Cardinais Inacessíveis

Henrique Lecco

ICMC - USP

16 de abril de 2020

Cardinais limites

Definição

Dizemos que um cardinal κ é regular quando $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Por exemplo, qualquer cardinal infinito sucessor é regular, como por exemplo ω_1.
O cardinal $\aleph_\omega$, no entanto, não é regular: $\aleph_\omega = \bigcup_{\xi \in \omega} \aleph_\xi$

Dizemos que um cardinal é limite quando não é sucessor nem zero, como ω. Um cardinal κ será limite forte quando, para todo $\alpha < \kappa$, $2^\alpha < \kappa$. Novamente, ω é limite forte.

Definição

Um cardinal regular será chamado inacessível se for não enumerável e limite forte.

Existem cardinais inacessíveis?

V_κ e H_κ

Em outras ocasiões, já usamos que H_κ, quando κ é regular, é um modelo para ZFC, menos o axioma das partes.
Se κ for inacessível, então, H_κ é um modelo para ZFC. Logo, a existência de um cardinal inacessível não pode ser provada em ZFC.

Proposição

Quando κ é incacessível, $V_\kappa = H_\kappa$.

Lembrando sobre V e H...

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$;
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$, quando β é limite.

- $H_\kappa = \{x : |\text{tr}(x)| < \kappa\}$;
- $\text{tr}(x) = \{y \in a \,:\, a = x \vee a \in \text{tr}(x)\}$.

$H_\kappa \subset V_\kappa$.
Dado $x \in H_\kappa$, $\mathrm{tr}(x) < \kappa$, logo $x \in V_{\mathrm{tr}(x)} \subset V_\kappa$.

$V_\kappa \subset H_\kappa$.
Vamos mostrar que $|V_\alpha| < \kappa$, para todo $\alpha < \kappa$.
Suponha que não. Seja β o menor cardinal tal que $|V_\beta| \geq \kappa$.

- Se β é limite, então $|V_\beta| \leq \sum_{\xi<\beta} |V_\xi| < \kappa$;
- Se β é sucessor, então $|V_\beta| = 2^{|V_\gamma|}$, para algum γ. Mas, pela hipótese de indução, $|V_\gamma| < \kappa$ e, como κ é inacessível, $2^{|V_\gamma|} < \kappa$.

Portanto, se $x \in V_\kappa$, $|x| < \kappa$. Além disso, como κ é regular, $\mathrm{tr}(x) < \kappa$. Isso pode ser visto da seguinte maneira:
$\mathrm{tr}(x) = \bigcup_{\xi \leq \mathrm{rank}(x)} tr(x) \cap V_\xi$.
Como cada nível tem menos que κ elementos, o resultado segue.

Partições e cardinais grandes

Definição

Dados α, β, $n \in \omega$ e γ, dizemos que $\alpha \to (\beta)^m_\gamma$ quando, para qualquer função $P : [\alpha]^m \to \gamma$, existir um subconjunto homogêneo de α isomorfo a β em termos de ordem.

Teorema

Ramsey

- $\forall n, r \in \omega \ \omega \to (\omega)^n_r$;
- $\forall n, k, r \in \omega \exists M \in \omega \ M \to (k)^n_r$.

Estamos interessados em trabalhar com α e γ maiores.

Teorema

$\forall n, r \in \omega \ \omega_1 \to (\omega + 1)^n_r$.

Demonstração.

Seja $P : [\omega_1]^n \to r$. Defina uma árvore $T = \langle \omega_1, \prec \rangle$ de modo que $\alpha \prec \beta$ quando:

1. $\alpha < \beta$ e
2. $\forall \bar{a} \in [\downarrow_\prec \alpha]^{n-1}\ P(\bar{a}, \alpha) = P(\bar{a}, \beta)$.

Veja que $\prec \subset <$. Logo, como ω_1 é bem ordenado por $<$, $\prec$ define uma árvore.

Todos os níveis finitos da árvore tem finitos elementos (isto é, a árvore bifurca finitamente nos níveis $< \omega$). Seja $\alpha \in \omega_1$ tal que $h(\alpha) < \omega$ e S_0 o conjunto dos sucessores de α.

Como $\downarrow \alpha$ é finito, defina $[\downarrow \alpha]^{n-1} = \{\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_k\}$.

