A Conjectura do Unfriendly Partition

Combinando

10 de Março de 2020

Vocabulário Inicial:

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado $v \in V$ um vértice, o conjunto dos vértices a ele adjacentes, designado **vizinhança** de v, será denotado por $N(v)$. Por **grau** do vértice v, nos referimos a $|N(v)|$.

Vocabulário Inicial:

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado $v \in V$ um vértice, o conjunto dos vértices a ele adjacentes, designado **vizinhança** de v, será denotado por $N(v)$. Por **grau** do vértice v, nos referimos a $|N(v)|$.

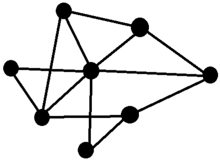


Figura: O vértice em amarelo possui o conjunto dos vértices verdes como vizinhança. Portanto, seu grau é 3.

Vocabulário Inicial:

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado $v \in V$ um vértice, o conjunto dos vértices a ele adjacentes, designado **vizinhança** de v, será denotado por $N(v)$. Por **grau** do vértice v, nos referimos a $|N(v)|$.

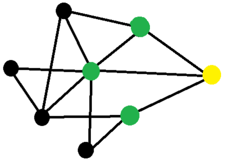


Figura: O vértice em amarelo possui o conjunto dos vértices verdes como vizinhança. Portanto, seu grau é 3.

Vocabulário Inicial:

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dado $v \in V$ um vértice, o conjunto dos vértices a ele adjacentes, designado **vizinhança** de v, será denotado por $N(v)$. Por **grau** do vértice v, nos referimos a $|N(v)|$. Se $F \subset V$ é um subconjunto, a vizinhança de F é definida como $N(F) = \bigcup\limits_{v \in F} N(v)$

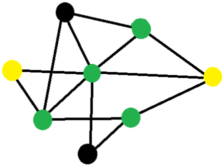


Figura: O conjunto dos vértices amarelos possui o conjunto dos vértices verdes como vizinhança.

Colorações de Vértices:

Dado $n \in \mathbb{N}$ um natural, uma função $f : V \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ será dita uma $n-$**coloração** do grafo.

Colorações de Vértices:

Dado $n \in \mathbb{N}$ um natural, uma função $f : V \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ será dita uma $n-$**coloração** do grafo.Sobre o grafo anterior, temos a seguinte $3-$coloração, por exemplo:

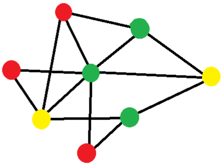
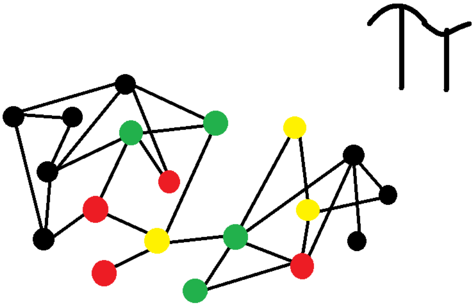


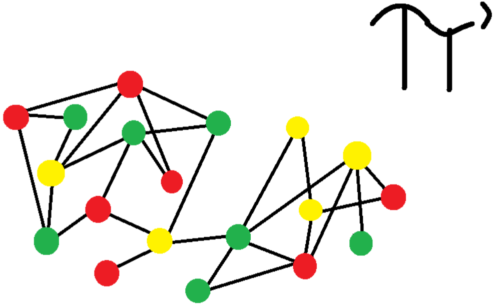
Figura: Observe que os conjuntos dos vértices amarelos, dos vértices verdes e dos vértices vermelhos particionam V.

Dados $K \subset V$ um subconjunto de vértices e $\pi : K \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ uma $n-$coloração dos vértices de K, dizemos que $\pi' : V \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ estende π se $\pi'|_K = \pi$.

Dados $K \subset V$ um subconjunto de vértices e $\pi : K \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ uma $n-$coloração dos vértices de K, dizemos que $\pi' : V \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ estende π se $\pi'|_K = \pi$. Vejamos um exemplo:

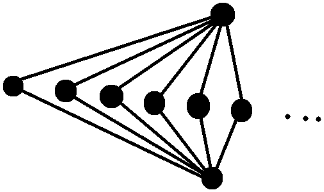


Dados $K \subset V$ um subconjunto de vértices e $\pi : K \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ uma $n-$coloração dos vértices de K, dizemos que $\pi' : V \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ estende π se $\pi'|_K = \pi$. Vejamos um exemplo:



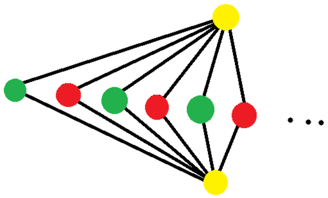
Lembrete: grafos infinitos existem!

Destacamos que todas essas definições não se restringem a grafos com uma quantidade finita de vértices. Por exemplo, podemos considerar a seguinte $3-$coloração sobre o grafo infinito abaixo:



Lembrete: grafos infinitos existem!

