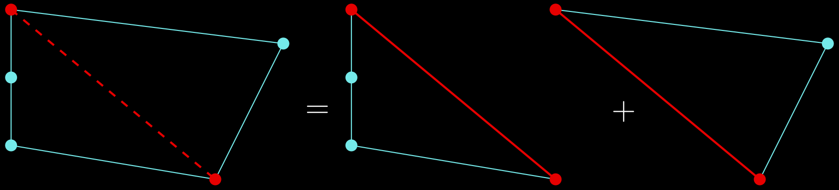
Espaço de Extremidades Parte 2

Gustavo Henrique Boska Labegalini

Árvores de Extensão $\rightarrow$ Árvores Geradoras (BR)

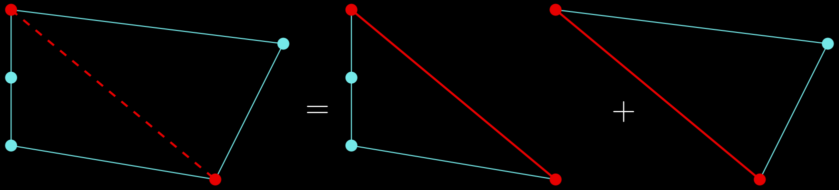
Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.



Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.
- Encontrou-se bases interessantes para este espaço.

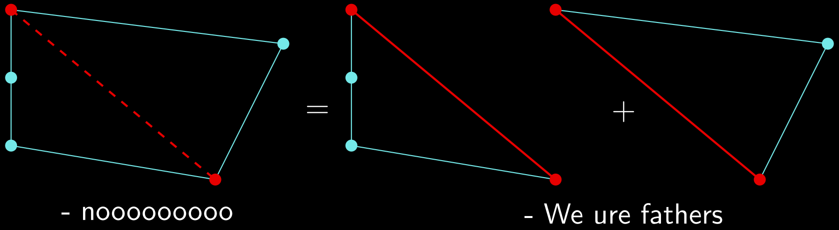


- nooooooooo

- We ure fathers

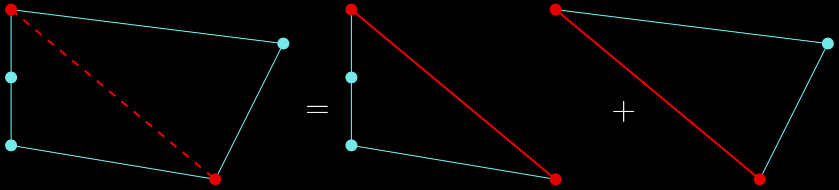
Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.
- Encontrou-se bases interessantes para este espaço.
- Ciclos fundamentais de árvores geradoras se mostraram bases



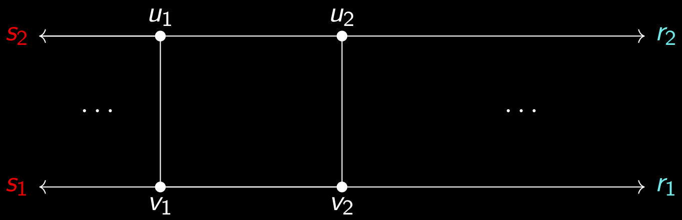
Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.
- Encontrou-se bases interessantes para este espaço.
- Ciclos fundamentais de árvores geradoras se mostraram bases
- Vale para grafos infinitos?



Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.
- Encontrou-se bases interessantes para este espaço.
- Ciclos fundamentais de árvores geradoras se mostraram bases
- Vale para grafos infinitos?
- Arestas em infinitos ciclos!?



Em episódios anteriores

- O protagonista: $\mathcal{C}(G) \leq 2^{E(G)}$ espaço de ciclos.
- Encontrou-se bases interessantes para este espaço.
- Ciclos fundamentais de árvores geradoras se mostraram bases
- Vale para grafos infinitos?
- Arestas em infinitos ciclos!?

