Espaço de Extremidades

Gustavo Henrique Boska Labegalini

Grafos

Definição (Categoria de Grafos)

Um **grafo direcionado** *é uma tripla* $G = (E, V,\ i : E \to V^2)$ *com conjunto aresta* E*, conjunto vértices* V *e função de incidência* i

Grafos

Definição (Categoria de Grafos)

Um **grafo direcionado** *é uma tripla* $G = (E, V,\ i : E \to V^2)$ *com conjunto aresta* E*, conjunto vértices* V *e função de incidência* i

$$\xrightarrow{\qquad e \in E(G) \qquad}$$

Grafos

Definição (Categoria de Grafos)

Um **grafo direcionado** *é uma tripla* $G = (E, V,\ i : E \to V^2)$ *com conjunto aresta* E*, conjunto vértices* V *e função de incidência* i

$$\xrightarrow[i(e)=(x,y)]{e \in E(G)}$$

Grafos

Definição (Categoria de Grafos)

Um **grafo direcionado** *é uma tripla* $G = (E, V,\ i : E \to V^2)$ *com conjunto aresta* E*, conjunto vértices* V *e função de incidência* i

$$x \in V(G) \xrightarrow[i(e)=(x,y)]{e \in E(G)} y \in V(G)$$

Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

Subgrafos $G' \leq G$ *de* $G = (E, V, i)$ *são* $G' = (E', V', i)$ *com* $E' \subset E$ *e* $V' \subset V$ *fechados com relação a* i.

Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

Alternativamente, podemos tomar $V' \subset V$ e tomar $E' \subset E$ arestas incidentes em vértices de V', obtendo $G[V'] \doteq (V', E', i)$ chamado **grafo induzido por** V'.

Subgrafos

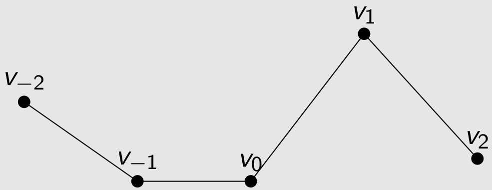
Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

Está clara a definição de **reunião** *e* **intersecção** *de subgrafos.*

Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

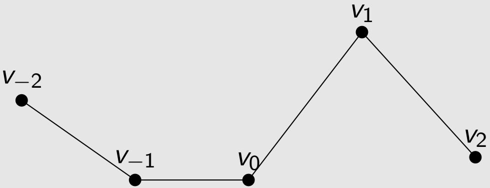
Caminhos *são subgrafos r cujo conjunto de vértices é imagem de sequência* $n \mapsto v_n \in V(r) \subset V(G)$ *injetora.*



Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

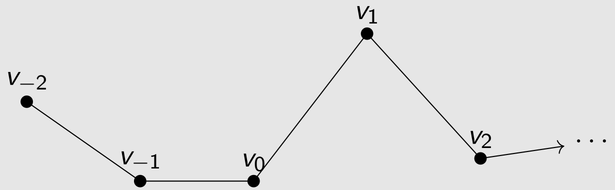
Caminhos *são subgrafos r cujo conjunto de vértices é imagem de sequência* $n \mapsto v_n \in V(r) \subset V(G)$ *injetora. Se* $|n| \leq m \in \mathbb{N}$ *dizemos que este é um* **caminho finito**,



Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

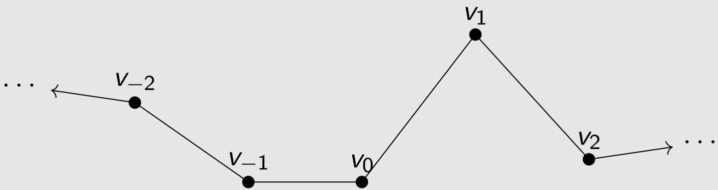
Caminhos *são subgrafos r cujo conjunto de vértices é imagem de sequência* $n \mapsto v_n \in V(r) \subset V(G)$ *injetora. Se* $n \in \mathbb{N}$ *que é um* **raio**



Subgrafos

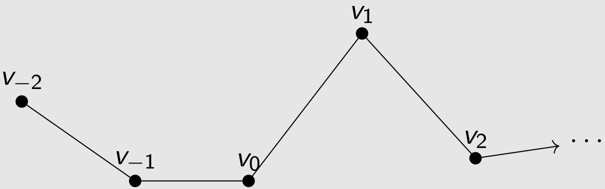
Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

Caminhos *são subgrafos r cujo conjunto de vértices é imagem de sequência $n \mapsto v_n \in V(r) \subset V(G)$ injetora. se $n \in \mathbb{Z}$ que é um* **raio duplo**.



Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

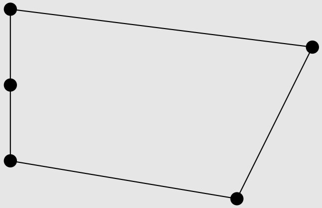


Subgrafos de raios que são raios, ou seja, sub-raios, são ditos **caudas** *do raio original.*

Subgrafos

Definição (Subgrafos, caminhos, ciclos e raios)

Um ciclo é um caminho finito c fechado, ou seja, $V(c) = \{v_n\}_{n<m}$ *tal que* $v_0 = v_{m-1}$.



Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Um caminho entre $A \subset V$ e $B \subset V$ subconjuntos de vértices é um caminho finito cujo primeiro vértice é de A e o último é de B.

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Um grafo é dito **conexo** *se existe caminho finito entre quaisquer* $v_1, v_2 \in V(G)$.

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Componente conexa de $v \in V(G)$ *é subgrafo induzido por vértices que podem ser alcançados via caminho finito.*

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Note que retirando arestas ou vértices de G o número de componentes conexas tende a aumentar

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

$$\Pi_0(G \backslash V),\, \Pi_0(G \backslash E) \geq \Pi_0 G$$

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Particionando os vértices em $V(G) = V_1 \sqcup V_2$, tome D arestas ligando V_1 à V_2 é chamado de **corte** *dessa partição,*

Conexidade

Definição (Conexidade, separadores)

Particionando os vértices em $V(G) = V_1 \sqcup V_2$, tome D arestas ligando V_1 à V_2 é chamado de **corte** *dessa partição,note que se G é conexo $G \backslash D$ terá duas componentes conexas $G[V_1], G[V_2]$.*

Árvores Geradoras

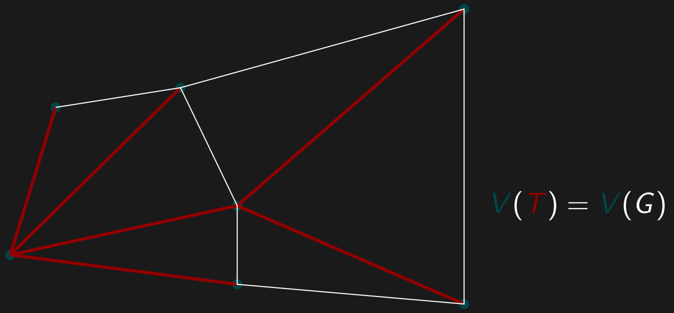
Definição (Árvore geradora)

Uma **árvore geradora***(***spanning tree***) de uma grafo G é um subgrafo* $T \leq G$ *que é uma árvore e é tal que* $V(T) = V(G)$.

Árvores Geradoras

Definição (Árvore geradora)

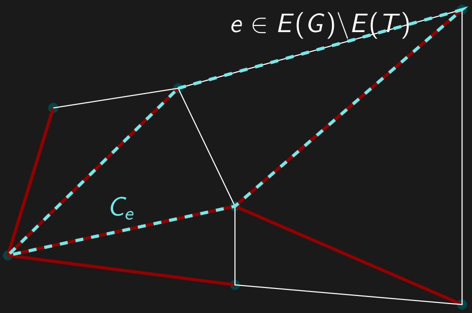
Uma **árvore geradora(spanning tree)** *de uma grafo G é um subgrafo $T \leq G$ que é uma árvore e é tal que $V(T) = V(G)$.*



Árvores Geradoras

Definição (Árvore geradora)

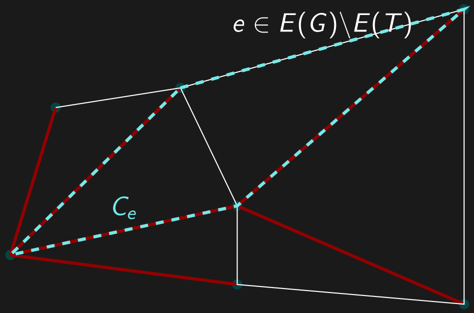
Uma **árvore geradora(spanning tree)** *de uma grafo G é um subgrafo $T \leq G$ que é uma árvore e é tal que $V(T) = V(G)$.*



$V(T) = V(G)$

Note que adicionando $e \notin E(T)$ temos **exatamente** um ciclo $C_e \subset T \sqcup \{e\}$

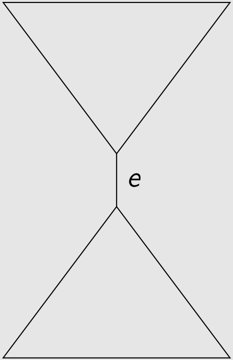
Árvores Geradoras



$V(T) = V(G)$

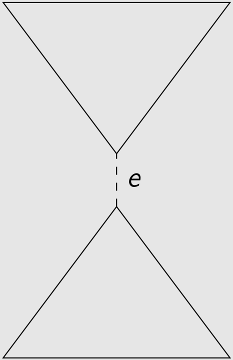
Chamaremos de **ciclo fundamental de** e **com relação à** T.
Todo grafo conexo tem um árvore geradora.