Destacamos que todas essas definições não se restringem a grafos com uma quantidade finita de vértices. Por exemplo, podemos considerar a seguinte $3-$coloração sobre o grafo infinito abaixo:

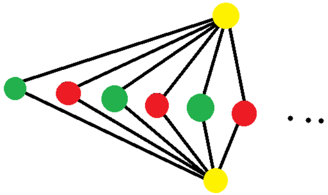


Partições n-Unfriendly

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Fixe uma $n-$coloração $\pi : V \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ de G. Dado $x \in V$, defina os conjuntos $A_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) \neq \pi(x)\}$ e $B_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) = \pi(x)\}$ com cardinalidades $a_\pi(x)$ e $b_\pi(x)$, respectivamente. Dizemos que π é **unfriendly** para o vértice x se $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$. Se π for unfriendly para todos os vértices de seu domínio, dizemos que essa é uma **unfriendly n-partition**.

Partições n-Unfriendly

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Fixe uma $n-$coloração $\pi : V \to \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ de G. Dado $x \in V$, defina os conjuntos $A_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) \neq \pi(x)\}$ e $B_\pi(x) = \{y \in N(x) : \pi(y) = \pi(x)\}$ com cardinalidades $a_\pi(x)$ e $b_\pi(x)$, respectivamente. Dizemos que π é **unfriendly** para o vértice x se $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$. Se π for unfriendly para todos os vértices de seu domínio, dizemos que essa é uma **unfriendly n-partition**. O exemplo anterior consiste em uma unfriendly $3-$partition:



Com 2 cores é mais difícil

O caso de interesse no estudo de unfriendly n-partitions ocorre quando buscamos colorir o grafo com a menor quantidade de cores possível. Assim, procuraremos descobrir quais grafos admitem unfriendly 2-partitions, ou, de modo enxuto, **unfriendly partition**.

Com 2 cores é mais difícil

O caso de interesse no estudo de unfriendly n-partitions ocorre quando buscamos colorir o grafo com a menor quantidade de cores possível. Assim, procuraremos descobrir quais grafos admitem unfriendly 2-partitions, ou, de modo enxuto, **unfriendly partition**.

Conjectura: (Cowan e Emerson)

Todo grafo possui uma unfriendly partition.

Com 2 cores é mais difícil

O caso de interesse no estudo de unfriendly n-partitions ocorre quando buscamos colorir o grafo com a menor quantidade de cores possível. Assim, procuraremos descobrir quais grafos admitem unfriendly 2-partitions, ou, de modo enxuto, **unfriendly partition**.

Conjectura: (Cowan e Emerson)

Todo grafo possui uma unfriendly partition.

Milner e Shelah [2] refutaram essa conjectura ao exibirem um grafo com uma quantidade não-enumerável de vértices que não possui uma unfriendly partition.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

Demonstração.

Considere $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

Demonstração.

Considere $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices. Assim, podemos tomar $\pi : V \to \{0, 1\}$ uma $2-$coloração de V que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

Demonstração.

Considere $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices. Assim, podemos tomar $\pi : V \to \{0, 1\}$ uma $2-$coloração de V que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$.Por um momento, suponha que π não é uma unfriendly partition e considere $v \in V$ um vértice para o qual ela não é unfriendly.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

Demonstração.

Considere $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices. Assim, podemos tomar $\pi : V \to \{0, 1\}$ uma $2-$coloração de V que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$.Por um momento, suponha que π não é uma unfriendly partition e considere $v \in V$ um vértice para o qual ela não é unfriendly.Portanto, $a_\pi(v) < b_\pi(v)$.

O que sabemos?

Proposição:

Todo grafo finito possui uma unfriendly partition.

Demonstração.

Considere $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices. Assim, podemos tomar $\pi : V \to \{0, 1\}$ uma 2−coloração de V que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$.Por um momento, suponha que π não é uma unfriendly partition e considere $v \in V$ um vértice para o qual ela não é unfriendly.Portanto, $a_\pi(v) < b_\pi(v)$.Assim, a partição $\pi * \{v\}$ que troca a imagem de v é tal que $a_{\pi*\{v\}}(v) > b_{\pi*\{v\}}(v)$, contradizendo a escolha de π como a partição que maximiza a cardinalidade de $\{xy \in E : \pi(x) \neq \pi(y)\}$. □

Para estudarmos a existência de unfriendly partition em casos mais gerais, utilizaremos também a técnica da troca de cores em certas partições. Assim, dados π uma $2-$coloração definida em um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e $A \subset dom(\pi)$, definimos uma $2-$coloração $\pi * A$ como

Para estudarmos a existência de unfriendly partition em casos mais gerais, utilizaremos também a técnica da troca de cores em certas partições. Assim, dados π uma $2-$coloração definida em um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e $A \subset dom(\pi)$, definimos uma $2-$coloração $\pi * A$ como

$$(\pi * A)(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{se } v \notin A \\ 1 - \pi(v), & \text{se } v \in A \end{cases}$$

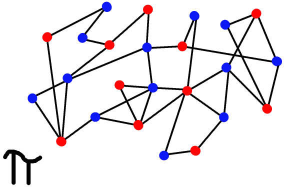


Figura: Dada a $2-$coloração π (que é unfriendly, aliás), vamos definir $\pi * A$.

