**2ª Lista de Exercícios - Modelos Lineares - 07/04/2014**

---

**Exercício 1.** Particionando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de forma conveniente, determine sua inversa.

**Exercício 2.** Prove que as raízes características de uma matriz triangular são os elementos da diagonal principal.

**Exercício 3.** Seja $A$ uma matriz $p \times n$ qualquer.

**(a)** Prove que $A'A$ é uma matriz simétrica de dimensão $n \times n$.

**(b)** Mostre que $A'A$ é não negativa definida.

**Exercício 4.** Considere o modelo de medidas repetidas

$$\begin{aligned} X_{i1} &= \mu + \epsilon_{i1} \\ X_{i2} &= \mu + \alpha + \epsilon_{i2}, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

onde $X_{i1}$ e $X_{i2}$ são medidas no $i$-ésimo indivíduo, antes e depois da aplicação de um tratamento, respectivamente. Admitindo que $\underset{\sim}{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2})'$, $i = 1, \ldots, n$ são vetores aleatórios independentes com $\mathrm{E}(\epsilon_{ij}) = 0$ e $\mathrm{Var}(\epsilon_{ij}) = \sigma_j^2$ e $\mathrm{Cov}(\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}) = \rho\sigma_1\sigma_2$, construa a matriz de variâncias e covariâncias de $(\underset{\sim}{\epsilon}_1, \ldots, \underset{\sim}{\epsilon}_n)'$ e escreva-a utilizando a notação do produto de Kronecker.

**Exercício 5.** Se $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ com $r(\Sigma) = n$, determine a distribuição de $\underset{\sim}{Y}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{Y}$.

**Exercício 6.** Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2 I)$. Se $A$ é uma matriz simétrica de posto completo, calcule $\mathrm{E}(\underset{\sim}{Y}'A\underset{\sim}{Y})$ e $\mathrm{Var}(\underset{\sim}{Y}'A\underset{\sim}{Y})$.

**Exercício 7.** Sejam $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, $B$ uma matriz de constantes $q \times p$ e $\underset{\sim}{b}$ um vetor de constantes $q \times 1$. Usando funções geradoras de momentos, prove que $\underset{\sim}{Y} = B\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{b}$ tem distribuição $N_q(B\underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{b}, B\Sigma B')$.

**Exercício 8.** Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média $\mu$ e variância $\sigma^2$, determine a esperança de

$$Q = (X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + \ldots + (X_{n-1} - X_n)^2.$$

**Exercício 9.** Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, mostre que $\overline{Y}$ e $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$ são variáveis aleatórias independentes.

**Exercício 10.** Se $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(0, I_n)$ com $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, Y_2 \ldots, Y_n)'$, determine a variância de

$$(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \ldots + (Y_{n-1} - Y_n)^2.$$

**Exercício 11.** Seja $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(0, I_n)$. Prove que se $\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} = Q_1 + Q_2$ onde $Q_1 = \underset{\sim}{Y}'A\underset{\sim}{Y}$ e $Q_1 \sim \chi_a^2$ então $Q_2 \sim \chi_{n-a}^2$.

**Exercício 12.** Se $\underset{\sim}{Y} \sim N_n(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ com $\underset{\sim}{Y} = (Y_2, Y_2, Y_3)'$, $\underset{\sim}{\mu} = (\mu, \mu, \mu)'$ e $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, determine o valor de $a$ para que $Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Y_1 - Y_2 - Y_3$ sejam independentes.