A Conjectura do Unfriendly Partition

Lucas Real

Combinando

1 Notações e Pré-Requisitos

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado $v \in V$ um vértice, o conjunto dos vértices a ele adjacentes, designado **vizinhança** de v, será denotado por $N(v)$. Se $F \subset V$ é um subconjunto, a vizinhança de F é definida como $N(F) = \bigcup_{v \in F} N(v)$. Dado $n \in \mathbb{N}$ um natural, uma função $f : V \to \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ será dita uma n−**coloração** do grafo. Naturalmente, f induz uma partição sobre V: $\{f^{-1}(i) : 0 \leq i \leq n-1\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos cuja união é V. Se uma função $g : K \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ é uma restrição de f, em que $K \subset V$, dizemos que f **estende** g.

A seguinte consequência do Teorema de Tychonoff nos é útil [2]:

Lema 1.1 (Lema da Seleção de Rado)**.** *Seja $\{A_i : i \in I\}$ uma coleção de subconjuntos finitos não-vazios de um conjunto T. Denote por $[I]^{<\infty}$ a família de todos os subconjuntos finitos do conjunto de índices I. Para cada $J \in [I]^{<\infty}$, considere φ_J uma função escolha sobre $\{A_j : j \in J\}$. Então existe uma função escolha φ sobre $\{A_i : i \in I\}$ tal que, para todo $J \in [I]^{<\infty}$, existe $K \in [I]^{<\infty}$ com $J \subset K$ e $\varphi|_J = \varphi_K|_J$.*

Demonstração. Considere o produto cartesiano $X = \bigtimes_{i \in I} A_i$. Vamos munir cada conjunto A_i com a topologia discreta, de maneira que, como eles são finitos, esses são espaços topológicos compactos. Vamos munir X com a topologia produto resultantes, de modo que, pelo Teorema de Tychonoff, X é compacto. Observe também que esse espaço pode ser identificado como o espaço das funções escolhas definidas sobre T.

Dado J um subconjunto finito de T, denote por F_J o conjunto de todas as funções escolha de T que coincidem com φ_K quando restritas a J para algum $K \subset T$ finito com $J \subset K$. Portanto, $X \setminus F_j$ é o conjunto dos elementos $\theta \in X$ tal que $\theta|_J \neq \varphi_K|_J$ sempre que K é um subconjunto finito de T com $J \subset K$. Assim, dados $\theta \in X$ e $J \subset I$ um conjunto finito (que pode ser identificado com um subconjunto $J \subset T$), defina

$$S_J(\theta) = \bigtimes_{i \in I} \begin{cases} \{\theta(i)\}, & \text{se } i \in J \\ A_i, & \text{se } i \notin J \end{cases}$$

Em outras palavras, $S_j(\theta)$ é o conjunto de todas as funções escolha sobre T que coincidem com θ quando restritas a J. Nesses termos, podemos escrever

$$X \setminus F_J = \bigcup_{\theta \in X \setminus F_J} S_J(\theta)$$

Contudo, cada $S_J(\theta)$ é um aberto na topologia produto sobre X, supondo que $J \subset I$ é finito. Logo, $X \setminus F_J$ é aberto. Por um momento, suponha que

$$\bigcup_{J \subset I \ \ finito} (X \setminus F_J) = X$$

Visto que X é compacto, existem finitos $J_1, J_2, \ldots, J_n \subset I$ conjuntos finitos com $(X \setminus F_{J_1}) \cup (X \setminus F_{J_2}) \cup \cdots \cup (X \setminus F_{J_n}) = X$. Isso significa que $F_{J_1} \cap F_{J_2} \cap \cdots \cap F_{J_n} = \emptyset$, contradizendo o fato de que

$$\emptyset \neq F_{J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \cdots \cup J_n} \subset F_{J_1} \cap F_{J_2} \cap \cdots \cap F_{J_n}$$