Para estudarmos a existência de unfriendly partition em casos mais gerais, utilizaremos também a técnica da troca de cores em certas partições. Assim, dados π uma $2-$coloração definida em um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e $A \subset dom(\pi)$, definimos uma $2-$coloração $\pi * A$ como

$$(\pi * A)(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{se } v \notin A \\ 1 - \pi(v), & \text{se } v \in A \end{cases}$$

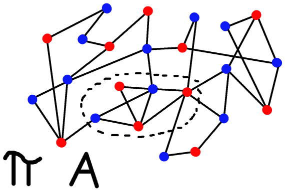


Figura: Dada a $2-$coloração π (que é unfriendly, aliás), vamos definir $\pi * A$.

Para estudarmos a existência de unfriendly partition em casos mais gerais, utilizaremos também a técnica da troca de cores em certas partições. Assim, dados π uma $2-$coloração definida em um subconjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$ e $A \subset dom(\pi)$, definimos uma $2-$coloração $\pi * A$ como

$$(\pi * A)(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{se } v \notin A \\ 1 - \pi(v), & \text{se } v \in A \end{cases}$$

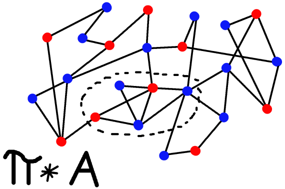


Figura: Dada a $2-$coloração π (que é unfriendly, aliás), vamos definir $\pi * A$ (que já não é mais unfriendly).

Estendendo a definição dos conjuntos $A_\pi(v)$ e $B_\pi(v)$ para uma $2-$coloração π, dados $X, Y \subset dom(\pi)$, escrevemos $A_\pi(X,Y) = \{xy \in E : x \in X, y \in Y, \pi(x) \neq \pi(y)\}$ e $B_\pi(X,Y) = \{xy \in E : x \in X, y \in Y, \pi(x) = \pi(y)\}$. A cardinalidade desses conjuntos será designada por $a_\pi(X,Y)$ e $b_\pi(X,Y)$ respectivamente. Se $X = \{x\}$ é um conjunto unitário, escreveremos $A_\pi(X,Y) = A_\pi(x,Y)$ e $B_\pi(X,Y) = B_\pi(x,Y)$. Caso $Y = V(G)$, também convencionamos $A_\pi(X,Y) = A_\pi(X)$ e $B_\pi(X,Y) = B_\pi(X)$. Sobre essa notação, temos os seguintes cálculos:

Lema: (Lema da Comparação)

Seja $G = (V,E)$ um grafo com π uma $2-$coloração sobre seus vértices. Então, dados $X, F \subset V$ com $x \in X$ e $X \cap F \neq \emptyset$, valem que:

1. $a_{\pi * \{x\}}(X) + a_\pi(x) = a_\pi(X) + b_\pi(x)$.
2. $a_{\pi * F}(X) + a_\pi(F,X) = a_\pi(X) + b_\pi(F,X)$.

Justificativa de 1) $a_{\pi * \{x\}}(X) + a_\pi(x) = a_\pi(X) + b_\pi(x)$.

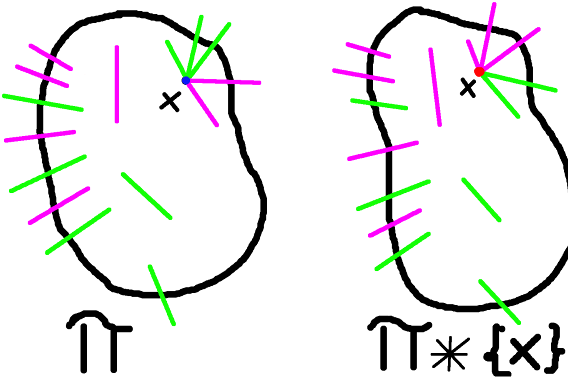


Figura: As arestas rosas possuem pontas de cores distintas, enquanto as arestas verdes possuem pontas de cores iguais.

Formalmente, $A_{\pi * \{x\}}(X) \cup A_\pi(x) = A_\pi(X) \cup B_\pi(x)$ e $A_{\pi * \{x\}}(X) \cap A_\pi(x) = A_\pi(X) \cap B_\pi(x) = \emptyset$.

Justificativa de 2) $a_{\pi * F}(X) + a_{\pi}(F, X) = a_{\pi}(X) + b_{\pi}(F, X)$.

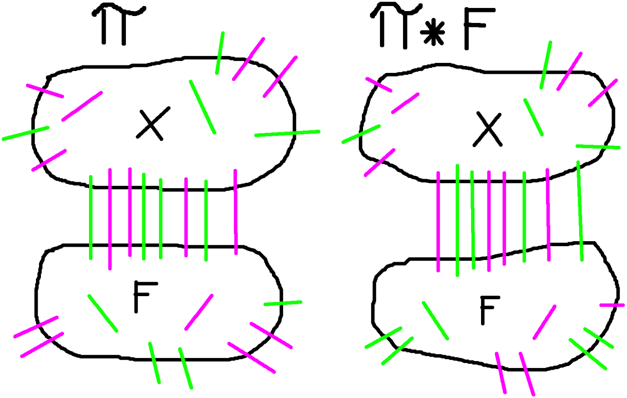


Figura: As arestas rosas possuem pontas de cores distintas, enquanto as arestas verdes possuem pontas de cores iguais.

