Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

27 de junho de 2017

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Espaços topológicos

1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade. Uma maneira de dar uma noção de proximidade é de modo quantitativo, como no caso de espaços métricos:

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico**, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Desta maneira, temos uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro - simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2. Uma métrica sobre o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

Para espaços de funções em geral não é possível definir métricas.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correntenza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos

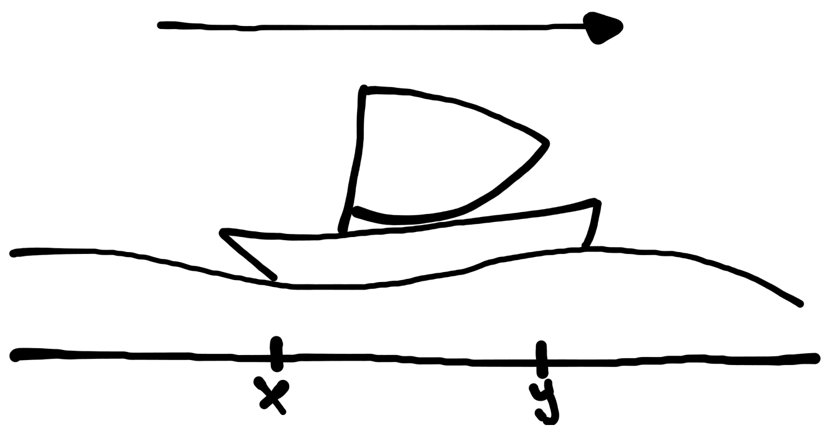

Figura 1.1: Uma correnteza forte

representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correntenza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.

Veja também o Exercício 1.1.69.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo. Para isso, vamos precisar de um conceito diferente:

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é um **filtro** sobre X se:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Agora, em vez de usarmos uma função distância, "atribuimos" a cada ponto um filtro:

Vamos adotar o * aqui para não confundir com o conceito de vizinhança que será apresentado na Definição 1.1.13. Faremos o análogo em mais algumas definições abaixo.

Definição 1.1.4. Seja X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é um **sistema de vizinhanças*** para x se $\mathcal{V}$ é um filtro sobre X e cada elemento $V \in \mathcal{V}$ é tal que $x \in V$. Chamamos cada $V \in \mathcal{V}$ de **vizinhança*** de x.

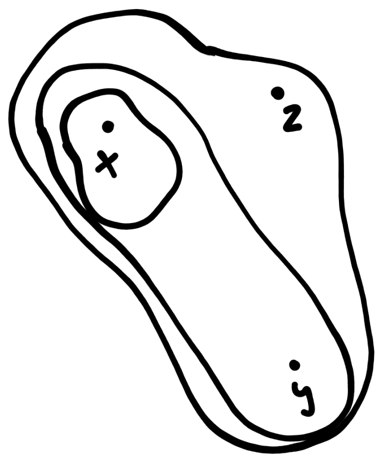

Figura 1.2: O ponto y é o mais próximo de x

A intuição por trás desta definição é que cada elemento de $\mathcal{V}$ representa uma coleção de pontos "próximos" de x. Você pode pensar que um ponto y fixado está mais próximo de x quanto maior for o conjunto

$$\{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$$

Desta maneira, na situação representada pela figura, o ponto mais próximo de x é y (e não z).

O próximo exemplo dá uma maneira de traduzirmos para a ideia de vizinhanças o conceito de proximidade dado pela métrica usual em $\mathbb{R}$.

Sim, parece estranho agora que isso seja realmente uma tradução. Mas veremos isso mais formalmente no Alongamento 1.1.55.

Exemplo 1.1.5. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existem $a < x < b$ tais que $]a, b[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças* para x.

Ao mudarmos o último exemplo ligeiramente, obtemos a ideia do exemplo do rio:

Exemplo 1.1.6. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existe $a > x$ tal que $[x, a[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças* de x. Ao conjunto dos reais munido com tal conceito de vizinhanças* damos o nome de **reta de Sorgenfrey**.

Para tentarmos ver que algo da nossa intuição está sendo capturado neste exemplo, vamos analisar um caso específico. Considere as vizinhanças* de 0 como definidas acima. Note que números positivos estão muito mais próximos de 0 do que os números negativos. Note também que isso não ocorre no caso mais simétrico do exemplo anterior.

Com todo esse material, podemos finalmente definir um espaço topológico. Intuitivamente, um espaço topológico nada mais é que um conjunto tal que todos os pontos possuem uma medida qualitativa de proximidade, mais uma condição mais técnica, que garante uma certa compatibilidade entre as noções de proximidade de diferentes pontos. Esta condição será dada em termos de certas vizinhanças* especiais:

Veja o Alongamento 1.1.54 para ver tal condição é necessária.

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto e seja $(\mathcal{V}_x)_{x\in X}$ de forma que cada $\mathcal{V}_x$ é um filtro para x. Dizemos que $A \subset X$ é um **aberto*** (com relação a $(\mathcal{V}_x)_{x\in X}$) se, para todo $a \in A$, $A \in \mathcal{V}_a$. Ou seja, A é uma vizinhança* de todos os seus pontos.

Veja a definição "definitiva" e mais usual na Definição 1.1.12.

Definição 1.1.8. Dizemos que $(X, (\mathcal{V})_{x\in X})$ é um **espaço topológico*** se, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ é um sistema de vizinhanças* para x. Além disso, para qualquer $x \in X$ e qualquer $V \in \mathcal{V}_x$, existe $A \in \mathcal{V}_x$ aberto* tal que $x \in A \subset V$.

Esta não é a definição que iremos trabalhar. Optamos por apresentar esta versão por entendermos que a intuição por trás dela é mais aparente do que na definição "definitiva".

Vejamos alguns exemplos de espaços topológicos*.

Exemplo 1.1.9. Considere $\mathbb{R}$ como no Exemplo 1.1.5 e sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Note que um intervalo $]a, b[$ é aberto*. De fato, dado qualquer $x \in]a, b[$, o próprio conjunto $]a, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança* de x. Por outro lado, o conjunto $[a, b[$ não é aberto* pois $[a, b[$ não é vizinhança* de a. De qualquer forma, isso é um exemplo de um espaço topológico*, pois, para cada $x \in X$, dado $V \in \mathcal{V}_x$, pela própria definição de $\mathcal{V}_x$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $x \in]a, b[\subset V$ e, como vimos acima, $]a, b[$ é aberto*.