Logo, $\displaystyle\bigcup_{J \subset I \ \ finito} (X \setminus F_J)$ é um subconjunto estrito de X, de maneira que $\displaystyle\bigcap_{J \subset I \ \ finito} F_J \neq \emptyset$. Qualquer elemento dessa intersecção é uma função que satisfaz as condições do enunciado. □

2 Definições e Primeiros Resultados

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Fixe uma 2−coloração $\pi : V \longrightarrow \{0, 1\}$ de G. Dado $x \in V$, defina os conjuntos $A_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) \neq \pi(x)\}$ e $B_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) = \pi(x)\}$ com cardinalidades $a_\pi(x)$ e $b_\pi(x)$. Dizemos que π é **unfriendly** para o vértice x se $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$. Se π for unfriendly para todos os vértices de seu domínio, dizemos que essa é uma **unfriendly partition**. Cowan e Emerson, em um texto que não foi publicado, conjecturaram que todo grafo possui uma unfriendly partition. Isso realmente ocorre quando o conjunto de vértices é finito:

Proposição 2.1. *Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Visto que esse é um grafo finito, podemos escolher uma 2−coloração π sobre o grafo que maximiza a cardinalidade do conjunto $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$. Por um momento, suponha que π não é uma unfriendly partition e considere $v \in V$ um vértice para o qual ela não é unfriendly. Portanto, $a_\pi(v) < b_\pi(v)$. Assim, a partição $\pi * \{v\}$ que troca a imagem de v é tal que $a_{\pi * \{v\}}(v) > b_{\pi * \{v\}}(v)$, contradizendo a escolha de π como a partição que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$. □

Para estudarmos a existência de unfriendly partition em casos mais gerais, utilizaremos também a técnica da troca de cores em certas partições. Assim, dados π uma 2−coloração definida em um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e $A \subset dom(\pi)$, definimos uma 2−coloração $\pi * A$ como

$$(\pi * A)(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{se } v \notin A \\ 1 - \pi(v), & \text{se } v \in A \end{cases}$$

Estendendo a definição dos conjuntos $A_\pi(v)$ e $B_\pi(v)$ para uma 2−coloração π, dados $X, Y \subset dom(\pi)$, escrevemos $A_\pi(X, Y) = \{xy \in E : x \in X, y \in Y, \pi(x) \neq \pi(y)\}$ e $B_\pi(X, Y) = \{xy \in E : x \in X, y \in Y, \pi(x) = \pi(y)\}$. A cardinalidade desses conjuntos será designada por $a_\pi(X, Y)$ e $b_\pi(X, Y)$ respectivamente. Se $X = \{x\}$ é um conjunto unitário, escreveremos $A_\pi(X, Y) = A_\pi(x, Y)$ e $B_\pi(X, Y) = B_\pi(x, Y)$. Caso $Y = V(G)$, também convencionamos $A_\pi(X, Y) = A_\pi(X)$ e $B_\pi(X, Y) = B_\pi(X)$. Sobre essa notação, temos os seguintes cálculos:

Lema 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com π uma 2−coloração sobre seus vértices. Então, dados $X, F \subset V$ com $x \in X$ e $X \cap F \neq \emptyset$, valem que:*

1. $a_{\pi * \{x\}}(X) + a_\pi(x) = a_\pi(X) + b_\pi(x)$.
2. $a_{\pi * F}(X) + a_\pi(F, X) = a_\pi(X) + b_\pi(F, X)$.

Demonstração. Para cada um dos casos enunciados, basta fazer as seguintes observações:

1. $A_{\pi * \{x\}}(X) \cup A_\pi(x) = A_\pi(X) \cup B_\pi(x)$ e $A_{\pi * \{x\}}(X) \cap A_\pi(x) = A_\pi(X) \cap B_\pi(x) = \emptyset$.
2. $A_{\pi * F}(X) \cup A_\pi(F, X) = A_\pi(X) \cup B_\pi(F, X)$ e $A_{\pi * F}(X) \cap A_\pi(F, X) = A_\pi(X) \cap B_\pi(F, X) = \emptyset$.