Formalmente, $A_{\pi * F}(X) \cup A_{\pi}(F, X) = A_{\pi}(X) \cup B_{\pi}(F, X)$ e
$A_{\pi * F}(X) \cap A_{\pi}(F, X) = A_{\pi}(X) \cap B_{\pi}(F, X) = \emptyset$.

Coisa boa

Dado G um grafo e F um conjunto finito de vértices de G, dizemos que uma $2-$coloração π sobre os vértices de G é $F-$boa se $a_\pi(F) \geq a_{\pi'}(F)$ para qualquer outra $2-$coloração de G que coincida com π quando ambas são restritas a $V \setminus F$.

Coisa boa

Dado G um grafo e F um conjunto finito de vértices de G, dizemos que uma $2-$coloração π sobre os vértices de G é $F-$boa se $a_\pi(F) \geq a_{\pi'}(F)$ para qualquer outra $2-$coloração de G que coincida com π quando ambas são restritas a $V \setminus F$. De modo mais intuitivo, π é F-boa se a cardinalidade de $A_\pi(F)$ não aumenta se trocarmos as cores de quantos vértices quisermos de F.

Coisa boa

Dado G um grafo e F um conjunto finito de vértices de G, dizemos que uma $2-$coloração π sobre os vértices de G é $F-$boa se $a_{\pi}(F) \geq a_{\pi'}(F)$ para qualquer outra $2-$coloração de G que coincida com π quando ambas são restritas a $V \setminus F$. De modo mais intuitivo, π é F-boa se a cardinalidade de $A_{\pi}(F)$ não aumenta se trocarmos as cores de quantos vértices quisermos de F. Com o mesmo argumento da prova de que todo grafo finito possui uma unfriendly partition, concluimos que se uma $2-$coloração é $F-$boa em um subconjunto finito de vértices de grau finito em um grafo G, então essa coloração é unfriendly para todo vértice de F.

E para conjuntos infinitos?

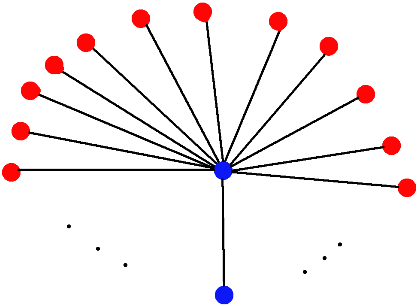


Figura: Nesse grafo, conhecido como **estrela infinita**, considere F o conjunto de vértices de grau 1. A $2-$coloração representada é $F-$boa, mas não é unfriendly para todos os vértices de F.

Lema: ([1])

Seja ρ uma $2-$coloração sobre um conjunto de vértices $D \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$. Se cada vértice $x \in V \setminus D$ possui grau finito, então existe π uma $2-$coloração de V que estende ρ e é $F-$boa para todo conjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Demonstração: Para cada conjunto finito $K \subset V$, tome π_K uma $2-$coloração de K que coincida com ρ em $K \cap D$ e tal que $a_{\pi_K}(K)$ seja máximizado nessas condições.

Lema: ([1])

Seja ρ uma $2-$coloração sobre um conjunto de vértices $D \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$. Se cada vértice $x \in V \setminus D$ possui grau finito, então existe π uma $2-$coloração de V que estende ρ e é $F-$boa para todo conjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Demonstração: Para cada conjunto finito $K \subset V$, tome π_K uma $2-$coloração de K que coincida com ρ em $K \cap D$ e tal que $a_{\pi_K}(K)$ seja máximizado nessas condições. Considere a família de conjuntos finitos $T = \{\{v, 0, 1\} : v \in V\}$. Todo subconjunto finito $K' \subset T$ é da forma $K' = \{\{v, 0, 1\} : v \in K\}$ para um único $K \subset V$ finito. Com isso, defina $\varphi_{K'}(\{v, 0, 1\}) = \pi_{K'}(v)$ para todo $v \in K$.

Lema: ([1])

Seja ρ uma $2-$coloração sobre um conjunto de vértices $D \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$. Se cada vértice $x \in V \setminus D$ possui grau finito, então existe π uma $2-$coloração de V que estende ρ e é $F-$boa para todo conjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Demonstração: Para cada conjunto finito $K \subset V$, tome π_K uma $2-$coloração de K que coincida com ρ em $K \cap D$ e tal que $a_{\pi_K}(K)$ seja máximizado nessas condições. Considere a família de conjuntos finitos $T = \{\{v, 0, 1\} : v \in V\}$. Todo subconjunto finito $K' \subset T$ é da forma $K' = \{\{v, 0, 1\} : v \in K\}$ para um único $K \subset V$ finito. Com isso, defina $\varphi_{K'}(\{v, 0, 1\}) = \pi_{K'}(v)$ para todo $v \in K$.Portanto, pelo Lema da Seleção de Rado, existe π uma $2-$coloração de V tal que, para todo $L \subset V$ finito, existe $K \subset V$ também finito com $L \subset K$ e $\pi|_L = \pi_K|_L$.