Proposição (Propriedade de Árvore Geradora)



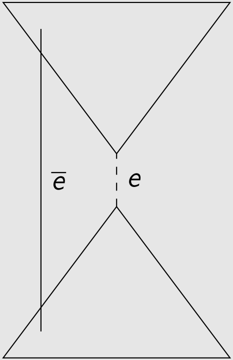
Tome e aresta de uma árvore geradora.

Proposição (Propriedade de Árvore Geradora)



Retire e de T, formando duas componentes conexas C_1 e C_2 de $T \setminus \{e\}$, cada uma contendo uma extremidade de e.

Proposição (Propriedade de Árvore Geradora)



Os elementos $\overline{e}$ tais que $e \in C_{\overline{e}}$ são exatamente elementos do corte entre as componentes, tirando o próprio e.

Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

Subconjuntos de arestas $S \in \mathcal{P}(E) \approx 2^E$ *podem ser associados com suas características* $\chi_S : E \to \{0,1\}$.

Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

Dando à $\{0,1\}$ *a estrutura de corpo* $\mathbb{F}_2$, 2^E *se torna* $\mathbb{F}_2$*-espaço vetorial.*

Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

Note que $\chi_{S_1} + \chi_{S_2} = \chi_{S_1 \Delta S_2}$

Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

O **espaço de ciclos** *é o subespaço* $\mathcal{C}(G) \leq 2^E$ *gerado pelas funções características de circuitos de* G.

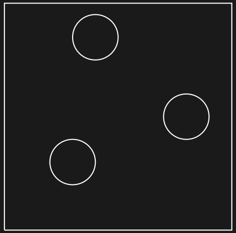
Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

O **espaço de ciclos** *é o subespaço* $\mathcal{C}(G) \leq 2^E$ *gerado pelas funções características de circuitos de* G.

A cara desse espaço é a reunião disjunta de círculos de G.

G

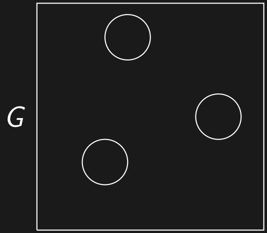


Espaço de Ciclos de Grafos Finitos

Definição (Espaço de Ciclos de Grafos finitos)

O **espaço de ciclos** *é o subespaço* $\mathcal{C}(G) \leq 2^E$ *gerado pelas funções características de circuitos de* G*.*

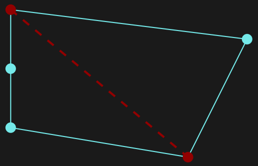
A cara desse espaço é a reunião disjunta de círculos de G.



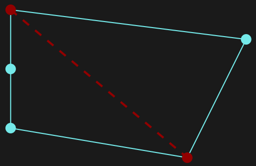
Teorema (Uma direção não terá demonstração)

Estes são exatamente os conjuntos que intersectam todo corte em um número **par** *de arestas.*

Conjuntos geradores

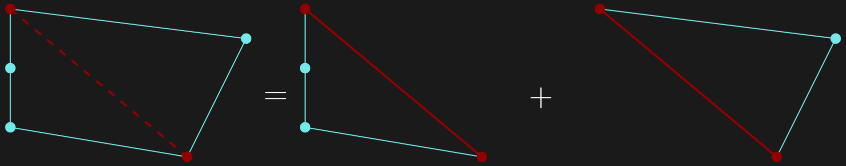


Conjuntos geradores



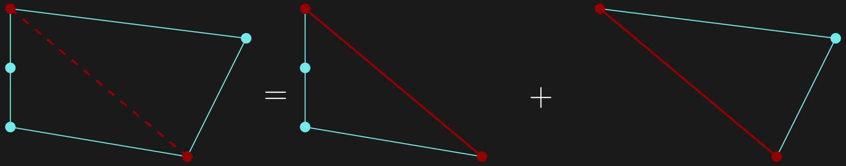
Um circuito, uma corda

Conjuntos geradores



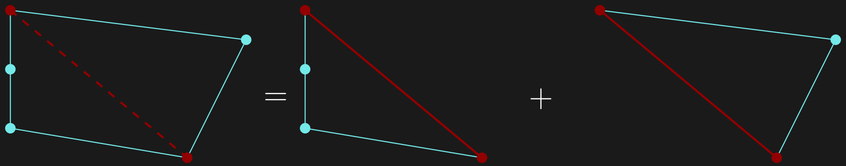
e uma combinação linear de dois dando outro circuito.