Definição (Famílias Magras de Circuitos)

Seja $\{C_i\}_{i \in I}$ família de circuitos, ela é dito **magra** *se toda aresta $e \in E(G)$ está em finitos circuitos C_i.*

Espaço topológico $|G|$

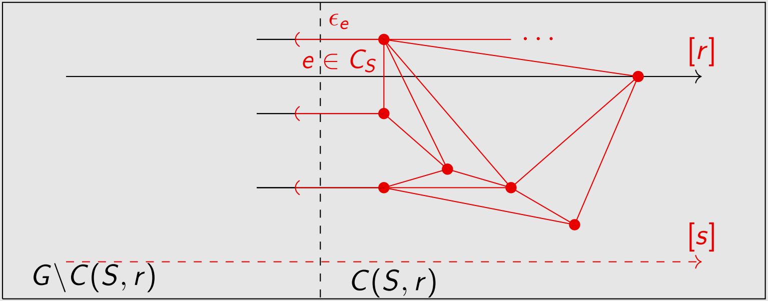
- Por que cópias de $[0, 1]$?

Espaço topológico $|G|$

- Por que cópias de $[0,1]$?
- Por que intervalos semi abertos?

Definição (Aberto básico de extremidade)

$V_{S,\epsilon_{e\in C_S}}([r])$,

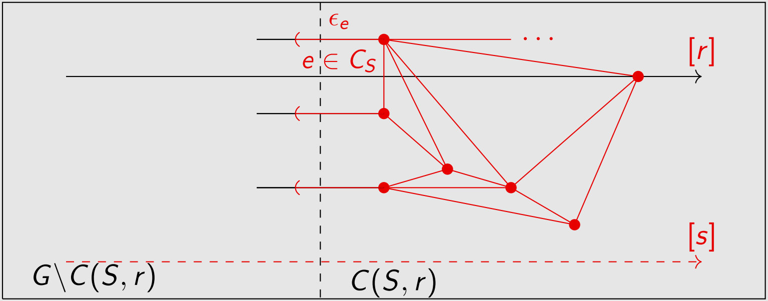


Espaço topológico $|G|$

- Por que cópias de $[0, 1]$?
- Por que intervalos semi abertos?

Definição (Aberto básico de extremidade)

$V_{S,\epsilon_{e \in C_S}}([r])$, *localmente finito* $\implies$ *considerar todos os* ϵ_e *iguais daria na mesma!*

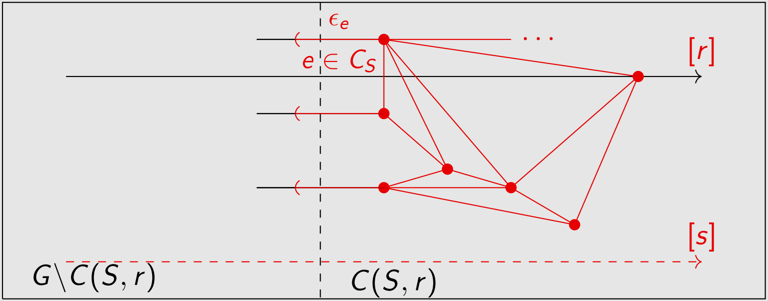


Espaço topológico $|G|$

- Por que cópias de $[0,1]$?
- Por que intervalos semi abertos?

Definição (Aberto básico de extremidade)

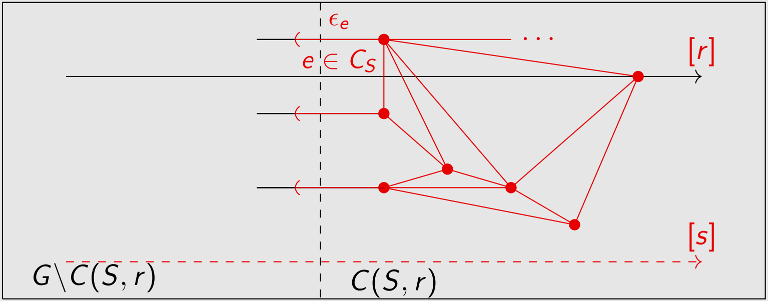
$V_{S,\epsilon_{e \in C_S}}([r])$, *localmente finito* $\implies$ *considerar todos os* ϵ_e *iguais daria na mesma!*



- Por que cópias de $[0,1]$?
- Por que intervalos semi abertos?
- Por que extremidades?