Lema: ([1])

Seja ρ uma $2-$coloração sobre um conjunto de vértices $D \subset V$ de um grafo $G = (V, E)$. Se cada vértice $x \in V \setminus D$ possui grau finito, então existe π uma $2-$coloração de V que estende ρ e é $F-$boa para todo conjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Demonstração: Para cada conjunto finito $K \subset V$, tome π_K uma $2-$coloração de K que coincida com ρ em $K \cap D$ e tal que $a_{\pi_K}(K)$ seja máximizado nessas condições. Considere a família de conjuntos finitos $T = \{\{v, 0, 1\} : v \in V\}$. Todo subconjunto finito $K' \subset T$ é da forma $K' = \{\{v, 0, 1\} : v \in K\}$ para um único $K \subset V$ finito. Com isso, defina $\varphi_{K'}(\{v, 0, 1\}) = \pi_{K'}(v)$ para todo $v \in K$.Portanto, pelo Lema da Seleção de Rado, existe π uma $2-$coloração de V tal que, para todo $L \subset V$ finito, existe $K \subset V$ também finito com $L \subset K$ e $\pi|_L = \pi_K|_L$. Observe primeiro que π estende ρ, pois $\pi_K(x) = \rho(x)$ sempre que $x \in K \cap D$ e $K \subset V$ é finito. Agora, mostraremos que π é $F-$boa para todo subconjunto finito $F \subset V \setminus D$.

Por um momento, suponha que isso não ocorre e tome $F \subset V \setminus D$ finito para o qual π não é $F-$boa. Isso significa que existe π' uma $2-$coloração sobre V que coincide com π quando restrita a $V \setminus F$, mas com $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$.

Por um momento, suponha que isso não ocorre e tome $F \subset V \setminus D$ finito para o qual π não é $F-$boa. Isso significa que existe π' uma $2-$coloração sobre V que coincide com π quando restrita a $V \setminus F$, mas com $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$. Agora, considere $L = F \cup N(F)$. Por se tratar de um conjunto finito de vértices de grau finito, F possui uma vizinhança $N(F)$ finita, de maneira que L é finito.

Por um momento, suponha que isso não ocorre e tome $F \subset V \setminus D$ finito para o qual π não é $F-$boa. Isso significa que existe π' uma $2-$coloração sobre V que coincide com π quando restrita a $V \setminus F$, mas com $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$. Agora, considere $L = F \cup N(F)$. Por se tratar de um conjunto finito de vértices de grau finito, F possui uma vizinhança $N(F)$ finita, de maneira que L é finito.Nessas condições, sabemos que existe $K \subset V$ finito com $L \subset K$ e tal que $\pi|_L = \pi_K|_L$. Agora, defina π'_K uma $2-$coloração sobre K definida como

$$\pi'_K(v) = \begin{cases} \pi_K(v), & \text{se } v \in K \setminus F \\ \pi'(v), & \text{se } v \in F \end{cases}$$

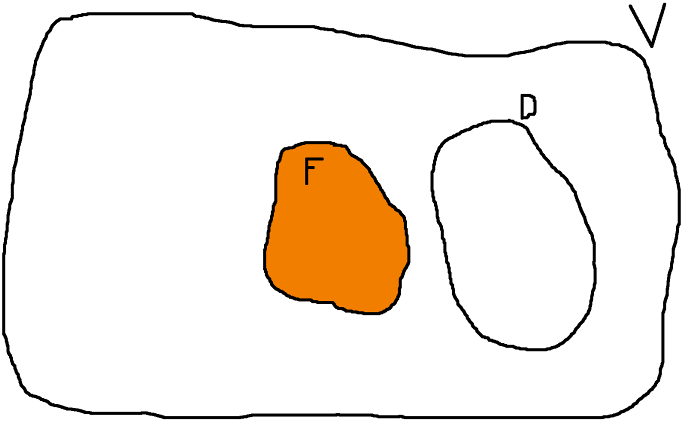


Figura: A coloração π' (em laranja) coincide com a coloração π (em branco) em $V \setminus F$.

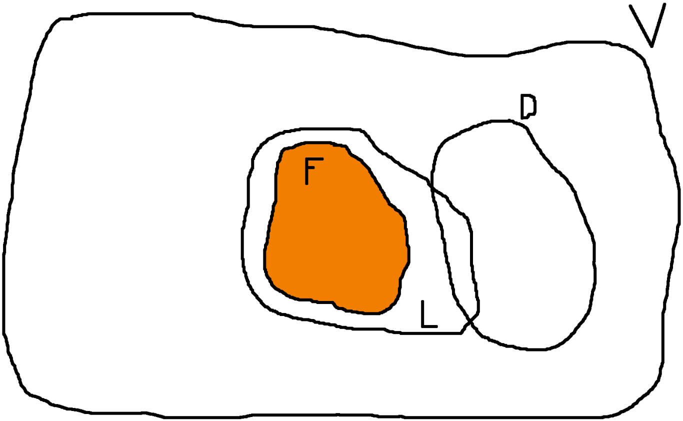


Figura: A coloração π' (em laranja) coincide com a coloração π (em branco) em $V \setminus F$.