Exemplo 1.1.10. Se considerarmos a reta de Sorgenfrey (como no Exemplo 1.1.6) e tomamos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos que $]a, b[$ é aberto*, pois, para cada $x \in]a, b[$, temos que $[x, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança* de x. De maneira análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ também é aberto*.

Os abertos* tem algumas propriedades a se destacar:

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço topológico*. Temos:*

(a) $\emptyset$ e X são abertos;*

(b) se A e B são abertos, então $A \cap B$ também é;*

(c) se $\mathcal{A}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ é um aberto*.*

Demonstração. Veja o Alongamento 1.1.51. $\square$

Essas propriedades da última proposição na verdade motivam a definição usual de espaço topológico:

Definição 1.1.12. Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ é uma família que satisfaz:

Esta é a definição oficial para espaços topológicos. $\wp(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X.

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(c) se $\mathcal{A} \subset \tau$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de **aberto** e a própria família τ é chamada de **topologia**.

Temos que a definição de espaço topológico e a definição de espaço topológico* aqui apresentadas são equivalentes. Começando com um espaço topológico*, note que o conjunto dos abertos* forma uma topologia (basicamente, isso é a Proposição 1.1.11). Mas como recuperar o conceito de vizinhança*? Para isso, basta fazer a seguinte definição:

Definição 1.1.13. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma **vizinhança** de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

A coleção das vizinhanças de um ponto, de fato, forma um filtro (ver o Alongamento 1.1.52). Desta maneira, se começamos com um espaço topológico*, temos como definir um espaço topológico e vice e versa. Além disso, essas construções comutam (veja os Alongamentos 1.1.52 e 1.1.53).

Alguns exemplos de espaços topológicos

Vejamos alguns exemplos de espaços topológicos. Outros exemplos serão dados no decorrer do texto.

Exemplo 1.1.14. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia caótica**).

Exemplo 1.1.15. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \wp(X)$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia discreta**).

A topologia discreta tem uma caracterização útil:

Proposição 1.1.16. *Seja X um conjunto qualquer e σ uma topologia sobre X. Então, σ é a topologia discreta se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.*

Demonstração. Se σ é a topologia discreta, segue da definição que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.

Reciprocamente, dado um conjunto qualquer $A \subset X$, ele pode ser escrito da forma $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$. Logo, pela definição de topologia, $A \in \sigma$ e, portanto, σ é a topologia discreta. □

Veja o Alongamento 1.1.55 para notar que diversas maneiras definir a topologia nos reais chegam ao mesmo lugar.

Exemplo 1.1.17. O conjunto $\mathbb{R}$ é um espaço topológico, com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A\}$. Esta é chamada de **topologia usual em** $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.18. Seja X um conjunto qualquer. Considere $\tau = \{A \subset X : X \smallsetminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X (chamada **topologia cofinita** - veja também o Exercício 1.1.67).

De fato, note que $X, \emptyset \in \tau$. Seja $\mathcal{A}$ uma família de elementos de τ. Temos que

$$X \smallsetminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \smallsetminus A)$$

Note que o lado direito da equação é finito pois é interseção de conjuntos finitos. Logo, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Note que

$$X \smallsetminus (A_1 \cap A_2) = (X \smallsetminus A_1) \cup (X \smallsetminus A_2)$$

Novamente o lado direito é finito, pois é união finita de conjuntos finitos. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e τ é uma topologia sobre X.

Também podemos definir um espaço "menor" que um já fixado:

Veja Alongamento 1.1.57.

Definição 1.1.19. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. A **topologia de subespaço** sobre Y induzida por (X, τ) é dada por $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos $Y \subset X$, onde (X, τ) é um espaço topológico, Y será considerado com a topologia de subespaço.

Finalmente, associada a uma métrica, sempre existe uma topologia.

Intuitivamente, um aberto aqui é um conjunto que todos os seus pontos "cabem com folga" - ou seja, não só os pontos estão dentro, como uma pequena bola em volta deles também está.

Proposição 1.1.20. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, é uma topologia sobre X, chamada* **topologia induzida pela métrica** *d.*

Demonstração. Note que $X \in \tau$ trivialmente e que $\emptyset \in \tau$ por vacuidade. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente, seja $\mathcal{A} \subset \tau$. Novamente, podemos supor que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ pois caso contrário nada há a provar. Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e, portanto, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. □

Fechados

Um importante conceito é o de conjunto fechado:

A intuição sobre o que é um fechado ficará mais clara com o conceito de ponto aderente, que veremos a seguir.

Definição 1.1.21. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um **conjunto fechado** se $X \smallsetminus F$ é aberto.

Exemplo 1.1.22. Em qualquer espaço topológico (X, τ), X e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e $\emptyset$ são abertos e fechados).

Exemplo 1.1.23. Em $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \smallsetminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exemplo 1.1.24. Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\wp(X)$ e, portanto, é aberto.

Exemplo 1.1.25. Na reta de Sorgenfrey, $[a, b[$ é fechado, onde $a < b$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$, então há dois casos a considerar:

- $x \geq b$: basta tomar o aberto $[x, x+1[$, cuja interseção com $[a, b[$ é vazia;
- $x < a$: podemos considerar o aberto $[x, a[$, que também está contido no complementar de $[a, b[$.

Portanto, o complementar de $[a, b[$ é aberto, como queríamos.

Fecho, interior e fronteiras

Algo muito comum de se fazer é tomar o menor fechado contendo um determinado conjunto:

Definição 1.1.26. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ onde $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$ (**fecho** de A, também denotado por $\mathrm{Cl}(A)$).

Definimos $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{V \subset X : V \text{ é aberto e } V \subset A\}$ (**interior** de A, também denotado por $\mathrm{Int}(A)$).

Proposição 1.1.27. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é fechado e $\overset{\circ}{A}$ é aberto.*

Demonstração. Decorre diretamente da definição e das propriedades de conjuntos abertos e fechados. □

Pensando que os abertos que contém um ponto são as possíveis noções de "perto do ponto", podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para "perto do ponto", interceptamos o conjunto:

Note que esta definição difere da definição que daremos para ponto de acumulação.