Defina $P_i : S_0 \to r$ tal que $P_i(x) = P(\bar{a}_i, x)$. Deve existir $c_1 \in r$ tal que para infinitos elementos de S_0, $P_1(x) = c_1$. Defina $S_1 = \{x \in S_0 : P_1(x) = c_1\}$

Similarmente, dado $m \geq k$, deve existir c_m tal que $S_m = \{x \in S_{m-1} : P_m(x) = c_m\}$ é infinito. □

Demonstração.

Veja que S_k é o subconjunto de S_0 tal que, para quaisquer $n-1$ elementos $a_1, \cdots, a_{n-1}$ menores que α por $\prec$, $P(a_1, \cdots, a_{n-1}, x) = P(a_1, \cdots, a_{n-1}, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in S_k$.
Pelo que fizemos no slide anterior, S_k deveria ser não vazio. Na verdade, é infinito.
Mas se há dois elementos distintos que concordam em todo subconjunto abaixo deles, como um é menor que o outro por $<$, também deve ser que um é menor que o outro por $\prec$ (pela definição). Portanto, eles não podem estar no mesmo nível, isto é, não podem ser ambos sucessores de α.
Como todos os níveis finitos bifurcam finitamente e a árvore tem tamanho ω_1, deve haver um elemento x tal que $h(x) = \omega$. Isso significa que $\downarrow x \cup \{x\}$ tem ordem $\omega + 1$.

$\square$

Demonstração.

Precisamos mostrar que esse conjunto é homogêneo.
Primeiro, vamos mostrar que $\downarrow x$ é homogêneo. Podemos fazer por indução. Chame $\downarrow x = \langle a_i \rangle_{i<\omega}$, com $a_i \prec a_j \Leftrightarrow i < j$. Se, dado m, $\downarrow a_m$ é homogêneo, então $P(a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-1}}, a_{i_n}) = P(a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-1}}, a_m)$, quaisquer que sejam os a_{i_j}. Portanto, $\downarrow a_m \cup \{a_m\}$ é homogêneo e, assim, $\downarrow x$ é homogêneo.
O mesmo raciocínio nos mostra que $\downarrow x \cup \{x\}$ é homogêneo. $\square$

Cardinais inacessíveis e partições

Queremos estudar as relações entre propriedades de partições e inacessibilidade de cardinais. Mas especificamente, como se relacionam e as possíveis implicações.

Proposição

Se κ é inacessível, então $\kappa \to (\alpha)^2$, para qualquer $\alpha < \kappa$.

Construímos a árvore $\langle \kappa, \prec \rangle$ da mesma maneira que no resultado anterior. Vimos que os níveis finitos bifurcam finitamente. O que dizer dos níveis infinitos?

Seja $h(\alpha) = \gamma$. Não podemos ter dois sucessores de α que "concordem em cor" para todos os seus antecessores. Assim, devemos "esgotar" todas as possibilidades de $P(x, y)$, para $x \preceq \alpha$ e y sucessor de α.
Isto é, para cada y sucessor de α, devemos ter que $y \mapsto P_y \in 2^{\downarrow\alpha}$, com $P_y(x) = P(x, y)$.

Se $P_{y_1} = P_{y_2}$ e $y_1 < y_2$, isso significa exatamente que $y_1 \prec y_2$. Logo, α bifurca $\leq 2^{\gamma}$.

Portanto, até o nível γ, temos no máximo 2^γ elementos. Podemos verificar indutivamente:

Suponha que até o nível $\alpha < \gamma$ tenhamos no máximo 2^γ elementos. Se α é sucessor, $\alpha = \beta + 1$, então $\{x : h(x) = \alpha\} = \bigcup_{h(x)=\beta} \text{succ}(x)$, em que succ($x$) são os sucessores de x.
Já mostramos que succ(x) tem cardinalidade $\leq 2^\gamma$. Por hipótese, há $\leq 2^\gamma$ elementos de nível β. Logo, trata-se de uma união $\leq 2^\gamma$ de conjuntos com $\leq 2^\gamma$ elementos. Assim, $|\{x : h(x) = \alpha\}| \leq 2^\gamma$.

Suponha, agora, que α seja limite.
Então $\{x : h(x) < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} \{x : h(x) < \beta\} \leq \sum_{\alpha} 2^{\gamma} = 2^{\gamma}$.
Logo, temos no máximo 2^{γ} elementos de nível menor que α. Então, o nível α terá no máximo $2^{\gamma} \times 2^{\gamma}$ "novos" elementos.