Definição (Aberto básico de extremidade)

$V_{S,\epsilon_{e\in C_S}}([r])$, *localmente finito* $\implies$ *considerar todos os* ϵ_e *iguais daria na mesma!*



Círculos e Circuitos

Definição (Círculos e Circuitos)

Círculos *são cópias de* $\mathbb{S}^1$ *como subespaços de* $|G|$*.* **Circuitos** *são conjuntos de arestas de círculos.*

Círculos e Circuitos

Definição (Círculos e Circuitos)

***Círculos** são cópias de $\mathbb{S}^1$ como subespaços de $|G|$. **Circuitos** são conjuntos de arestas de círculos.*

Definição (Espaço de Circuitos para Grafos Infinitos)

O espaço $\mathcal{C}(G)$ é o espaço gerado por famílias $\{\chi_{C_i}\}_{i\in I}$ de características de famílias magras de circuitos $\{C_i\}_{i\in I}$.

Teorema Caso Finito

Teorema ( )

Seja G conexo e $T \leq G$ árvore geradora de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Generalização do Teorema

Teorema (Caso Infinito)

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Teorema

Teorema (Caso Infinito)

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Teorema

Seja G conexo localmente finito então G tem árvore geradora fiel.

Teorema

Teorema (Caso Infinito)

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Teorema

Seja G conexo localmente finito então G tem árvore geradora fiel.

Está na parte de metrizabilidade no site em Teorema de Jung + Propriedades de árvores normais

Note que arestas e são também subespaços $e_{|G|} \subset |G|$ cópias do intervalo unitário.

Note que arestas e são também subespaços $e_{|G|} \subset |G|$ cópias do intervalo unitário.

Particionando os vértices em $V(G) = V_1 \sqcup V_2$, tome D arestas ligando V_1 à V_2 é chamado de **corte** dessa partição,

Note que arestas e são também subespaços $e_{|G|} \subset |G|$ cópias do intervalo unitário.

Particionando os vértices em $V(G) = V_1 \sqcup V_2$, tome D arestas ligando V_1 à V_2 é chamado de **corte** dessa partição,note que se G é conexo $G \backslash D$ terá duas componentes conexas $G[V_1], G[V_2]$.

Ciclos que vão voltam

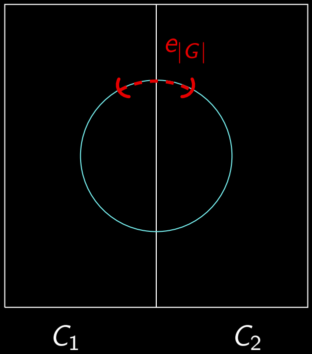
Considere C um círculo de $|G|$

Ciclos que vão voltam

Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.

Ciclos que vão voltam

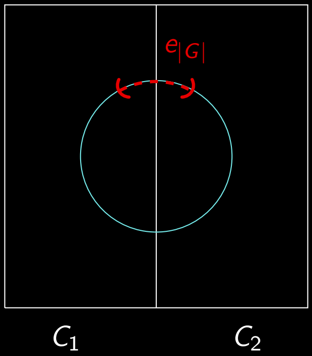
Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.



Suponha $\{e\} = E(C) \cap E(D)$.

Ciclos que vão voltam

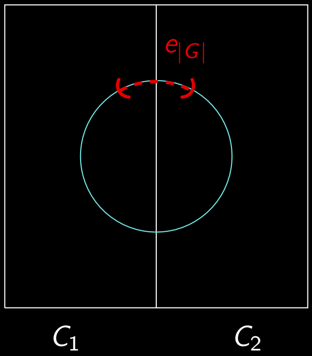
Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.



Note que $e_{|G|} \doteq \pi(\{e\} \times (0,1))$ será subespaço de C homeomorfo a um intervalo

Ciclos que vão voltam

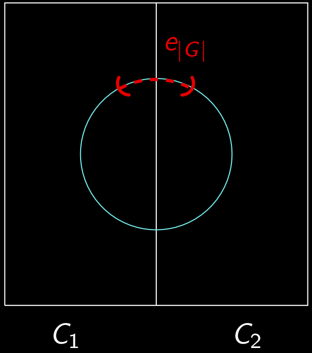
Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.



então, dada $\phi : \mathbb{S}^1 \to C$, $\phi^{-1}(e_{|G|})$ é um conexo aberto de $\mathbb{S}^1$, logo intervalo aberto.