Definição 1.1.28. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto aderente** a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.

Vamos mostrar que o fecho de um conjunto basicamente é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto:

Proposição 1.1.29. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } A\}$.*

Demonstração. Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A. Vamos provar que $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \smallsetminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de $\overline{A}$, segue que $\overline{A} \subset X \smallsetminus V$, contradição com o fato que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \overline{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \overline{A}$. Logo, $x \in X \smallsetminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \overline{A}$. □

Vale um resultado análogo para o interior de um conjunto A. Em particular, A é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{A} = A$ (ver Alongamento 1.1.61).

Proposição 1.1.30. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A, B \subset X$. Temos*

(a) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(c) $\overline{A} = A$ se, e somente se, A é fechado.

Demonstração. Dado $x \in \overline{A}$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U que contém x. Como $A \subset B$, segue em particular que $U \cap B \neq \emptyset$. Isto prova (a).

Provemos (c). Naturalmente se $\overline{A} = A$, obtemos que A é fechado, pois seu fecho é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, segue que $A = \bigcap\{F \subset X : F$ é fechado e $A \subset F\} = \overline{A}$. O item (b) segue então diretamente de (c), por $\overline{A}$ ser fechado. □

Exemplo 1.1.31. Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\overline{A} = A$ (e também que $\mathring{A} = A$).

Exemplo 1.1.32. Em $\mathbb{R}$, $\overline{[a, b[} = [a, b]$. De fato, b é o único ponto fora de $[a, b[$ que é aderente a $[a, b[$.

Exemplo 1.1.33. Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a, b[} = [a, b[$. Para isso, basta lembrar que $[a, b[$ é fechado.

Exemplo 1.1.34. Em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Ambas as igualdades se devem ao fato de que dado qualquer ponto $q \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém pontos de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. O mesmo vale na reta de Sorgenfrey.

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar:

Definição 1.1.35. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de fronteira** de A se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Notação 1.1.36. $\partial A = \{x \in X : x$ é ponto de fronteira de $A\}$.

Exemplo 1.1.37. Em $\mathbb{R}$, $\partial[a, b[= \{a, b\}$. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que $\partial[a, b[= \emptyset$.

Observação 1.1.38. A igualdade acima vale de modo geral. Se A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico (X, τ), então $\partial A = \emptyset$.

Exemplo 1.1.39. Em $\mathbb{R}$ (ou na reta de Sorgenfrey), $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Bases

Uma base nada mais é que uma subfamília de abertos que é suficiente para recuperarmos todos os abertos por meio de uniões:

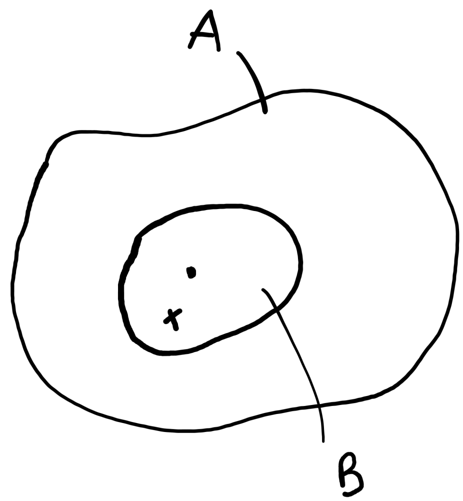

Figura 1.3: O desenho básico de uma base

Definição 1.1.40. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma **base** para (X, τ) se para todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Uma importante caracterização para bases é o seguinte resultado:

Veja a Figura 1.3.

Proposição 1.1.41. *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de τ é uma base para (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}$ seja uma família como no enunciado e seja $A \in \tau$. Para cada elemento $x \in A$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Segue, então, que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $A \in \tau$. Como podemos escrever $A = \bigcup \mathcal{B}'$ com $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, tomamos $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$. Além disso, temos que $B \subset A$. $\square$

Exemplo 1.1.42. $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \tau$. Pela definição de τ, existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Note que existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$$

Logo, $B =]a, b[\in \mathcal{B}$ e $x \in B \subset A$.

Exemplo 1.1.43. Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então, $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é uma base para (X, d) (ver Alongamento 1.1.64).

Exemplo 1.1.44. Seja X um conjunto qualquer. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para a topologia discreta sobre X (ver Alongamento 1.1.64).

Exemplo 1.1.45. A família $\mathcal{B} = \{[x, y[: x < y\}$ é uma base para a reta de Sorgenfrey (ver Alongamento 1.1.64).

Em algum sentido, uma base é um conjunto suficiente para determinar todos os abertos. Podemos fazer o análogo para vizinhanças:

Definição 1.1.46. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um **sistema fundamental de vizinhanças** de x se

Veja o Exercício 1.1.78

(a) Para todo $V \in \mathcal{V}$, V é vizinhança de x;

(b) Para todo aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset A$.

No caso em que os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos, chamamos $\mathcal{V}$ de **base local** para x.

Exemplo 1.1.47. Em $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}_1 = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x (mais que isso, como todos os membros de $\mathcal{V}_1$ são abertos, $\mathcal{V}_1$ é uma base local de x).

$\mathcal{V}_2 = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.1.48. Na reta de Sorgenfrey, $\mathcal{V} = \{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.1.49. Considere X com a topologia discreta. $\mathcal{V}_1 = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x, bem como $\mathcal{V}_2 = \{A \subset X : x \in A\}$.

O próximo resultado mostra como bases do espaço original se relacionam com as de um subespaço:

Proposição 1.1.50. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ), então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.*

Podemos fazer o análogo com sistemas fundamentais de vizinhanças.

Demonstração. Sejam $A' \in \tau_Y$ e $x \in A'$. Pela definição de topologia de subespaço, existe $A \in \tau$ tal que $A' = A \cap Y$ e, assim, $x \in A$. Logo, pelo fato de $\mathcal{B}$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, $x \in B \cap Y \subset A \cap Y$ e, portanto, $\mathcal{B}'$ é uma base para (Y, τ_Y). $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.1.51. Mostre a Proposição 1.1.11.

Alongamento 1.1.52. Fixe um espaço topológico (X, τ). Considere para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ a coleção de todas as vizinhanças de x.

(a) Mostre que cada $\mathcal{V}_x$ é um filtro.

(b) Mostre que $(X, (\mathcal{V}_x)_{x \in X})$ é um espaço topológico*.