Conjuntos geradores



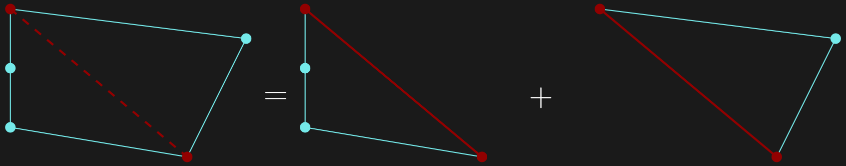
Problemas de equacionamento com leis de Kirchhof.

Conjuntos geradores



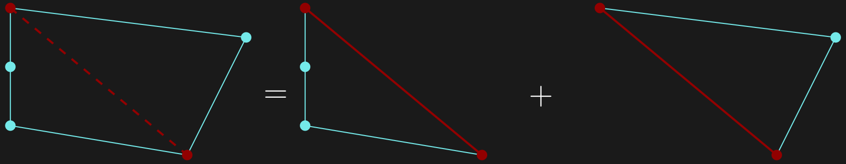
Dado um elemento no espaço de ciclos, note que se ele tem **uma** corda, podemos decompô-lo como soma de dois ciclos sem corda alguma

Conjuntos geradores



Se houver um com mais de uma corda, podemos decompô-lo como a soma de um ciclos com menos cordas.

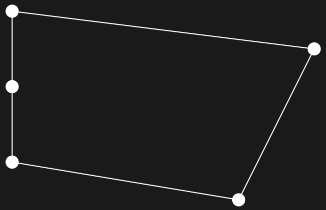
Conjuntos geradores



Ciclos sem cordas geram todo o espaço de ciclos $\mathcal{C}(G)$.

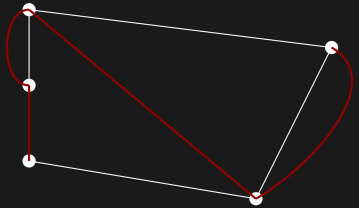
Geradores de $\mathcal{C}(G)$

Considere T uma árvore geradora e C um ciclo sem corda



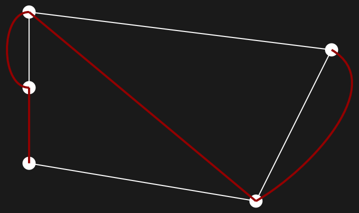
Geradores de $\mathcal{C}(G)$

Considere $S \doteq T[V(C)]$.



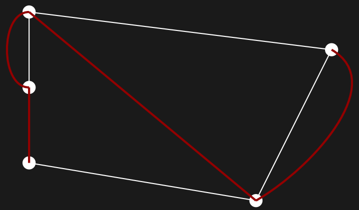
Geradores de $\mathcal{C}(G)$

Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



Geradores de $\mathcal{C}(G)$

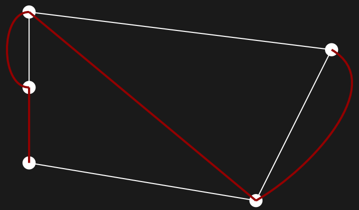
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



- Não fosse $S \leq C$ encontraríamos corda trivial (uma aresta).
-

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

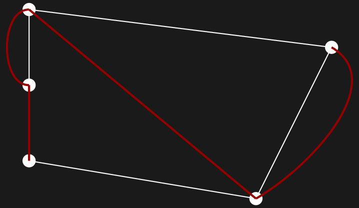
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
    -
    -
        -
        -

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

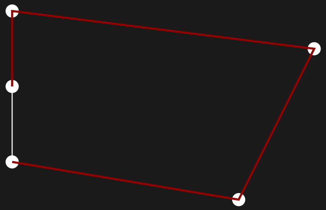
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
  - $\deg_S(x) \leq \deg_C(x) = 2.$
  -
    -
    -