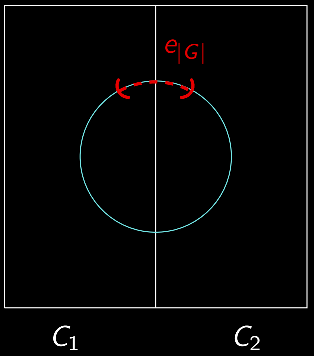
Ciclos que vão voltam

Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.



O complementar desse intervalo sera conexo e portanto deve estar contido numa componente conexa, mas os vértices incidentes de e testemunham o contrário.

Considere C um círculo de $|G|$ e D um corte finito, gostaríamos de mostrar que $|E(C) \cap E(D)|$ é par.



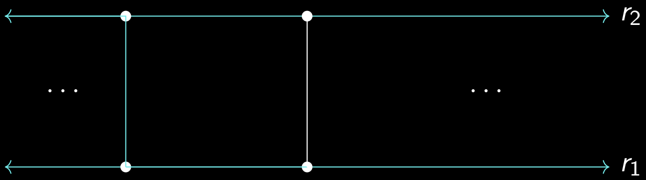
O caso geral seria análogo trocando-se 'um intervalo' por 'reunião disjunta de intervalos'.

Considere $S \leq G$, note que raios de S são raios de G.

Considere $S \leq G$, note que raios de S são raios de G. Note que $r \sim s$ então $r \sim s$ mas o contrário não é verdade:

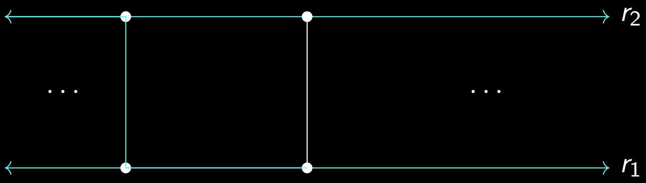
Subgrafos Fiéis

Considere a escada infinita, $r_1 \sim r_2$, mas $r_1 \not\approx r_2$.



Subgrafos Fiéis

Considere a escada infinita, $r_1 \sim r_2$, mas $r_1 \not\sim r_2$.

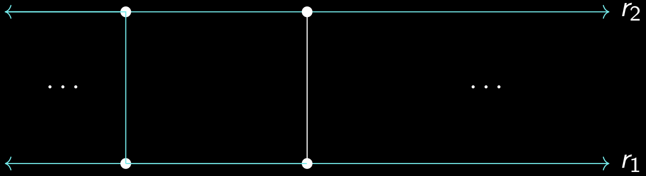


Definição

Um subgrafo é **fiel** *se ele sabe identificar raios iguais de G.*

Subgrafos Fiéis

Considere a escada infinita, $r_1 \sim r_2$, mas $r_1 \not\sim r_2$.

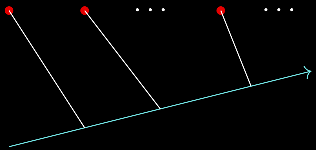


Definição

Um subgrafo é **fiel** *se ele sabe identificar raios iguais de* G.

$[r] \neq [s] \implies [r] \neq [s]$

Pentes



Pentes são $p = (r, (c_d)_{d \in D})$ um raio com infinitos caminhos (espinhas) terminando em dentes.

Lemas 'chatos'

Vamos 'esconder' algumas tecnicalidades dentro destes lemas:

Lemas 'chatos'

Vamos 'esconder' algumas tecnicalidades dentro destes lemas:

Lema (Lema dos Pentes)

Seja G conexo e localmente finito e $D \subset V(G)$ conjunto infinito de vértices, de fato existe um pente de G cujos dentes estão em D.

Vamos 'esconder' algumas tecnicalidades dentro destes lemas:

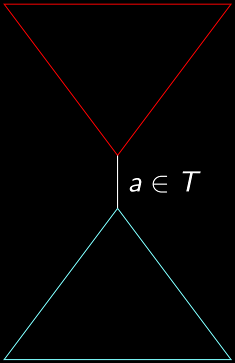
Lema (Lema dos Pentes)

Seja G conexo e localmente finito e $D \subset V(G)$ conjunto infinito de vértices, de fato existe um pente de G cujos dentes estão em D.