(c) Mostre que $\{A \subset X : A \text{ é aberto*}\} = \tau$.

Alongamento 1.1.53. Fixe um espaço topológico* $(X, (\mathcal{V}_x)_{x \in X})$. Seja $\tau = \{A \subset X : A \text{ é aberto*}\}$.

(a) Mostre que τ é uma topologia sobre X.

(b) Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{W}_x = \{V \subset X : V \text{ é vizinhança de } x \text{ em } (X, \tau)\}$. Mostre que, para cada $x \in X$, $\mathcal{W}_x = V_x$.

Alongamento 1.1.54. Este é um exercício para mostrar que a hipótese de compatibilidade na definição de espaço topológico* é necessária. Considere $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_0 = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ e } \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ é enumerável}\}$ e, para cada $x \neq 0$, $\mathcal{F}_x = \{\mathbb{R}\}$.

(a) Note que, de fato, cada $\mathcal{F}_x$ é um filtro.

(b) Considere $\tau = \{A \subset X : \forall a \in A \ A \in \mathcal{F}_a\}$.

(c) Mostre que τ é uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

(d) Seja $\mathcal{V}_0$ a coleção de todas as vizinhanças de 0 na topologia τ. Mostre que $\mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{F}_0$.

Alongamento 1.1.55. Vejamos que os abertos em $\mathbb{R}$ podem ser obtidos de várias maneiras. Mostre que os abertos são os mesmos se:

(a) fizermos como no Exemplo 1.1.17;

(b) usamos as vizinhanças como em 1.1.5

(c) usamos a métrica de 1.1.2 e depois a Proposição 1.1.20.

Alongamento 1.1.56. Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Alongamento 1.1.57. Mostre que, de fato, a topologia de subespaço é uma topologia.

Alongamento 1.1.58. Considere $[0, 1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que $[0, \frac{1}{2}[$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

Alongamento 1.1.59. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são verdadeiras:

(a) $X, \emptyset$ são fechados;

(b) Se $F, G \subset X$ são fechados, então $F \cup G$ é fechado;

(c) Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de fechados, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ é um fechado.

Alongamento 1.1.60. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto interior** de A se existe V aberto tal que $x \in V \subset A$. Mostre que $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } A\}$.

Alongamento 1.1.61. Mostre o análogo à Proposição 1.1.30 para o interior.

Alongamento 1.1.62. Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Mostre as seguintes afirmações:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A}$

(b) $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$

(c) $\partial A = \overline{A} \smallsetminus \overset{\circ}{A}$

(d) $\overline{A} = A \cup \partial A$

Alongamento 1.1.63. Mostre que a fronteira de um conjunto sempre é fechada.

Alongamento 1.1.64. Mostre as afirmações dos Exemplos 1.1.43, 1.1.44 e 1.1.45.

Alongamento 1.1.65. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$. Mostre que $\{A \in \tau : x \in A \subset V\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para x.

Alongamento 1.1.66. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$, $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças de x e $W \subset X$ vizinhança de x. Mostre que $\{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exercícios

Exercício 1.1.67. Na definição da topologia cofinita (Exemplo 1.1.18), poderíamos pedir, em vez que os abertos tivessem complementar finito, que os abertos simplesmente fossem infinitos?

Exercício 1.1.68. Dizemos que duas métricas sobre um mesmo espaço X são **métricas equivalentes** se elas induzem a mesma topologia. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico qualquer, então existe uma outra métrica d' sobre X equivalente a d e que é limitada (isto é, existe $L > 0$ tal que $d'(x, y) \leq L$ para todo $x, y \in X$).

Exercício 1.1.69. Seja X um conjunto. Chamamos de **assimétrica** (na maioria dos livros, **quasi-métrica**), uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(a) Mostre que $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ é uma topologia sobre X (como fizemos com uma métrica);

(b) Considere seguinte função sobre $\mathbb{R}$:

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que d é uma assimétrica sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a topologia induzida por ela é a mesma da reta de Sorgenfrey.

Exercício 1.1.70. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Note que a restrição de d a Y induz uma métrica sobre Y. Mostre que a topologia induzida por tal métrica e a topologia induzida de subespaço de X coincidem.

Exercício 1.1.71. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F = F' \cap Y$.

Exercício 1.1.72. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço fechado. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, F é fechado em X.

Exercício 1.1.73. Encontre o análogo do Exercício 1.1.72 para abertos.

Exercício 1.1.74. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $A \subset X$ não vazio e $x \in X$, definimos $d(x, A)$ (**distância de ponto a conjunto**) como $d(x, A) = \inf(d(x, a) : a \in A\}$. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Exercício 1.1.75. Considere $\tau = \{A \subset \mathbb{Z} :$ para todo $a \in A$, existe $b \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\{a + bz : z \in \mathbb{Z}\} \subset A\}$.

(a) Mostre que τ é uma topologia sobre $\mathbb{Z}$.

(b) Mostre que não existe um aberto não vazio que seja finito.

(c) Mostre que, dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}_{>0}$, o conjunto $S(a, b) = \{a+bz : z \in \mathbb{Z}\}$ é aberto e fechado.

(d) Mostre que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ é primo}} S(0, p)$.

(e) Mostre que existem infinitos primos.

Exercício 1.1.76. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $A \subset X$, $x \in X$ e $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Exercício 1.1.77. Seja X um conjunto e sejam τ e σ topologias sobre X. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para (X, τ) e (X, σ) respectivamente.

(a) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B$ e $x \in C$ existam $C' \in \mathcal{C}$ e $B' \in \mathcal{B}$ tais que $x \in C' \subset B$ e $x \in B' \subset C$. Mostre que $\tau = \sigma$.

(b) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ exista $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset B$. É verdade que $\sigma = \tau$? Se não for verdade, vale alguma das inclusões?

Exercício 1.1.78. Seja (X, τ) espaço topológico. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que, dado $A \subset X$, A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset A$.

Exercício 1.1.79. Dizemos que (X, τ) é um **espaço zero-dimensional** se ele possui uma base formada por abertos fechados.

(a) Mostre que a reta de Sorgenfrey é zero-dimensional.

(b) Mostre que tanto $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{Q}$ são zero-dimensionais (considerados com a topologia de subsespaço).