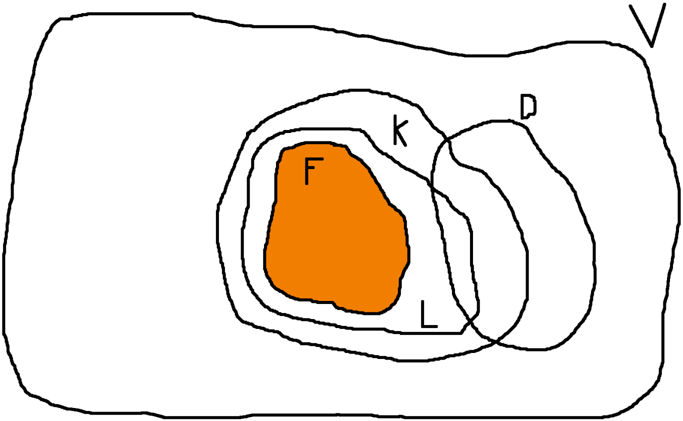


Figura: A coloração π' (em laranja) coincide com a coloração π (em branco) em $V \setminus F$.

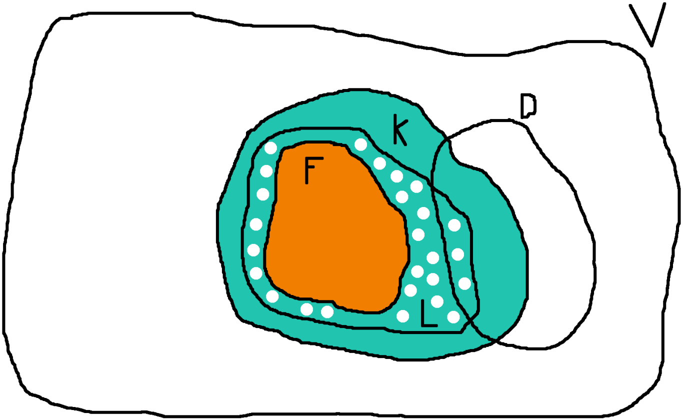


Figura: A coloração π' (em laranja) coincide com a coloração π (em branco) em $V \setminus F$. Por sua vez, a coloração π_K, em azul bebê, coincide com π quando restrita a L (o que, didaticamente, é expresso com as bolinhas brancas). A coloração π'_k consiste nessa disposição. Observe que π'_K estende ρ.

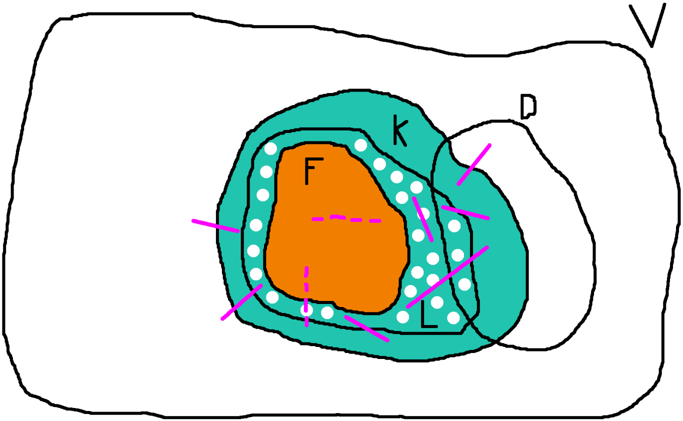


Figura: Note que $A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)$, uma vez que π'_K não altera as cores de π_K em $K \setminus F$.

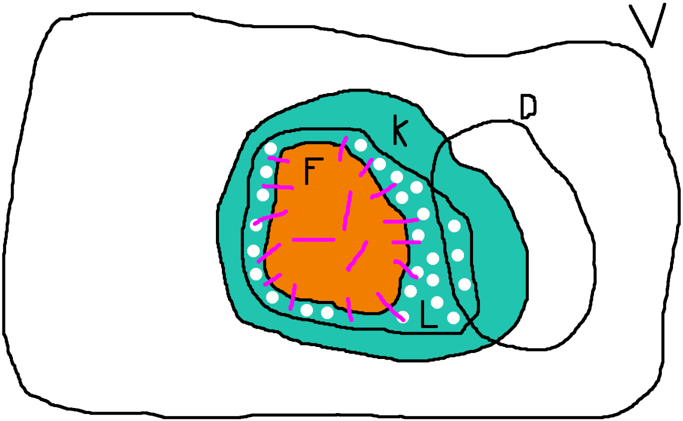


Figura: Observe que $A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi'}(F)$ (pois $\pi_K|_L = \pi|_L$ e $\pi|_{V\setminus F} = \pi'|_{V\setminus F}$) e $A_{\pi_K}(F) = A_\pi(F)$ (pois $\pi|_L = \pi_K|_L$).