Desse modo, como há no máximo 2^{γ} até o nível γ e $2^{\gamma} < \kappa$, pois κ é inacessível, existe um ramo de tamanho $\geq \gamma$. Como vimos, os ramos são homogêneos e assim conclui-se o resultado.

Um passo a mais

Além disso, podemos concluir mais uma propriedade caso κ tenha a *propriedade de árvore*, isto é:

Definição

Dizemos que κ tem propriedade de árvore se para toda árvore de tamanho κ que bifurca $< \kappa$ existir um ramo de altura κ.

Assim,

Teorema

Se κ é inacessível e tem propriedade de árvore, então $\kappa \to (\kappa)^2$.

Provamos da mesma maneira que o resultado anterior, mas precisamos dessa hipótese para conseguir um ramo de altura κ (não é necessariamente verdade que existe: não precisa existir um ramo da altura da árvore!)

Terminando a caracterização

Por fim, temos o teorema:

Teorema

Se $\kappa \to (\kappa)^2$, então κ é inacessível.

κ é regular.

Seja $\kappa = \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} X_\alpha$ e suponha sem perda de generalidade que os X_α são disjuntos. Defina a partição: $P : [\kappa]^2 \to 2$ de modo que

$$P(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists \alpha \, \{x, y\} \subset X_\alpha \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja M um subconjunto homogêneo de tamanho κ.
Se M é homogêneo com o valor 0, então há um conjunto com κ elementos que é uma união de $< \mathrm{cf}(\kappa)$ conjuntos $< \kappa$, o que não é possível.
Então M é homogêneo com valor 1. Isso significa que para quaisquer dois elementos de M, não há um X_α que contenha ambos.
Ou seja, $|M \cap X_\alpha| = 1$. Mas então M é uma união de $\mathrm{cf}(\kappa)$ conjuntos com 1 elemento cada, portanto $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

κ é limite forte

Seja $\delta < \kappa$ e defina uma função $h : \kappa \to 2^\delta$.
Diremos que $\gamma = \gamma(x, y)$ é a primeira diferença entre x e $y \in \kappa$ se $h(x)(\gamma) \neq h(y)(\gamma)$ e $h(x)\big|_\gamma = h(y)\big|_\gamma$.
Vamos escrever h_x para $h(x)$ (são funções $\in 2^\delta$).

Seja $x < y \in \kappa$ e defina, agora, $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} h_x(\gamma(x, y)) = 1 \\ 0 & \text{se} h_x(\gamma(x, y)) = 0 \end{cases}$
Isto é, f diz se h_x está à "direita" de h_y. Ou seja, no nível em que h_x e h_y (ramos de 2^δ) diferem pela primeira vez, quem vai para a direita.
Defina então $h_x < h_y$ se $f(x, y) = 0$. Esta é a ordem lexicográfica.

Seja M homogêneo para $f : [\kappa]^2 \to 2$.
Veja que M será exatamente um subconjunto bem ordenado de 2^δ, pois é um pedaço da ordem $<$ sobre κ.
Queremos mostrar que esse subconjunto não pode ter tamanho κ

Vamos fortalecer um pouco a hipótese e supor que δ seja o primeiro cardinal tal que $2^{\delta} > \kappa$
Então, $2^{<\delta} = \bigcup\limits_{\xi<\delta} 2^{\xi} < \kappa$, pois já temos que κ é regular.

Queremos mostrar que $M \hookrightarrow 2^{<\delta}$.
Defina $i : M \to 2^{<\delta}$, $h_x \mapsto h_x\big|_{\gamma}$, com
$\gamma = \max\{\theta : h_{\xi}(\theta) = h_{\xi}(\theta + 1)\}$.
Isto é, i corta um ramo exatamente no ponto que testemunha que o ramo está antes do próximo na ordem lexicográica. Isso também diz que i é injetor. Portanto $M \leq |2^{\delta}| < \kappa$.

Medida

Uma medida sobre um conjunto X é uma função $\mu : \wp(X) \to [0, 1]$ tal que:

- $\mu(X) = 1$;
- $\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$. quando os A_n são disjuntos.