(c) Mostre que se Y é subsepaço de um espaço zero-dimensional, então Y também é zero-dimensional.

Exercício 1.1.80. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}$ base para (X, τ). Mostre que τ é a menor topologia que contém $\mathcal{B}$. Isto é, mostre que $\tau = \bigcap_{\sigma \in T} \sigma$ onde $T = \{\sigma : \sigma$ é uma topologia para X tal que $\mathcal{B} \subset \sigma\}$.

Exercício 1.1.81. Dado um conjunto X e uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, chamamos de **topologia gerada** por $\mathcal{B}$ o conjunto $[\mathcal{B}] = \bigcap_{\tau \in T} \tau$, onde $T = \{\tau \subset \wp(X) : \tau$ é topologia sobre X e $\mathcal{B} \subset \tau\}$.

(a) Mostre que T definido acima é não vazio (e, portanto, podemos tomar a intersecção).

(b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é uma topologia sobre X.

Exercício 1.1.82. Além das condições do exercício anterior, suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz:

Note que, se em particular $\mathcal{B}$ é fechada por intersecções finitas, nós temos a segunda condição

(i) $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in A \cap B$, $\exists C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

(a) Mostre $\tau = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ é uma topologia sobre X.

(b) Mostre que $[\mathcal{B}] = \tau$.

(c) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para τ (e, portanto, para $[\mathcal{B}]$).

1.2 Axiomas de Separação

Muitas vezes, só a definição de topologia é muito simples para que possamos trabalhar. Nesta seção veremos algumas hipóteses adicionais que podemos pedir num espaço topológico. As hipóteses desta seção tem como objetivo, por exemplo, exigir que a topologia sobre o espaço seja rica o suficiente para diferenciar os pontos do espaço, ou separar os pontos entre si ou até mesmo separar fechados. Apresentaremos as propriedades em ordem de "força" (veja o Exercício 1.2.27).

Num espaço T_0, pelo menos um dos abertos da Figura 1.4 existe.

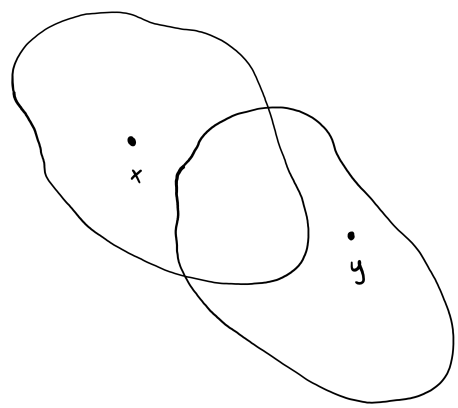

Figura 1.4: Abertos diferentes para pontos diferentes

Definição 1.2.1. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_0 se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existir um aberto A tal que ($x \in A$ e $y \notin A$) ou ($x \notin A$ e $y \in A$).

Num espaço T_0, os abertos "diferenciam" pontos, isto é, dados dois pontos distintos, existe ao menos um aberto que os distingue.

Vejamos alguns exemplos de espaços que não são T_0. Exemplos que satisfazem tal propriedade serão dados no decorrer do texto (veja também o Exercício 1.2.24).

Exemplo 1.2.2. Qualquer conjunto X com mais de dois pontos, munido da topologia caótica não é T_0.

Exemplo 1.2.3. Seja X um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos. Fixe $x, y \in X$ distintos e defina $\tau = \{A \subset X : x, y \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$. É fácil ver que (X, τ) é um espaço topológico. Contudo, não existe aberto em X tal que $x \in A$ e $y \notin A$ ou $y \in A$ e $x \notin A$. Logo (X, τ) não é T_0.

Proposição 1.2.4. *Um espaço topológico (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ para x e y respectivamente, tivermos que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.*

Esse resultado deixa claro que os pontos próximos de um ponto são diferentes dos próximos a outro num espaço T_0.

Demonstração. Suponha (X, τ) T_0. Tomemos $x, y \in X$ pontos distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases locais arbitrárias para x e y respectivamente. Por X ser T_0, existe um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$, ou $x \notin A$ e $y \in A$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro caso. Por $\mathcal{B}_x$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}_x$

tal que $x \in B \subset A$. Como $y \notin A$, segue que $y \notin B$ e, por tanto, $B \notin \mathcal{B}_y$, mostrando que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x, y \in X$ distintos, toda base local de x seja distinta de qualquer base local de y. Em particular, $\mathcal{B}_x = \{A \in \tau : x \in A\}$ e $\mathcal{B}_y = \{A \in \tau : y \in A\}$ são bases locais de x e y respectivamente. Logo, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ pela hipótese. Assim, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \notin \mathcal{B}_y$ ou existe $B \in \mathcal{B}_y$ tal que $B \notin \mathcal{B}_x$. □

Já nos espaços T_1, exigimos que ambos os abertos da Figura 1.4 existam.

Note que ser T_1 é "mais forte" do que ser T_0, pois enquanto o último exige a existência de um aberto que satisfaça ao menos um dentre dois casos, ser T_1 exige a existência de abertos que satisfaçam ambos os casos.

Definição 1.2.5. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Provavelmente a caracterização mais importante de T_1 é a seguinte:

Proposição 1.2.6. *(X, τ) é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.*

Demonstração. Suponha (X, τ) um espaço T_1. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como (X, τ) é T_1, existe um aberto A tal que $y \in A$ e $x \notin A$, isto é, $A \cap \{x\} = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{\{x\}}$. Assim, o único ponto que pode pertencer a $\overline{\{x\}}$ é o próprio x. Ou seja $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Reciprocamente, sejam $x, y \in X$ distintos. Como $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in X$, então $X \smallsetminus \{x\}$ é um conjunto aberto. Assim, $X \smallsetminus \{x\}$ é um aberto tal que $y \in X \smallsetminus \{x\}$ e $x \notin X \smallsetminus \{x\}$. □

Exemplo 1.2.7. Um conjunto X com a topologia cofinita é sempre T_1. De fato, dados $x, y \in X$ distintos, o complementar de $\{x\}$ é um aberto que não contém x mas contém y.

Para espaços de Hausdorff, já exigimos que os abertos em volta dos pontos sejam disjuntos.

Num espaço de Hausdorff, os abertos "separam" pontos.