Em suma, temos:

- $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$
- $A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)$
- $A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi'}(F)$
- $A_{\pi_K}(F) = A_{\pi}(F)$

Em suma, temos:

- $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$
- $A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)$
- $A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi'}(F)$
- $A_{\pi_K}(F) = A_{\pi}(F)$

Com isso, $a_{\pi'_K}(K) = |(A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F)) \cup A_{\pi'_K}(F)| = |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi'}(F)| > |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi}(F)| = |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi_k}(F)| = |A_{\pi_K}(K)| = a_{\pi_K}(K)$, contradizendo a escolha de π_K. $\square$

Em suma, temos:

- $a_{\pi'}(F) > a_{\pi}(F)$
- $A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)$
- $A_{\pi'_K}(F) = A_{\pi'}(F)$
- $A_{\pi_K}(F) = A_{\pi}(F)$

Com isso, $a_{\pi'_K}(K) = |(A_{\pi'_K}(K) \setminus A_{\pi'_K}(F)) \cup A_{\pi'_K}(F)| = |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi'}(F)| > |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi}(F)| = |(A_{\pi_K}(K) \setminus A_{\pi_K}(F)) \cup A_{\pi_k}(F)| = |A_{\pi_K}(K)| = a_{\pi_K}(K)$, contradizendo a escolha de π_K. $\square$

Corolário:

Todo grafo localmente finito (isto é, que possui todos os vértices de grau finito) admite uma unfriendly partition.

Tolerância de graus infinitos:

Com o auxílio do Lema anterior, podemos obter a existência de unfriendly partitions em grafos com uma quantidade bem controlada de vértices de grau infinito.

Tolerância de graus infinitos:

Com o auxílio do Lema anterior, podemos obter a existência de unfriendly partitions em grafos com uma quantidade bem controlada de vértices de grau infinito.

Proposição: ([1])

Seja $G = (V, E)$ um grafo enumerável e considere ρ uma $2-$coloração de um subconjunto $D \subset V$. Se $V \setminus D$ possui finitos vértices de grau infinito, então existe uma $2-$coloração π de V que estende ρ e que satisfaz $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$ para todo $x \in V \setminus D$.

Tolerância de graus infinitos:

Com o auxílio do Lema anterior, podemos obter a existência de unfriendly partitions em grafos com uma quantidade bem controlada de vértices de grau infinito.

Proposição: ([1])

Seja $G = (V, E)$ um grafo enumerável e considere ρ uma $2-$coloração de um subconjunto $D \subset V$. Se $V \setminus D$ possui finitos vértices de grau infinito, então existe uma $2-$coloração π de V que estende ρ e que satisfaz $a_\pi(x) \geq b_\pi(x)$ para todo $x \in V \setminus D$.

Demonstração: Seja I o conjunto (finito) de vértices de $V \setminus D$ com grau infinito. Defina a $2-$coloração $\rho_0 : D \cup I \to \{0, 1\}$ como

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \end{cases}$$

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer.Se não, considere $\pi_1 = \pi_0 * I_0$, garantindo-nos que π_1 é unfriendly para os vértices de I.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer.Se não, considere $\pi_1 = \pi_0 * I_0$, garantindo-nos que π_1 é unfriendly para os vértices de I.Entretanto, podemos ter $b_{\pi_1}(x) > a_{\pi_1}(x)$ para algum $x \in V \setminus (D \cup I)$.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer.Se não, considere $\pi_1 = \pi_0 * I_0$, garantindo-nos que π_1 é unfriendly para os vértices de I.Entretanto, podemos ter $b_{\pi_1}(x) > a_{\pi_1}(x)$ para algum $x \in V \setminus (D \cup I)$.Observemos que, dado $i \in I$, $a_{\pi_1 * F} \geq b_{\pi_1 * F}$ para todo subconjunto finito $F \subset V \setminus (D \cup I)$.

Pelo Lema anterior, existe π_0 uma $2-$coloração de V que estende ρ_0 e que é $F-$boa para todo subconjunto $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito.Em particular, $a_{\pi_0}(x) \geq b_{\pi_0}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.Agora, denote $I_0 = \{i \in I : a_{\pi_0}(i) < \omega\}$. Se $I_0 = \emptyset$, não há o que fazer.Se não, considere $\pi_1 = \pi_0 * I_0$, garantindo-nos que π_1 é unfriendly para os vértices de I.Entretanto, podemos ter $b_{\pi_1}(x) > a_{\pi_1}(x)$ para algum $x \in V \setminus (D \cup I)$.Observemos que, dado $i \in I$, $a_{\pi_1 * F} \geq b_{\pi_1 * F}$ para todo subconjunto finito $F \subset V \setminus (D \cup I)$.Ou seja, basta encontrar $F \subset V \setminus (D \cup I)$ finito tal que $a_{\pi_1 * F}(x) \geq b_{\pi_1 * F}(x)$ para todo $x \in V \setminus (D \cup I)$.

Por um momento, suponha que tal conjunto não existe, de modo que podemos obter uma sequência de vértices $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (não necessariamente distintos) tais que $a_{\pi_i}(x_i) < b_{\pi_i}(x_i)$, em que $\pi_i = \pi_{i-1} * \{x_{i-1}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por um momento, suponha que tal conjunto não existe, de modo que podemos obter uma sequência de vértices $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (não necessariamente distintos) tais que $a_{\pi_i}(x_i) < b_{\pi_i}(x_i)$, em que $\pi_i = \pi_{i-1} * \{x_{i-1}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.Uma vez que I_0 é finito, obtemos que $k = a_{\pi_0}(I_0)$ é finito. Assim, considere o conjunto $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ e defina $\pi' = \pi_{2k+2}$.