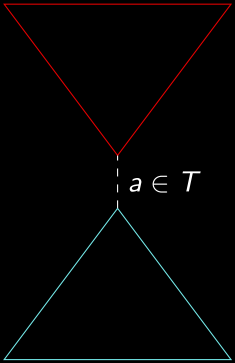
Lema

Seja $\overline{E}$ família infinita arestas de G localmente finito, deve haver subfamília $F \subset \overline{E}$ **infinita** *de arestas tais que $a, b \in F$ distintos não têm vértices incidentes em comum.*

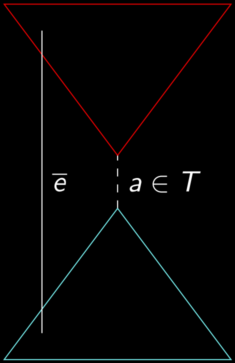
Propriedade de Árvore Geradora



Propriedade de Árvore Geradora



Propriedade de Árvore Geradora

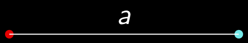


Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros

Proposição

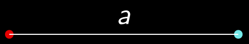
Seja $T \leq G$ árvore geradora fiel de G localmente finito, então $\{C_e\}_{e \in E(G) \setminus E(T)}$ é família magra de circuitos.

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



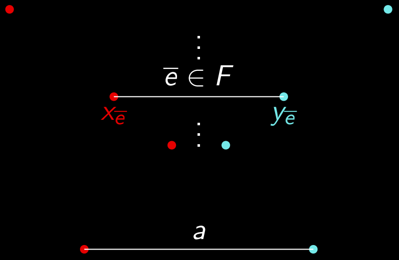
Seja $a \in E(T)$ e tome $F_a \doteq \{\overline{e} \,:\, a \in E(C_{\overline{e}})\}$,

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



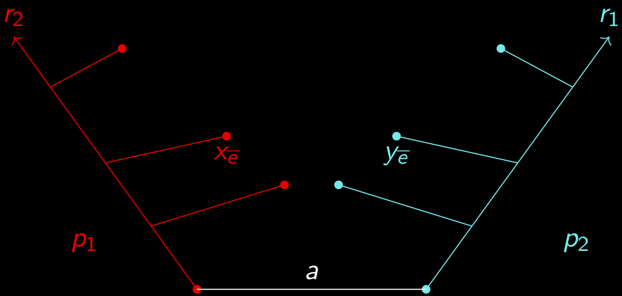
Seja $a \in E(T)$ e tome $F_a \doteq \{\overline{e} : a \in E(C_{\overline{e}})\}$, Suponha que o teorema é falso e F_a infinito, tome subfamília infinita de F com vértices incidentes disjuntos

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



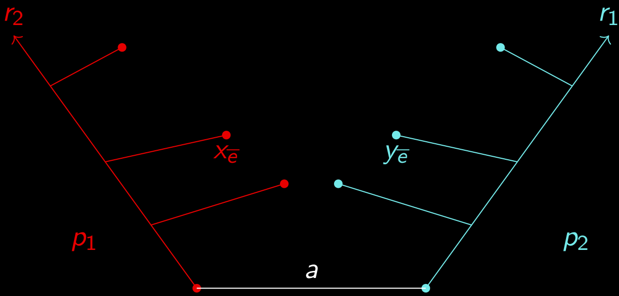
Nesse caso, cada $\overline{e} \in F$ tem uma extremidade numa componente de $T \setminus \{a\}$ e ou extremidade na outra.

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



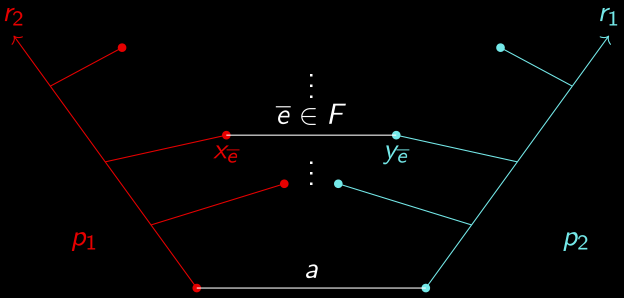
Use o lema dos pentes e construa um pente em uma componente com dentes $x_{\overline{e}}$. Analogamente temos outro pente na outra componente com dentes $y_{\overline{e}}$.