Definição 1.2.8. Dizemos que (X, τ) é T_2 (**espaço de Hausdorff**) se, para todo $x, y \in X$ distintos, existem A, B abertos tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 1.2.9. X munido da topologia cofinita é T_1, mas não é T_2 se X for infinito. De fato, sejam $x, y \in X$ distintos e abertos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Temos que $A = X \smallsetminus F_1$ e $B = X \smallsetminus F_2$, com F_1, F_2 finitos. Logo, $A \cap B = X \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ e, como X é infinito, $A \cap B$ é necessariamente não vazio.

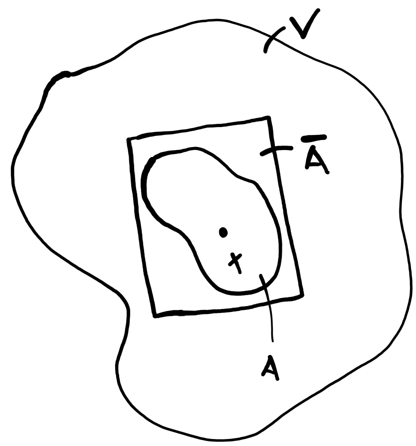

Figura 1.5: Comportamento de vizinhanças em espaços T_3

Proposição 1.2.10. *Considere (X, d) um espaço métrico. Então tal espaço é de Hausdorff (com a topologia induzida pela métrica).*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Seja $r = d(x, y) > 0$. Vamos mostrar que $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$. Suponha que não. Seja $a \in B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y)$. Então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

absurdo, pois $d(x, y) = r$. □

Definição 1.2.11. Dizemos que (X, τ) é T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$ existirem A, B abertos tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Se, além disso, (X, τ) é T_1, dizemos que (X, τ) é um **espaço regular**[1].

Num espaço topológico regular, os abertos "separam" pontos de fechados.

O próximo resultado é provavelmente a principal caracterização de espaços T_3:

Proposição 1.2.12. *Seja (X, τ) um espaço topológico. (X, τ) é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para todo aberto V tal que $x \in V$, existe um aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.*

Veja a Figura 1.5.

[1]Essa nomenclatura não é padrão - às vezes se supõe T_1 para regulares, às vezes não.

Demonstração. Suponha (X, τ) espaço T_3. Sejam $x \in X$ e $V \in \tau$ tais que $x \in V$. Note que $X \smallsetminus V$ é um fechado e $x \notin X \smallsetminus V$. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $X \smallsetminus V \subset B$. Assim, $A \subset X \smallsetminus B$ que é fechado. Logo, $\overline{A} \subset X \smallsetminus B \subset V$.

Reciprocamente, mostremos que (X, τ) é T_3. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $X \smallsetminus F$ é aberto e contém x. Logo, existe A aberto tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset X \smallsetminus F$. Note que $x \in A$, $F \subset X \smallsetminus \overline{A}$ e $A \cap (X \smallsetminus \overline{A}) = \emptyset$. □

Corolário 1.2.13. *Um espaço topológico (X, τ) é T_3 se, somente se, para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x.*

Demonstração. Veja o Alongamento 1.2.22. □

Neste e no próximo exemplo já estamos supondo claro que os espaços em questão são T_1.

Exemplo 1.2.14. $\mathbb{R}$ é regular. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x.

Exemplo 1.2.15. A reta de Sorgenfrey é regular (veja o Exemplo 1.1.48, e considere o Corolário 1.2.13).

Veja o Exercício 1.2.30 para um exemplo de um espaço de Hausdorff que não seja regular.

Num espaço normal, os abertos separam os fechados disjuntos.

Definição 1.2.16. Dizemos que (X, τ) é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$, $G \subset B$. Se, além disso, (X, τ) é T_1, dizemos que (X, τ) é **espaço normal**[2].

Exemplo 1.2.17. Vamos mostrar mais para frente que todo métrico é normal (Corolário 2.3.3).

Exemplo 1.2.18. A reta de Sorgenfrey é normal. Vamos provar tal afirmação. Primeiramente, note que ela é T_1.

Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, sejam $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)[\cap G = \emptyset \text{ e } [b, y(b)[\cap F = \emptyset.$$

[2]Novamente, tal nomenclatura não é completamente padrão. Às vezes se supõe T_1, às vezes não.

Podemos fazer isso pois os complementares de F e G são abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)[\text{ e } B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)[.$$

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$ e que A e B são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que $c \in [a, x(a)[\cap [b, y(b)[$.

Caso $a < b$: então $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a)[$, logo $[a, x(a)[\cap [b, y(b)[= \emptyset$, absurdo. Se $b < a$, obtém-se uma contradição de maneira análoga. É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Exemplo 1.2.19. Veremos mais para frente que o quadrado da reta de Sorgenfrey é regular mas não é normal (Proposição **??**).

Veremos que até regularidade, as propriedades desta seção são "bem comportadas" e muitas vezes a verificação de se um espaço tem ou não a propriedade é elementar ou segue de algum teorema. Mas com a normalidade, a situação muda. Desta forma, um tipo de resultado bastante útil é quando podemos "subir" alguma propriedade até a normalidade. O próximo resultado vai nesta direção: veremos que para um espaço enumerável ser normal basta ele ser regular. A ideia para a demonstração será usada outras vezes no decorrer do texto:

Proposição 1.2.20. *Todo espaço enumerável e regular é normal.*

Note que na verdade estamos provando que todo espaço T_3 enumerável é T_4.

Demonstração. Sejam F e G fechados disjuntos. Faça $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $G = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como o espaço é regular, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe A_m aberto tal que $x_m \in A_m$ e $\overline{A_m} \cap G = \emptyset$ (pela Proposição 1.2.12), bem como B_m aberto tal que $y_m \in B_m$ e $\overline{B_m} \cap F = \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n^* = A_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k} \text{ e } B_n^* = B_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{A_k}.$$

Note que A_n^* e B_n^* são abertos (pois $A \smallsetminus B = A \cap (X \smallsetminus B)$ para $A, B \subset X$).

Sejam $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^*$ e $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^*$. Note que $F \subset A$ e $G \subset B$ (em particular, observe que $A_n^* \cap F = A_n \cap F$). Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $z \in A \cap B$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $z \in A_n^*$ e $z \in B_m^*$.

