Lista n.1 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

determine os produtos AB e BA.

Exercício 2 Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

determine $(AB)^{-1}$ e $(AB)^2$.

Exercício 3 Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$ tal que $a_{ij} = 3i - j$, calcule $X = A^t + 2A$.

Exercício 4 Resolva a equação $(X + A)^t = C$ sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5 Sejam

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução da equação $X + 5A = A^2 + 2I$.

Exercício 6 Considere a matriz 3×3

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}.$$

Sabendo que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mostre que $M_{21} = -3M_{22} - 2M_{23}$.

Exercício 7 Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

Determine sua equação matricial.

Exercício 8 Se $A = \begin{bmatrix} 0 & \tan(\alpha) \\ \cot(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$, então resolva a equação $XA^2 = B$.

Exercício 9 Calcular $A+B$, AB, BA, $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det(A+B)$, sabendo que

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

É possivel concluir que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$?

Exercício 10 Resolver em $\mathbb{R}$, a equação

$$\begin{vmatrix} 2x & -2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Exercício 11 Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 5 \\ 0 & c & d \\ 6 & 8 & e \end{pmatrix}$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, mostrar que

a) se $c = d = 0$, então $\det(A)$=0;

b) se $a = 3$, $b = 4$ e $e = 10$, então $\det(A) = 0$;

c) se $a = b = c = d = 1$ e $e = 32$, então $\det(A) = 0$.

d) Se $a = 6$, $b = 4$ e $e = 5$, então para quais valores de c, d tem-se $\det(A) = 0$?

Exercício 12 Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ e $\det(M) = \alpha$.

Calcule o determinante da matriz

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 2b_1 & 2a_1 & 6c_1 & 2d_1 \\ b_2 & a_2 & 3c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & 3c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & 3c_4 & d_4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 13 Se $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ calcule $\det(2M^t)$.

Exercício 14 Sendo $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2m & 2n & 2p \\ 3a & 3b & 3c \\ x & y & z \end{pmatrix}$, $B = 2M$ e $det(M) = 5$, calcular $\det(A)$ e $\det(B)$.

Exercício 15 Se somarmos (2a) a todos os elementos da matriz

$$M = \begin{bmatrix} a & b_1 & c_1 & d1 \\ a & b_2 & c_2 & d2 \\ a & b_3 & c_3 & d3 \\ a & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é D, obtemos uma nova matriz cujo determinante é $\tilde{D}$. Cálcular $\tilde{D}$.

Exercício 16 Resolver a desigualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Exercício 17 Determinar para quais valores de k e a existe a inversa da matriz abaixo, e nesses casos calculá-la

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ a & k & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 18 Dada a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

e sendo $M^{-1} = (b_{ij})_{4\times 4}$ a sua inversa, calcular o elemento b_{23} de M^{-1}.

Exercício 19 Sendo A e B matrizes inversíveis de mesma ordem resolver a equação matricial

$$A.X.A^t = B.$$

Exercício 20 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e $\det(A) \neq 0$ calcular:

$$\det(A^{-1}.A^t.A).$$

Exercício 21 Resolver pela Regra de Cramer os sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 9 \\ x & - & 2y & + & z & = & 8 \\ 2x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & - & \frac{1}{z} & = & 4 \\ \frac{2}{x} & - & \frac{1}{y} & + & \frac{3}{x} & = & -3 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{2}{y} & + & \frac{4}{x} & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercício 22 Calcular (em função de k) o posto das matrizes

$$\begin{bmatrix} k+1 & 1-k & 1 & k \\ k-3 & k-1 & -1 & -1 \\ 2k+4 & 0 & 3 & 4-k \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ k+1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 23 Discutir e resolver, através de apropriados teoremas, os sistemas:

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 1 \\ 3x & + & 2y & = & 5 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & 6z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & 12z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$d)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & m \\ 2x & - & y & = & 1 \\ m^2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right. \quad e)\left\{\begin{array}{ccccccc} (1+2k)x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & (1+2k)z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercício 24 Discutir e resolver, através de apropriados teoremas, os sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 25 Discutir e resolver, através de apropriados teoremas, o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \\ k & 2 \\ k-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (k-1)(k-2)k \end{bmatrix}$$