1ª Lista de Exercícios - Modelos Lineares - 26/3/2014

Exercício 1. Determine o posto das matrizes A e B a seguir

$$\textbf{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(b)}\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 2. Mostre que se uma matriz A admite inversa, então ela é única.

Exercício 3. Determine a matriz A associada à forma quadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2.$$

Exercício 4. Sejam duas variáveis aleatórias $Y_1 = X$ e $Y_2 = 1 - X$ onde $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Obtenha a matriz de variâncias e covariâncias de $(Y_1, Y_2)'$ e verifique que é positiva semi-definida.

Exercício 5. Seja A uma matriz $p \times n$ qualquer. Prove que $A'A$ é simétrica.

Exercício 6. Considere $\underset{\sim}{X} = [X_0, X_1, X_2]' \sim N_3(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$ com $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a distribuição marginal de X_1.
(b) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.
(c) Determine a distribuição condicional de X_0 dado $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$.
(d) Determine ρ_{12}, ρ_{01} e ρ_{02}, em que $\rho_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}$.
(e) Determine a distribuição de $Z = 4X_0 - 6X_1 + X_2$.
(f) Determine a covariância entre Z_1 e Z_2, onde $Z_1 = X_0 - X_1 + 2X_2$ e $Z_2 = 2X_1$.

Exercício 7. Seja $\underset{\sim}{X} = [X_0, X_1, X_2]'$ um vetor aleatório tridimensional com função geradora de momentos $m_x(t) = \exp\left(t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_1t_2 - t_1t_3\right)$. Determine c tal que $P(2X_1 - 3X_2 + X_3 > c) = 0,95$.

Exercício 8. Se $[X, Y]'$ tem distribuição normal bivariada, com $X \sim N(8, 4)$ e $Y \sim N(3, 2)$ e que $E(Y|X = x) = -1 + \frac{1}{2}x$, determine o coeficiente de correlação entre X e Y e $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.

Exercício 9. Sejam $\underset{\sim}{Y} \sim N(\underset{\sim}{0}, I)$, $\underset{\sim}{X} = A\underset{\sim}{Y}$, $\underset{\sim}{U} = B\underset{\sim}{Y}$ e $\underset{\sim}{V} = C\underset{\sim}{Y}$, onde A, B e C são matrizes $r \times n$ de posto r com $r < n$. Se $\mathrm{Cov}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{U}) = 0$ e $\mathrm{Cov}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{V}) = 0$, mostre que $\underset{\sim}{X}$ é independente de $\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{V}$.

Exercício 10. Sejam $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{X}_3$ e $\underset{\sim}{X}_4$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$. Determine a distribuição dos vetores aleatórios $\underset{\sim}{V}_1 = \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_1 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_2 + \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_3 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_4$ e $\underset{\sim}{V}_2 = \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_1 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{X}_2 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_3 - \frac{1}{4}\underset{\sim}{X}_4$. Determine a distribuição conjunta de $\underset{\sim}{V}_1$ e $\underset{\sim}{V}_2$.