Vamos fazer o caso $n \leq m$, o outro é análogo. Então $z \in A_n^* = A_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k}$ e $z \in B_m^* = B_m \smallsetminus \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k}$. Note que, como $m \geq n$, $z \notin \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k} \supset \overline{A_n} \supset A_n \supset A_n^*$, contradição, pois supomos $z \in A_n^*$. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.2.21. Mostre que um espaço finito é T_1 se, e somente se, tem a topologia discreta.

Alongamento 1.2.22. Demonstre o Corolário 1.2.13.

Alongamento 1.2.23. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que T_4 é equivalente à seguinte propriedade: "Para todo F fechado e todo V aberto tal que $F \subset V$, existe um aberto U tal que $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$".

Exercícios

Exercício 1.2.24. Dê um exemplo de um espaço T_0 que não seja T_1.

Exercício 1.2.25. (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos tivermos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Exercício 1.2.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:

(a) (X, τ) é T_1;

(b) $\forall x \in X$, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de abertos tal que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x\}$;

(c) $\forall x \in X$ existe $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} V = \{x\}$;

Exercício 1.2.27. Prove a cadeia de implicações: (X, τ) é normal $\Rightarrow$ (X, τ) é regular $\Rightarrow$ (X, τ) é T_2 $\Rightarrow$ (X, τ) é T_1 $\Rightarrow$ (X, τ) é T_0.

Exercício 1.2.28. Sejam (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que se (X, τ) é T_i para $i = 0, ..., 3$, então Y também é.

Exercício 1.2.29. Mostre que se Y é subespaço fechado de um espaço normal, então Y também é normal.

Exercício 1.2.30. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma

$$]a, b[\smallsetminus C$$

onde $a < b \in \mathbb{Q}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de **reta esburacada**.

(a) Mostre que isso é uma base para tal topologia;

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff;

(c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado;

(d) Mostre que tal espaço não é regular.

Exercício 1.2.31. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela reta de Sorgenfrey é normal.

1.3 Axiomas de Enumerabilidade

Nesta seção vamos começar a investigar quando a existência de determinados conjuntos enumeráveis nos dão propriedades importantes sobre o espaço. Tais propriedades serão muito usadas no decorrer do texto.

Definição 1.3.1. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** (*1st countable*) se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Neste caso, também dizemos que (X, τ) tem **bases locais enumeráveis**.

Veja o Alongamento 1.3.24 para ver que um ponto ter um sistema fundamental de vizinhanças enumerável é equivalente a ter uma base local enumerável.

Exemplo 1.3.2. Todo espaço métrico (X, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para isso, basta notar que $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

Exemplo 1.3.3. A reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, já que $\{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

O primeiro axioma de enumerabilidade tem bastante em comum com o conceito de sequência convergente:

Definição 1.3.4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** para $x \in X$ se, para toda vizinhança V de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V$. Notação: $x_n \to x$.

Note que esta definição permanece equivalente se trocarmos vizinhança por aberto contendo o ponto (veja o Alongamento 1.3.25).

Proposição 1.3.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x_n \to x$. Então, $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Demonstração. Seja V vizinhança de x. Seja n_0 da definição de convergência. Note que $x_{n_0} \in V \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Corolário 1.3.6. *Seja (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$. Sejam $x \in X$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de Y. Se $y_n \to x$, então $x \in \overline{Y}$.*

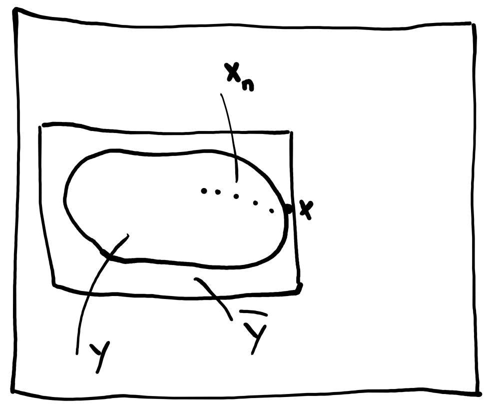

Figura 1.6: Aderência em termos de convergência

Para espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade, ser ponto aderente pode ser caracterizado por limite de sequências:

A hipótese sobre as bases locais é necessária. Veja o Exemplo 1.3.9.

Proposição 1.3.7. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico com bases locais enumeráveis. Sejam* $Y \subset X$ *e* $x \in X$*. Então,* $x \in \overline{Y}$ *se, e somente se, existe* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *sequência de pontos de* Y *tal que* $y_n \to x$*.*

Demonstração. Um lado já está feito (vale mesmo sem a hipótese sobre as bases).

Suponha que $x \in \overline{Y}$ e seja $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema fundamental de vizinhanças para x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $y_n \in \left(\bigcap_{k \leq n} V_k\right) \cap Y$. Mostremos que $y_n \to x$. Seja V vizinhança de x. Como $\mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset V$. Seja $n \geq n_0$. Note que $y_n \in \bigcap_{k \leq n} V_k \subset V_{n_0} \subset V$. □

Espaços de Hausdorff tem a propriedade da unicidade de limites:

Proposição 1.3.8. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico de Hausdorff. Se* $x_n \to x$ *e* $x_n \to y$*, então* $x = y$*.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $x \neq y$. Sejam U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Então, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n \geq n_1$, $x_n \in U$ e para todo $n \geq n_2$, $x_n \in V$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $x_{n_0} \in U \cap V$, que é uma contradição. □

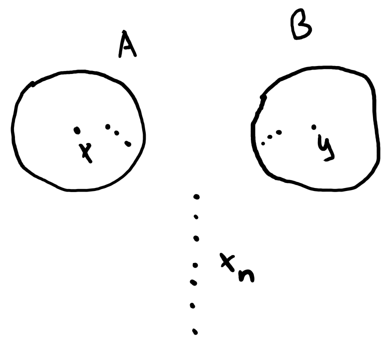

Figura 1.7: A unicidade de limites de sequências

Exemplo 1.3.9. Na reta esburacada, se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $x_n \longrightarrow x$ para algum x, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$. De fato, temos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é fechado por ser enumerável (veja o Exercício 1.2.30). Em particular, note que $0 \in \overline{]0,1[}$ mas não existe sequência em $]0,1[$ que converge para 0. Com isso, temos que a reta esburacada não tem bases locais enumeráveis.

