3ª Lista de Exercícios - Modelos Lineares - 09/04/2014

Exercício 1. Considere o modelo $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$ com $\underset{\sim}{\epsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$ e X de posto completo $k+1$. Se $\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}} = \underset{\sim}{Y} - \widehat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{Y} - X\widehat{\underset{\sim}{\beta}}$, prove que

(i) $\text{Cov}(\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}}, \widehat{\underset{\sim}{\beta}}) = 0$,

(ii) $\text{Cov}(\underset{\sim}{\epsilon}, \widehat{\underset{\sim}{\beta}}) = X(X'X)^{-1}\sigma^2$,

(iii) $\text{Cov}(\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}}, \underset{\sim}{Y}) = [I - X(X'X)^{-1}X']\sigma^2$,

(iv) $\text{Cov}(\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}}, \widehat{\underset{\sim}{Y}}) = 0$.

Com base nos itens (iii) e (iv), discuta por que é preferível a análise gráfica de $\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}} \times \widehat{\underset{\sim}{Y}}$ em relação à análise gráfica de $\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}} \times \underset{\sim}{Y}$.

Exercício 2. Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 I_n)$ com X de posto completo p. Prove que

$$\left(\widehat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right)' \frac{X'X}{\sigma^2} \left(\widehat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta}\right) \sim \chi^2_p.$$

Exercício 3. Considere um modelo linear geral $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$, com intercepto, e as partições

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \underset{\sim}{\beta}_1 \end{bmatrix} \text{ com } \underset{\sim}{\beta}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k \end{bmatrix}' \text{ e } X = [\underset{\sim}{1} \;\; X_1].$$

Considere $S = X_1'X_1 - n\overline{\underset{\sim}{x}}\,\overline{\underset{\sim}{x}}'$ e $\overline{\underset{\sim}{x}}' = [\overline{x}_1 \; \overline{x}_2 \; \dots \; \overline{x}_k]$, em que $\overline{x}_i$ é a média dos elementos da $(i+1)$-ésima coluna de X, $i = 1, \dots, k$. Prove que

(i) $\widehat{\underset{\sim}{\beta}}_1 = S^{-1}\left[X_1'\underset{\sim}{Y} - \dfrac{X_1'\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{1}'\underset{\sim}{Y}}{n}\right] = S^{-1}(X_1'\underset{\sim}{Y} - n\overline{Y}\overline{\underset{\sim}{x}}')$

(ii) $\widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \overline{\underset{\sim}{x}}'S^{-1}(X_1'\underset{\sim}{Y} - n\overline{Y}\overline{\underset{\sim}{x}}) = \overline{Y} - \overline{\underset{\sim}{x}}'\widehat{\underset{\sim}{\beta}}_1$

Exercício 4. No modelo $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\epsilon}$, com $\underset{\sim}{\epsilon} \sim N_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$, determine a distribuição do vetor de resíduos $\widehat{\underset{\sim}{\epsilon}} = \underset{\sim}{Y} - \widehat{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{Y} - X\widehat{\underset{\sim}{\beta}}$.

Exercício 5. Sejam

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta + \epsilon_1 \\ Y_2 &= 2\theta - \gamma + \epsilon_2 \\ Y_3 &= \theta + 2\gamma + \epsilon_3 \end{aligned}$$

onde $E(\epsilon_i) = 0$, $i = 1, \dots, 3$. Determine os estimadores de mínimos quadrados de θ e γ.

Exercício 6. Considere um modelo linear em que

$$\begin{aligned} \text{E}(Y_{1i}) &= \theta, \;\; i = 1, \dots, m, \\ \text{E}(Y_{2i}) &= \theta + \gamma, \;\; i = 1, \dots, m, \\ \text{E}(Y_{3i}) &= \theta - 2\gamma, \;\; i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

em que todas as observações estão sujeitas a erros independentes com média 0 e variância σ^2.

(a) Determine os estimadores de mínimos quadrados de θ e γ.

(b) Prove que esses estimadores são não correlacionados se $m = 2n$.

Exercício 7. Mostre que $(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}) = (\underset{\sim}{Y} - X\widehat{\underset{\sim}{\beta}})'(\underset{\sim}{Y} - X\widehat{\underset{\sim}{\beta}}) + (\widehat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta})'X'X(\widehat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{\beta})$ com $\widehat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$ e conclua que $(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta})'(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta})$ é minimizada para $\underset{\sim}{\beta} = \widehat{\underset{\sim}{\beta}}$.

Exercício 8. Suponha que, em um modelo linear geral com intercepto, multiplicamos todos os valores das variáveis independentes de modo que $x_{ij} = k_j w_{ij}$ para todo i e j. Expressando a matrix X em termos de uma nova matriz W, prove que $\widehat{\underset{\sim}{Y}}$ permanece inalterado.