$ gera U+W.

Exercício 18 Sejam U e W os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$U = \{(a, b, c) : a = b = c\} \ e \ W = \{(0, b, c)\}.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Exercício 19 Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{R}$. Sejam U e W os subespaços das matrizes simétricas e anti-simétricas (i.é, $A = -A^t$), respectivamente. Mostre que $V = U \oplus W$.

Exercício 20 Sejam U, V e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\},\ V = \{(a, b, c) : a = c\},\ W = \{(a, b, c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Mostre que:

i) $\mathbb{R}^3 = U + V$;

ii) $\mathbb{R}^3 = U + W$;

iii) $\mathbb{R}^3 = V + W$.

Quando a soma é direta?

Exercício 21 Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$ e $(3, 8, -3, -5)$.

a) Encontre uma base e a dimensão de W;

b) Estenda a base de W a uma base do espaço todo $\mathbb{R}^4$.

Exercício 22 Encontre a dimensão e uma base do espaço das soluções W do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & - & s & + & 3t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & s & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 6y & + & 8z & + & s & + & 5t & = & 0 \end{array} \right.$$