Por um momento, suponha que tal conjunto não existe, de modo que podemos obter uma sequência de vértices $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (não necessariamente distintos) tais que $a_{\pi_i}(x_i) < b_{\pi_i}(x_i)$, em que $\pi_i = \pi_{i-1} * \{x_{i-1}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.Uma vez que I_0 é finito, obtemos que $k = a_{\pi_0}(I_0)$ é finito. Assim, considere o conjunto $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ e defina $\pi' = \pi_{2k+2}$. Pelo item (1) do Lema da Comparação, obtemos que $a_{\pi_{i+1}*F}(F) = a_{\pi_i*F} + b_{\pi_i}(x_i) - b_{\pi_i}(x_i) > a_{\pi_i}(F)$ para todo $1 \leq i \leq 2k+1$.

Por um momento, suponha que tal conjunto não existe, de modo que podemos obter uma sequência de vértices $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (não necessariamente distintos) tais que $a_{\pi_i}(x_i) < b_{\pi_i}(x_i)$, em que $\pi_i = \pi_{i-1} * \{x_{i-1}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.Uma vez que I_0 é finito, obtemos que $k = a_{\pi_0}(I_0)$ é finito. Assim, considere o conjunto $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ e defina $\pi' = \pi_{2k+2}$. Pelo item (1) do Lema da Comparação, obtemos que $a_{\pi_{i+1}*F}(F) = a_{\pi_i*F} + b_{\pi_i}(x_i) - b_{\pi_i}(x_i) > a_{\pi_i}(F)$ para todo $1 \leq i \leq 2k+1$.Assim, através de uma contagem recursiva, concluimos que

$$a_{\pi'}(F) \geq a_{\pi_1}(F) + 2k + 1$$

Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V \setminus F} = \pi_0|_{V \setminus F}$.

Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V \setminus F} = \pi_0|_{V \setminus F}$. Agora, pelo item (2) do Lema da Comparação,

$$a_{\pi''}(F) = a_{\pi'}(F) + b_{\pi'}(I_0, F) - a_{\pi'}(I_0, F) \geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F)$$

Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V \setminus F} = \pi_0|_{V \setminus F}$. Agora, pelo item (2) do Lema da Comparação,

$$a_{\pi''}(F) = a_{\pi'}(F) + b_{\pi'}(I_0, F) - a_{\pi'}(I_0, F) \geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F)$$

Também pelo mesmo lema segue que

$$a_{\pi_1}(F) = a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F)$$

Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V \setminus F} = \pi_0|_{V \setminus F}$. Agora, pelo item (2) do Lema da Comparação,

$$a_{\pi''}(F) = a_{\pi'}(F) + b_{\pi'}(I_0, F) - a_{\pi'}(I_0, F) \geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F)$$

Também pelo mesmo lema segue que

$$a_{\pi_1}(F) = a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F)$$

Entretanto, temos claramente que $a_{\pi'}(I_0, F) \leq a_{\pi_0}(I_0, F) + b_{\pi_0}(I_0, F)$.

Considere agora $\pi'' = \pi' * I_0$, de maneira que $\pi''|_{V\setminus F} = \pi_0|_{V\setminus F}$. Agora, pelo item (2) do Lema da Comparação,

$$a_{\pi''}(F) = a_{\pi'}(F) + b_{\pi'}(I_0, F) - a_{\pi'}(I_0, F) \geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F)$$

Também pelo mesmo lema segue que

$$a_{\pi_1}(F) = a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F)$$

Entretanto, temos claramente que $a_{\pi'}(I_0, F) \leq a_{\pi_0}(I_0, F) + b_{\pi_0}(I_0, F)$.Além disso, $a_{\pi_0}(I_0, F) \leq a_{\pi_0}(I_0) = k$, dado que $A_{\pi_0}(I_0, F) \subset A_{\pi_0}(I_0)$.

Em suma,

$$
\begin{aligned}
a_{\pi''}(F) &\geq a_{\pi'}(F) - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&\geq a_{\pi_1}(F) + 2k + 1 - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&= a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F) \\
&\quad + 2k + 1 - a_{\pi'}(I_0, F) \\
&\geq a_{\pi_0}(F) + b_{\pi_0}(I_0, F) - a_{\pi_0}(I_0, F) \\
&\quad + 2k + 1 - a_{\pi_0}(I_0, F) - b_{\pi_0}(I_0, F) \\
&= a_{\pi_0}(F) - 2a_{\pi_0}(I_0, F) + 2k + 1 \\
&\geq a_{\pi_0}(F) - 2k + 2k + 1 = a_{\pi_0}(F) + 1 > a_{\pi_0}(F),
\end{aligned}
$$

contradizendo o fato de π_0 ser $F-$boa. $\square$

Referências Bibliográficas

R. Aharoni, E. C. Milner e K. Prikry. "Unfriendly partitions of a graph". Em: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 50.1 (1990), pp. 1–10. ISSN: 10960902. DOI: 10.1016/0095-8956(90)90092-E.

Saharon Shelah e E. C. Milner. "Graphs with no unfriendly partitions". Em: *A Tribute to Paul Erdos*. Ed. por A. Baker, B. Bollobás e A.Editors Hajnal. Cambridge University Press, 1990, pp. 373–384. DOI: 10.1017/CBO9780511983917.031.