Se a imagem de μ é $\{0, 1\}$, dizemos que μ é *booleana*.

Se $\forall x \in X\, \mu(\{x\}) = 0$, então dizemos que μ é *não-trivial*.

Medida para $\mathfrak{c}$

Teorema

Não existe uma medida booleana não trivial para 2^ω.

Veja que $2^\omega = \{f \in 2^\omega : f(0) = 0\} \cup \{f \in 2^\omega : f(0) = 1\}$.
Algum desses dois conjuntos deve ter medida 1. Defina a_0 como:

- $a_0 = 0$ se $\mu(\{f \in 2^\omega : f(0) = 0\}) = 1$;
- $a_0 = 1$ se $\mu(\{f \in 2^\omega : f(0) = 1\}) = 1$.

Considere $a_0, \ldots, a_n$ definidos. Defina, então:

- $a_{n+1} = 0$ se $\mu(\{f \in 2^\omega : f(0) = a_0, \ldots, f(n) = a_n, f(n+1) = 0\}) = 1$;
- $a_{n+1} = 1$ se $\mu(\{f \in 2^\omega : f(0) = a_0, \ldots, f(n) = a_n, f(n+1) = 1\}) = 1$;

Defina $g : \omega \to 2$
$n \mapsto a_n$

Então, $\forall n$, o conjunto $\{f \in 2^\omega : f\big|_n = g\big|_n\}$ tem medida 1.
Além disso, $F_n = \{f : f\big|_n = g\big|_n \wedge f(n) \neq g(n)\}$ tem medida 0.

Veja então, que $F_0 \cup F_1 \cup \cdots = 2^\omega \setminus \{g\}$ e tem medida 0, por σ-aditividade. Portanto, $\mu(\{g\}) = 1$ e assim μ é trivial.

Cardinais mensuráveis

Definição

Um cardinal κ é dito mensurável se admite uma medida booleana não trivial e κ-aditiva.

Teorema

Cardinais mensuráveis são inacessíveis.

Seja κ mensurável. Vamos mostrar que é regular e limite forte.

κ é regular

Suponha que não.
Então, κ é uma união de $< \kappa$ conjuntos menores que κ. Como cada um dos conjuntos é $< \kappa$, então devem ter medida nula, pela κ-aditividade e não-trivialidade.
Assim, κ também deveria ter medida nula.

κ é limite forte

Seja $\lambda < \kappa$.
Podemos seguir exatamente como na demonstração de que 2^ω não admite medida booleana não-trivial para mostrar que não há uma medida κ-aditiva para 2^λ.
Agora, se $2^\lambda \geq \kappa$, poderíamos construir para 2^λ uma medida por meio da medida de κ.
Seja $i : \kappa \to 2^\lambda$ uma injeção. Defina para $x \subset 2^\lambda$ a medida $\mu'(\{x\}) = \mu(i^{-1}(\{x\}))$.
Veja que μ' é uma medida booleana não trivial e κ-aditiva para 2^λ, uma contradição.

Cardinais mensuráveis: uma consequência

Teorema

Se existe um cardinal mensurável, então $V \neq L$.

L é o menor universo que contém todos os ordinais. Devemos mostrar que $\mu \notin L$.

Construímos o ultraproduto $\frac{V^\kappa}{\mu}$ com a relação
$f \in^* g \Leftrightarrow \mu(\{x \in \kappa : f(x) \in g(x)\}) = 1$.
Agora, transformamos esse ultraproduto em um modelo "standard" com $\pi : \frac{V^\kappa}{\mu} \to M$.

$$[f] \underset{\pi}{\mapsto} \{\pi([g]) : g \in^* f\}$$

Seja κ o primeiro cardinal mensurável e μ uma medida sobre κ.

Suponha que $\mu \in M$. Então, como M é isomorfo a $\frac{V^\kappa}{\mu}$, $\frac{V^\kappa}{\mu} \models \kappa$ é mensurável.

Em $\frac{V^\kappa}{\mu}$, κ é representado por uma função J_κ, com $J_\kappa(\alpha) \leq \alpha$. Logo, $\mu(\{\alpha < \kappa : J(\alpha)$ é mensurável$\}) = 1$

Mas κ era o primeiro cardinal mensurável, logo isso é uma contradição. Portanto, $\mu \notin M$ e assim $M \not\models \kappa$ é mensurável.