4ª Lista de Exercícios - Modelos Lineares - 28/04/2014

Exercício 1. Prove que o coeficiente de explicação do modelo, R^2, em um modelo de regressão linear simples é o quadrado do coeficiente de correlação entre $\underset{\sim}{Y}$ e $\widehat{\underset{\sim}{Y}}$.

Exercício 2. No modelo de regressão linear simples com as suposições usuais, determine o estimador de máxima verossimilhança de β_0 e β_1 sob a hipótese $H_0 : \beta_0 = 2$.

Exercício 3. Num problema de estocar sorvetes a baixa temperatura, verifica-se que a perda de sorvete Y está relacionada com o tempo de estocagem através do modelo $Y = \beta t + \epsilon$. Foi conduzido um experimento em que registrou-se a perda de sorvete (Y, em cm^3) em função do tempo (t, em semanas), com os seguintes resultados

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	2,1	2,81	3,04	3,1	6,24	8,01	5,79	8,38

Admitindo que $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, 8$ e que são v. a.'s independentes,

(a) Estime β e σ^2.
(b) Determine um intervalo com 95% de confiança para β e σ^2.
(c) Calcule o coeficiente de explicação do modelo.
(d) Teste, ao nível de significância 0,05, as hipóteses $H_0 : \beta = 0$ contra $H_1 : \beta \neq 0$.
(e) Determine o poder do teste para $\beta/\sigma = 0,2$.

Exercício 4. Considere o modelo linear geral $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$ com $\underset{\sim}{\epsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$ e $\widehat{\underset{\sim}{\beta}}_0$ o estimador de máxima verossimilhança de $\underset{\sim}{\beta}$ sob a hipótese de que $C\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{m}$. Prove que $C\widehat{\underset{\sim}{\beta}}_0 = \underset{\sim}{m}$.

Exercício 5. Decidiu-se ajustar um modelo do tipo $Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$ sendo que os erros são variáveis aleatórias independentes com distribuição $N(0, \sigma^2)$ com base nos dados a seguir

x_1	1	1	1	2	2	2	0	0
x_2	1	-1	0	1	0	-1	0	1
Y	8,5	3	5,5	12,5	10	7	2	5

(a) Obtenha o modelo ajustado $\widehat{Y} = \widehat{\beta}_1 x_1 + \widehat{\beta}_2 x_2$.
(b) Prove que, nesse caso, os estimadores $\widehat{\beta}_1$ e $\widehat{\beta}_2$ são variáveis aleatórias independentes e determine suas distribuições marginais.
(c) Construa a tabela de análise de variância e teste ao nível de significância de 0,05 a hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$ contra $H_1 :$ pelo menos um β_i diferente de zero, $i = 1, 2$.
(d) Prove que o poder deste teste para hipótese alternativa $H_1 : \beta_1 = \beta_2 = 1$, admitindo que $\sigma^2 = 2$ é dado por $P(W \geq 5,14)$ em que $W \sim F_{2,6,5}$.

Exercício 6. Considere o modelo $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ com $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ variáveis aleatórias independentes e $\sigma_i^2 = \sigma^2 x_i^2$.

(a) Obtenha o estimador não viesado de variância uniformemente mínima de β.
(b) Determine a variância desse estimador.
(c) Obtenha um intervalo com coeficiente de confiança $1 - \alpha$ para β.

Exercício 7. Deseja-se comparar dois métodos de ensino A e B e com esse objetivo, aplicou-se uma prova a n_1 alunos sujeitos ao método de ensino A e n_2 alunos sujeitos ao método de ensino

B. Admitindo o modelo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 W_i + \epsilon_i, \ \ i = 1, \ldots, n$$

com ϵ_i e ϵ_j variáveis aleatórias independentes para $i \neq j$, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ e

$$W_i = \begin{cases} 0 \text{ para o método A e} \\ 1 \text{ para o método B} \end{cases}$$

e Y_i a nota da prova do i-ésimo aluno.

(a) Qual o significado de β_0 e β_1?

(b) Obtenha o estimador não viesado de variância uniformemente mínima da diferença das notas médias para alunos sujeitos aos métodos A e B, justificando sua resposta.

(c) Construa um teste de hipóteses para a igualdade das notas médias seguindo os dois métodos, contra a hipótese alternativa de que as médias são diferentes. Utilize a forma geral $C\underset{\sim}{\beta} = \underline{m}$.

(d) Prove que o teste do item (c) é equivalente ao teste t de igualdade de médias para amostras independentes.

Exercício 8. Considere o modelo $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ com $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 x_i^2)$, ϵ_i e ϵ_j variáveis aleatórias independentes para $i \neq j$. Considere os valores de X e Y para uma amostra de 5 observações a seguir.

X	1	2	5	5	10
Y	13	10	20	15	50

(a) Obtenha os estimadores não viciados de variância uniformemente mínima para α e β e as correspondentes estimativas.

(b) Teste, ao nível de significância $\alpha = 0,10$, a hipótese $H_0 : \beta = 1$ contra $H_1 : \beta > 1$.

Exercício 9. Considere o modelo

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta_1 + \epsilon_1 \\ Y_2 &= 2\theta_1 - \theta_2 + \epsilon_2 \\ Y_3 &= \theta_1 + 2\theta_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

com $\underset{\sim}{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)' \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I)$.
Obtenha o teste para avaliar se $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ contra $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.

Exercício 10. Obtenha o teste da razão de verossimilhanças generalizada para $H_0 : \underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{b}$ com $\underset{\sim}{b}$ um vetor de constantes conhecido, no modelo

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon} \text{ com } \underset{\sim}{\epsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$$

(modelo com intercepto). Determine o estimador de mínimos quadrados de $\underset{\sim}{\beta}$ sob H_0.