Desenhos podem ajudar na compreensão dessa prova. □

Dado G um grafo e F um conjunto finito de vértices de G, dizemos que uma 2−coloração π sobre os vértices de G é F−boa se $a_\pi(F) \geq a_{\pi'}(F)$ para qualquer outra 2−coloração de G que coincida com π quando ambas são restritas a $V \setminus F$.[1] De modo mais intuitivo, π é F-boa se a cardinalidade de $A_\pi(F)$ não aumenta se trocarmos as cores de quantos vértices quisermos de F. Sobre essa definição, temos o seguinte resultado [1]:

Lema 2.2. *Seja ρ uma 2−coloração sobre um conjunto de vértices $D \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$. Se cada vértice $x \in V \setminus D$ possui grau finito, então existe π uma 2−coloração de V que estende ρ e é F−boa para todo conjunto finito $F \subset V \setminus D$.*

Demonstração. Para cada conjunto finito $K \subset V$, tome π_K uma 2− coloração de K que coincida com ρ em $K \cap D$ e tal que $a_{\pi_K}(K)$ seja máximizado nessas condições. Considerando a família de conjuntos finitos $\{\{v, 0, 1\} : v \in V\}$, pelo Lema da Seleção de Rado existe π uma 2−coloração de V tal que, para todo $L \subset V$ finito, existe $K \subset V$ também finito com $L \subset K$ e $\pi|_L = \pi_K|_L$. Observe primeiro que π estende ρ, pois $\pi_K(x) = \rho(x)$ sempre que $x \in K \cap D$ e $K \subset V$ é finito. Agora, mostraremos que π é F−boa para todo subconjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Por um momento, suponha que isso não ocorre e tome $F \subset V \setminus D$ finito para o qual π não é F−boa. Isso significa que existe π' uma 2−coloração sobre V que coincide com π quando restrita a $V \setminus F$, mas com $a_{\pi'}(F) > a_\pi(F)$. Agora, considere $L = F \cup N(F)$. Por se tratar de um conjunto finito de vértices de grau finito, F possui uma vizinhança $N(F)$ finita, de maneira que L é finito. Nessas condições, sabemos que existe $K \subset V$ com $L \subset K$ e tal que $\pi|_L = \pi_K|_L$. Agora, defina π'_K uma 2−coloração sobre K definida como

$$\pi'_K(v) = \begin{cases} \pi_K(v), & \text{se } v \in K \setminus F \\ \pi'(v), & \text{se } v \in F \end{cases}$$

Primeiro observe que π'_K estende ρ. Pela definição dessa nova 2−coloração sobre K, temos que $A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)$, uma vez que π'_K não altera as cores de π_K em $K \setminus F$. Além disso, pelo cuidado que tomamos com a vizinhança de F, isto é, $\pi_K|_L = \pi|_L$ e $\pi|_{V \setminus F} = \pi'|_{V \setminus F}$, garantimos que $A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi'}(F)$. Juntamente com o fato de que $A_{\pi_K}(F) = A_\pi(F)$, concluimos que $a_{\pi'_K}(K) > a_{\pi_K}(K)$, contradizendo a escolha de π_K. □

Corolário 2.1. *Todo grafo localmente finito possui uma unfriendly partition.*

[1] Destacamos que uma partição F−boa pode não ser unfirendly em F, basta considerar a estrela enumerável.