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

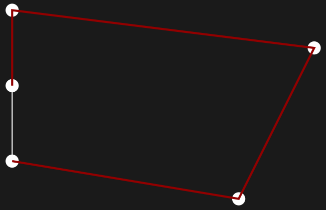
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
  -
  - Nesse caso $S = c_{x,y}$ é único T-caminho entre dois vértices $x, y \in V(C)$:
    -
    -

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

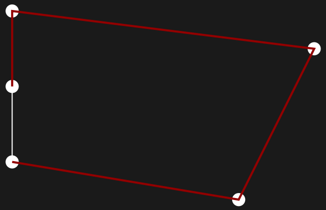
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
  -
  - Nesse caso $S = c_{x,y}$ é único T-caminho entre dois vértices $x, y \in V(C)$:
    - Deve haver caminho c' disjunto conectando x e y em $E(C) \setminus E(T)$ caso contrário T teria ciclo.
    -

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

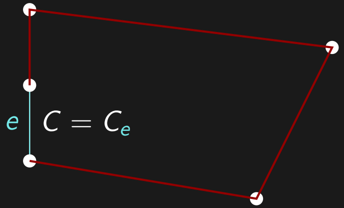
Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
  -
  - Nesse caso $S = c_{x,y}$ é único T-caminho entre dois vértices $x, y \in V(C)$:
    -
    -

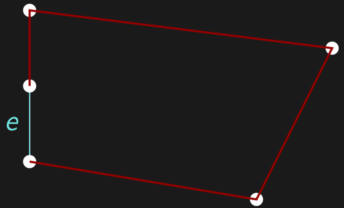
Geradores de $\mathcal{C}(G)$

Note que $S \leq T$ é conexo , não tem ciclos e tem todos os vértices de C.



-
- Nesse caso $S \leq C$:
  -
  - Nesse caso $S = c_{x,y}$ é único T-caminho entre dois vértices $x, y \in V(C)$:
    -
    - Mas S tem todos os vértices de C, então $C = C_e$.

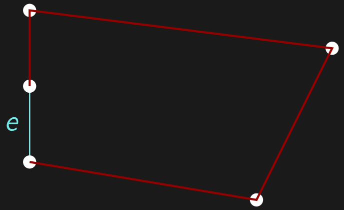
Geradores de $\mathcal{C}(G)$



Teorema (Base de Circuitos no caso Finito)

Seja T árvore geradora de G, o espaço de ciclos é gerado pelas características de ciclos fundamentais de T.

Geradores de $\mathcal{C}(G)$

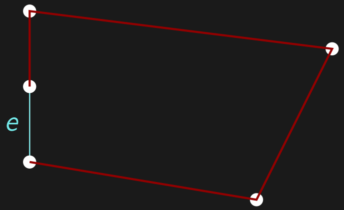


$$\mathcal{C}(G) = \langle\{\chi_{C_e} : e \in E(G) \backslash E(T)\}\rangle$$

Teorema (Base de Circuitos no caso Finito)

Seja T árvore geradora de G, o espaço de ciclos é gerado pelas características de ciclos fundamentais de T.

Geradores de $\mathcal{C}(G)$



$$\mathcal{C}(G) = \langle\{\chi_{C_e} : e \in E(G)\backslash E(T)\}\rangle$$

Teorema (Base de Circuitos no caso Finito)

Seja T árvore geradora de G, o espaço de ciclos é gerado pelas características de ciclos fundamentais de T.

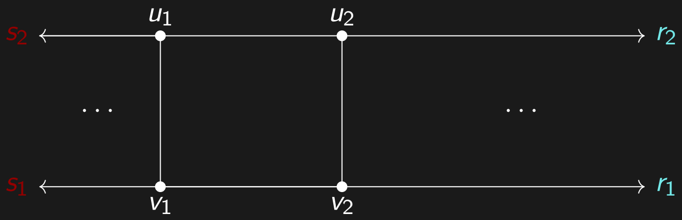
Vale pra grafos infinitos?

Problemas

Arestas pertencendo a infinitos ciclos.

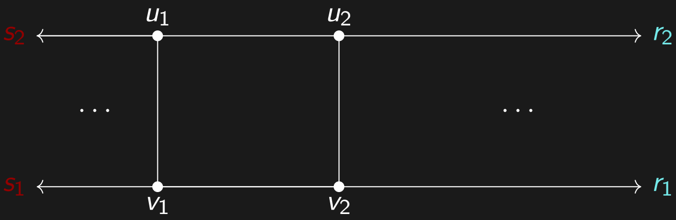
Problemas

Arestas pertencendo a infinitos ciclos.