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



Note que os raios dos pentes não são identificados pela árvore

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros



Mas são identificados pelo grafo original, contrariando fidelidade de T.

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros

Se $a \in E(G) \backslash E(T)$, então $F_a = \{a\}$ é finito.

Circuitos Fundamentais de Árvores Fiéis são Magros

Proposição

Seja $T \leq G$ árvore geradora fiel de G localmente finito, então $\{C_e\}_{e \in E(G) \setminus E(T)}$ é família magra de circuitos.

Generalização do Teorema

Teorema

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in E(C) \setminus E(T)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in E(C) \setminus E(T)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

Já mostramos que a soma anterior faz sentido, visto que $\{C_e\}_{e \in E(G) \setminus E(T)}$ é magra. □

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in E(C) \setminus E(T)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

Dada χ_C definida acima, precisamos mostrar que, de fato, $\chi_C(e) = 1 \iff e \in E(C)$. □

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e}\in E(C)\setminus E(T)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

Seja $e \in E(G)$, como a família de circuitos fundamentais é magra temos $e \in C_{\overline{e}}$ $\overline{e} \in F_e$ com F_e finita,

□

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in E(C) \setminus E(T)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

Seja $e \in E(G)$, como a família de circuitos fundamentais é magra temos $e \in C_{\overline{e}}$ $\overline{e} \in F_e$ com F_e finita, note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)| \mod 2$. $\square$

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

Seja $e \in E(G)$, como a família de circuitos fundamentais é magra temos $e \in C_{\overline{e}}$ $\overline{e} \in F_e$ com F_e finita, note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)| \mod 2$. □

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

- Seja $e \notin E(T)$, então $F_e = \{e\}$:
  -
  -
-
  -
  - ,

$\square$

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

- Seja $e \notin E(T)$, então $F_e = \{e\}$:
  - Se $e \in E(C)$ então $|F_e \cap E(C)| = |\{e\}| = 1$ que é ímpar.
  -
-
  -
  - ,

□

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

- Seja $e \notin E(T)$, então $F_e = \{e\}$:
  - Se $e \in E(C)$ então $|F_e \cap E(C)| = |\{e\}| = 1$ que é ímpar.
  - Se $e \notin E(C)$ teremos $|F_e \cap E(C)| = |\emptyset| = 0$.
-
  -
  - ,

$\square$

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

- Seja $e \notin E(T)$, então $F_e = \{e\}$:
  - Se $e \in E(C)$ então $|F_e \cap E(C)| = |\{e\}| = 1$ que é ímpar.
  - Se $e \notin E(C)$ teremos $|F_e \cap E(C)| = |\emptyset| = 0$.
-
  -
  - ,

$\square$

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
    -
    -
- Seja $e \in E(T)$, considere as duas componentes conexas de $T \backslash \{e\}$, note que $F_e \sqcup \{e\}$ é exatamente o corte entre estas componentes,
    -
    - ,

□

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
    -
    -
- portanto C intercepta $F_e \sqcup \{e\}$ um número par de vezes,
    -
    - ,

$\square$

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
  -
  -
  - logo $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)|$ é par:
    -
    - ,

$\square$

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
    -
    -
- logo $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)|$ é par:
    - Se $e \in E(C)$ então $|F_e \cap E(C)|$ é impar, logo $\chi_C(e) = 1$.
    - ,

□

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
    -
    -
- logo $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)|$ é par:
    -
    - Se $e \notin E(C)$ então $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)| = |F_e \cap E(C) \sqcup \emptyset| = |F_e \cap E(C)|$ é par, logo $\chi_C(e) = 0$.

□

Generalização do Teorema

Teorema

De fato, seja C círculo:

$$\chi_C \doteq \sum_{\overline{e} \in F_e \cap E(C)} \chi_{C_{\overline{e}}}$$

Demonstração.

note que $\chi_C(e) = |F_e \cap E(C)|$ mod 2.

-
  -
  -
- logo $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)|$ é par:
  -
  - Se $e \notin E(C)$ então $|(F_e \sqcup \{e\}) \cap E(C)| = |F_e \cap E(C) \sqcup \emptyset| = |F_e \cap E(C)|$ é par, logo $\chi_C(e) = 0$.

$\square$