Demonstração. Segue do lema anterior ao tomarmos o domínio de ρ como o conjunto vazio. □

A grande aplicação desse lema é que ele nos permite concluir que um grafo enumerável com finitos vértices de grau finito possui uma unfriendly partition:

Proposição 2.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo enumerável e considere ρ uma 2−coloração de um subconjunto $D \subset V$. Se $V \setminus D$ possui finitos vértices de grau infinito, então existe uma 2−coloração π de V que estende ρ e que satisfaz $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$ para todo $x \in V \setminus D$.*

Demonstração. Seja I o conjunto (finito) de vértices de $V \setminus D$ com grau infinito. Defina a 2−coloração $\rho_0 : D \cup I \to \{0, 1\}$ como

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \end{cases}$$

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma 2−coloração de V que estende ρ_0 e que é F−boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito. Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$. Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer. Se não, considere $\pi_1 = \pi_0 * I_0$, garantindo-nos que π_1 é unfriendly para os vértices de I. Entretanto, podemos ter $b_{\pi_1}(x) > a_{\pi_1}(x)$. Sabendo que, dado $i \in I$, $a_{\pi_1 * F} \geq b_{\pi_1 * F}$ para todo subconjunto finito $F \subset V \setminus (D \cup I)$. Ou seja, basta encontrar $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito tal que $a_{\pi_1 * F}(x) \geq b_{\pi_1 * F}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.

Por um momento, suponha que tal conjunto não existe, de modo que podemos obter uma sequência de vértices $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (não necessariamente distintos) tais que $a_{\pi_i}(x_i) < b_{\pi_i}(x_i)$, em que $\pi_i = \pi_{i-1} * \{x_{i-1}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Uma vez que I_0 é finito, obtemos que $k = a_{\pi_0}(I_0)$ é finito. Assim, considere o conjunto $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ e defina $\pi' = \pi_{2k+2}$. Pelo lema 2.1(1), obtemos que $a_{\pi_{i+1} * F}(F) = a_{\pi_i * F} + b_{\pi_i}(x_i) - b_{\pi_i}(x_i) > a_{\pi_i}(F)$ para todo $1 \leq i \leq 2k+1$. Assim, através de uma contagem recursiva, concluimos que $a_{\pi'}(F) \geq a_{\pi_1}(F) + 2k + 1$. Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V \setminus F} = \pi_0|_{V \setminus F}$. Agora, pelo lema 2.1(2),

$$a_{\pi''}(F) = a_{\pi'}(F) + b_{\pi'}(I_0, F) - a_{\pi'}(I_0, F) \geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F)$$

Também pelo mesmo lema segue que

$$a_{\pi_1}(F) = a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F)$$

Entretanto, temos claramente que $a_{\pi'}(I_0, F) \leq a_{\pi_0}(I_0, F) + b_{\pi_0}(I_0, F)$. Além disso, $a_{\pi_0}(I_0, F) \leq a_{\pi_0}(I_0) = k$, dado que $A_{\pi_0}(I_0, F) \subset A_{\pi_0}(I_0)$. Em suma,

$$\begin{aligned}
a_{\pi''}(F) &\geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&\geq a_{\pi_1}(F) + 2k + 1 - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&= a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F) + 2k + 1 - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&\geq a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F) + 2k + 1 - a_{\pi_0}(I_0, F) - b_{\pi_0}(I_0, F) \\
&= a_{\pi_0}(F) - 2a_{\pi_0}(I_0, F) + 2k + 1 \geq a_{\pi_0}(F) - 2k + 2k + 1 = a_{\pi_0}(F) + 1 > a_{\pi_0}(F),
\end{aligned}$$

contradizendo o fato de π_0 ser F−boa. □

3 Referências Bibliográficas

[1] R. Aharoni, E. C. Milner e K. Prikry. "Unfriendly partitions of a graph". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 50.1 (1990), pp. 1–10. ISSN: 10960902. DOI: 10.1016/0095-8956(90)90092-E.

[2] "4 Rado's Selection Principle". Em: *An account of some aspects of combinatorial mathematics*. Ed. por L. Mirsky. Vol. 75. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, 1971, pp. 52–73. DOI: https://doi.org/10.1016/S0076-5392(08)63130-6. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0076539208631306.