Problemas

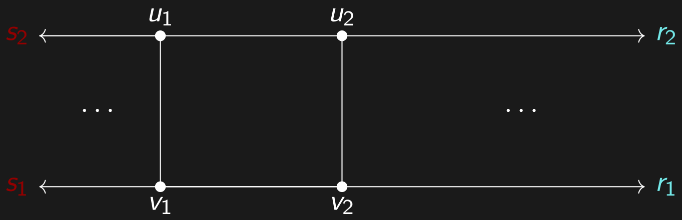
Arestas pertencendo a infinitos ciclos.



$\sum_{i \in \mathbb{N}} 1 =!?.$

Problemas

Arestas pertencendo a infinitos ciclos.

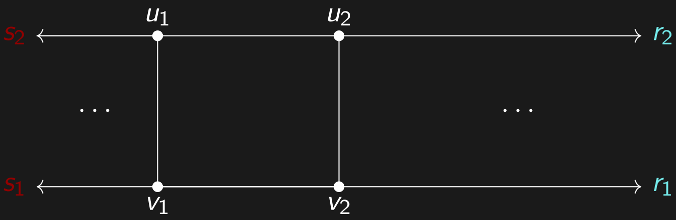


Definição (Famílias Magras de Circuitos)

Seja $\{C_i\}_{i \in I}$ família de circuitos, ela é dito **magra** *se toda aresta $e \in E(G)$ está em finitos circuitos C_i.*

Problemas

Arestas pertencendo a infinitos ciclos.



Definição (Famílias Magras de Circuitos)

Seja $\{C_i\}_{i\in I}$ família de circuitos, ela é dito **magra** *se toda aresta $e \in E(G)$ está em finitos circuitos C_i.*

Problemas

Arestas pertencendo a infinitos ciclos.

Problemas com dualidade...

Extremidades

Considere r um raio e S conjunto finito de vértices, tome $C(S, r)$ uma componente conexa de $G \backslash S$ que contém uma cauda de r.

Extremidades

Fossem C_1 e C_2 duas componentes contendo $\overline{r}$ e $\tilde{r}$ caudas de r

Extremidades

Fossem C_1 e C_2 duas componentes contendo $\bar{r}$ e $\tilde{r}$ caudas de r teríamos absurdo pois $\bar{r} \leq \tilde{r}$ ou $\tilde{r} \leq \bar{r}$

Extremidades

Logo todo raio tem uma função $S \mapsto C(S, r)$ **bem definida**.

Extremidades

Definição (Equivalência entre raios)

Considere r, s raios, dizemos que $r \sim s \iff C(\cdot, r) = C(\cdot, s)$.

Extremidades

Definição (Equivalência entre raios)

Considere r, s raios, dizemos que $r \sim s \iff C(\cdot, r) = C(\cdot, s)$.

É equivalência. Intuitivamente, raios são equivalentes se estão infinitamente / co-finalmente embaraçados.

Extremidades

Definição (Equivalência entre raios)

Considere r, s *raios, dizemos que* $r \sim s \iff C(\cdot, r) = C(\cdot, s)$.

Definição (Conjunto de extremidades)

Seja $\mathcal{R}$ *o conjunto de raios de* G*, vamos definir* $\Omega(G) = \mathcal{R}/\sim$ *como sendo* **o conjunto de extremidades** $[r]$ *de* G.

Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Dado G um grafo, vamos construir um espaço topológico $|G|$.

Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

(i) *[Topologia de 1-complexo] Cada aresta é cópia de* $[0,1]$*. Identificamos um vértice incidente com* 0 *e o outro com* 1*, obtendo o espaço* $M(G)$*.*

Espaço topológico $|G|$

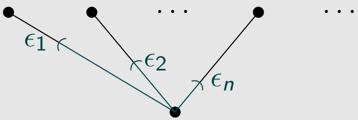
Definição (Espaço $|G|$)

(ii) *Considere agora* $|G| \doteq M(G) \sqcup \Omega(G)$.

Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

(*ii*) *Considere agora* $|G| \doteq M(G) \sqcup \Omega(G)$. *Note que* $M(G)$ *já tem sistema de vizinhanças.*



Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e\in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

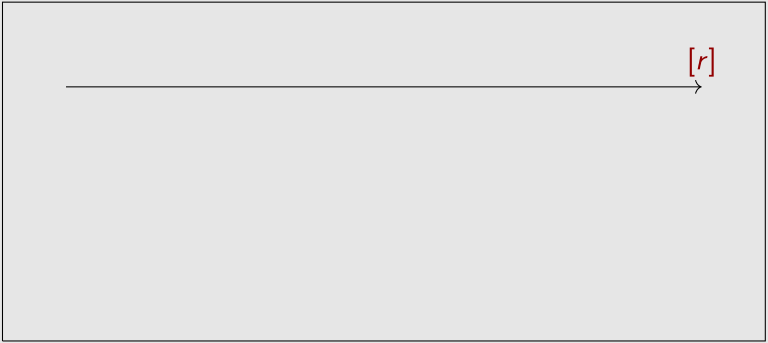
Claro, $[r]$ *está em sua vizinhança básica*

Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

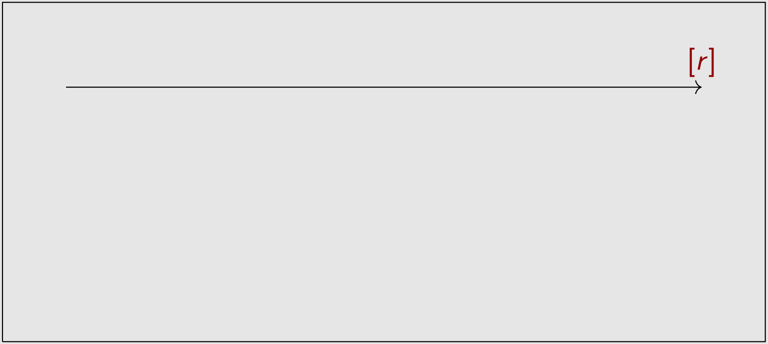
Claro, $[r]$ *está em sua vizinhança básica*



Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

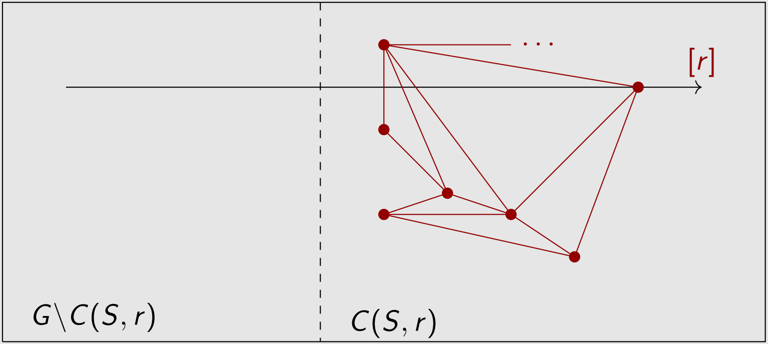
Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.
Seja S *conjunto finito de vértices, devemos ter* $C(S,[r])$ *componente conexa de* $G \setminus S$ *que contém cauda de* r.



Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e\in C_S}}([r])$ *de* $[r]$*.*
Seja S *conjunto finito de vértices, devemos ter* $C(S,[r])$ *componente conexa de* $G\backslash S$ *que contém cauda de* r*.*

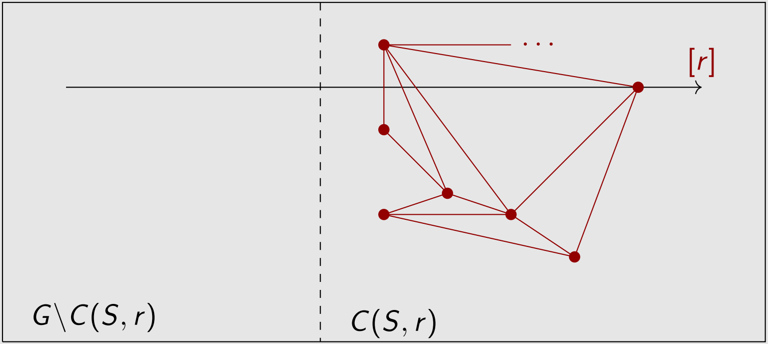


Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

Acrescente extremidades $[s]$ *com cauda na mesma componente.*

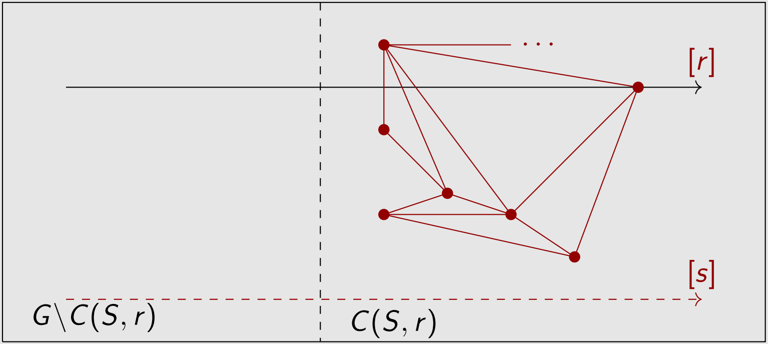


Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e\in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

Acrescente extremidades $[s]$ *com cauda na mesma componente.*

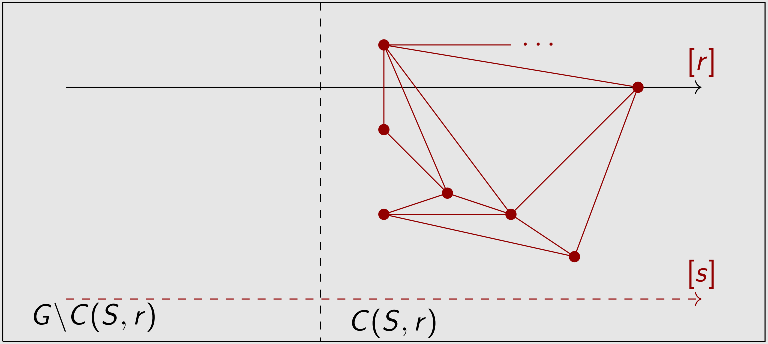


Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e\in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

Considere o corte C_S *o corte entre os vértices de* $C(S,[r])$ *e seu complementar.*

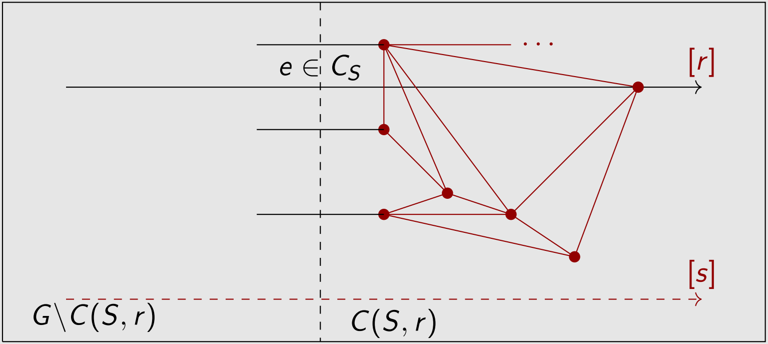


Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.

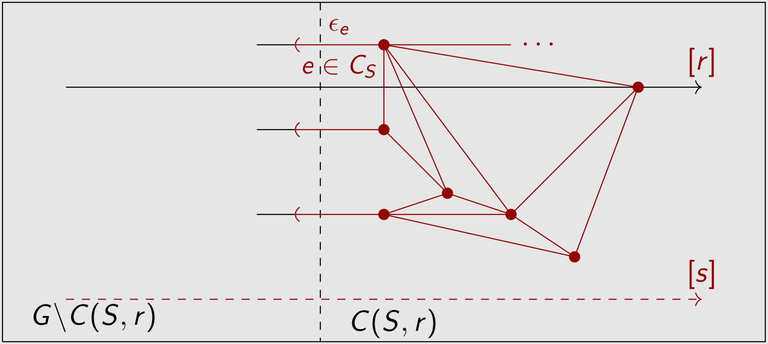
Considere o corte C_S *o corte entre os vértices de* $C(S,[r])$ *e seu complementar.*



Espaço topológico $|G|$

Definição (Espaço $|G|$)

Definimos vizinhança básica $V_{S,(\epsilon_e)_{e \in C_S}}([r])$ *de* $[r]$.



Círculos e Circuitos

Definição (Círculos e Circuitos)

Círculos *são cópias de* $\mathbb{S}^1$ *como subespaços de* $|G|$. **Circuitos** *são conjuntos de arestas de círculos.*

Círculos e Circuitos

Definição (Círculos e Circuitos)

Círculos *são cópias de* $\mathbb{S}^1$ *como subespaços de* $|G|$. **Circuitos** *são conjuntos de arestas de círculos.*

Definição (Espaço de Circuitos para Grafos Infinitos)

O espaço $\mathcal{C}(G)$ *é o espaço gerado por famílias* $\{\chi_{C_i}\}_{i \in I}$ *de características de famílias magras de circuitos* $\{C_i\}_{i \in I}$.

Generalização do Teorema

Teorema

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Generalização do Teorema

Teorema

Seja G conexo localmente finito e $T \leq G$ árvore geradora fiel de G, então $\mathcal{C}(G)$ é gerado pelos circuitos fundamentais de T.

Teorema

Seja G conexo localmente finito então G tem árvore geradora fiel. (De fato, ele tem árvore normal, e árvores normais são fieis).