Definição 1.3.10. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 1.3.11. *Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X tal que $x_n \to x$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Seja n_0 tal que, para todo $n \geq n$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados $n, m \geq n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

□

Definição 1.3.12. Seja (X, d) um espaço métrico. (X, d) é dito **espaço métrico completo** se toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy é convergente.

O segundo axioma de enumerabilidade é uma versão global do primeiro:

Definição 1.3.13. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** *(2nd countable)* se admite uma base enumerável.

Exemplo 1.3.14. A reta real satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, já que $\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base.

Proposição 1.3.15. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ). Então, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base local para x. $\square$

Exemplo 1.3.16. A reta de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, suponha, por contradição, que satisfaça. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável. Para cada $x \in X$, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1[$. Note que se $x \neq y$, então $B_x \neq B_y$. De fato, sem perda de generalidade, suponha que $x < y$ e note que $x \notin B_y$, pois $B_y \subset [y, y+1[$. Logo, $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ definida por $f(x) = B_x$ é injetora, o que é uma contradição, pois $\mathcal{B}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ não.

Definição 1.3.17. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $D \subset X$ é denso em X se $\overline{D} = X$.

Definição 1.3.18. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **terceiro axioma de enumerabilidade** *(3rd countable)* se admite um subconjunto denso enumerável. Neste caso, dizemos também que (X, τ) é um **espaço separável**.

Exemplo 1.3.19. Temos que a reta real e a reta de Sorgenfrey são separáveis pois em ambos os casos $\mathbb{Q}$ é denso.

O segundo axioma de enumerabilidade implica no terceiro (e já vimos que ele implica no primeiro também):

Proposição 1.3.20. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então ele é separável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base para (X, τ). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_n$ (podemos supor sem perda de generalidade que $B_n \neq \emptyset$). Vamos mostrar que $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso. Sejam $x \in X$ e V vizinhança de x. Como $\mathcal{B}$ é base, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Note que $x_n \in B_n$. Portanto, $x_n \in V \cap D$. $\square$

No caso de métricos, vale a volta:

Proposição 1.3.21. *Se (X, d) é um espaço métrico e separável, então (X, d) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.*

Note que a reta de Sorgenfrey nos dá que a hipótese de metrizabilidade é necessária.

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Considere

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x_n) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Vamos mostrar que B é base. Sejam A aberto e $x \in A$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, existe $x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$. Vamos mostrar que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$. Primeiramente, note que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, pois $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$. Temos também que $B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$, pois, dado $a \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, temos

$$d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definição 1.3.22. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço metrizável** se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ.

Com o que temos até o momento, já conseguimos dizer em alguns casos quando um espaço não é metrizável:

Exemplo 1.3.23. A reta de Sorgenfrey não é um espaço metrizável. De fato, temos que este é um espaço separável mas que não admite uma base enumerável. Assim, pela Proposição 1.3.21, ele não é metrizável.

Veremos outros critérios ao longo do texto.

Alongamentos

Alongamento 1.3.24. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Mostre que são equivalentes:

(i) x admite um sistema fundamental de vizinhanças enumerável;

(ii) x admite uma base local enumerável.

Alongamento 1.3.25. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X. Mostre que são equivalentes:

(i) $x_n \longrightarrow x$.

(ii) para todo V aberto tal que $x \in V$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

(iii) dado $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças para x, para todo $V \in \mathcal{V}$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

Alongamento 1.3.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que $D \subset X$ é denso se, e somente se, para todo aberto não vazio A, $A \cap D \neq \emptyset$.

Alongamento 1.3.27. Mostre que se (X, τ) é um espaço topológico enumerável que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então (X, τ) também satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.3.28. Mostre que todo subespaço de um espaço que satisfaça o primeiro axioma de enumerabilidade também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.3.29. Mostre que todo subespaço de um espaço com base enumerável tem base enumerável.

Alongamento 1.3.30. Mostre que se (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas enumerável e decrescente, isto é, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $V_{n+1} \subset V_n$.

Exercícios

Exercício 1.3.31. Mostre que a reta esburacada não é metrizável.

Exercício 1.3.32. Mostre que na reta esburacada as únicas sequências convergentes são as quase constantes. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita uma **sequência quase constante** se existem x e n_0 tais que $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$.

Exercício 1.3.33. Considere X o espaço $\mathbb{N} \cup \{a\}$, onde $a \notin \mathbb{N}$. Considere

$$\tau = \wp(\mathbb{N}) \cup \{\mathbb{N} \cup \{a\}\}$$

Note que qualquer subconjunto de $\mathbb{N}$ é aberto e o único aberto que contém a é o espaço todo.

(a) Mostre que τ é uma topologia sobre X.

(b) Mostre que qualquer sequência em X é convergente.

Exercício 1.3.34. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $D \subset X$ denso. Considerando D como subespaço, mostre que se $E \subset D$ é denso em D, então E é denso em X.

Exercício 1.3.35. Mostre que todo subespaço de um espaço que tenha base enumerável é separável.

Exercício 1.3.36. O exemplo deste exercício é chamado de **plano de Niemytski**.

Considere $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ com a topologia de forma que:

(i) se (x, y) é tal que $y > 0$, então uma vizinhança básica de (x, y) é da forma de uma bola aberta centrada em (x, y) que não intercepta o eixo x, isto é $B_\varepsilon((x, y))$ com $0 < \varepsilon < y$;

(ii) Para os pontos da forma $(x, 0)$, uma vizinhança de tal ponto é da forma de uma bola aberta contida em $\{(a, b) : b > 0\}$ e que tangencie o eixo x no ponto $(x, 0)$ (inclua o ponto em tal vizinhança). Ou seja, $B_y((x, y)) \cup \{(x, 0)\}$.

onde $B_r((x, y))$ é a bola com a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que isso define uma topologia.

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.

(c) Mostre que tal espaço é regular.

(d) Mostre que tal espaço é separável.

(e) Mostre que o eixo x ($\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$) com a topologia de subespaço tem a topologia discreta.

(f) Mostre que tal espaço não tem base enumerável.

(g) Mostre que tal espaço não é metrizável.

(h) Mostre que não é verdade que todo subespaço de um espaço separável é separável (compare com o Exercício 1.3.35).

Exercício 1.3.37. Mostre que a reta esburacada não é separável.

Exercício 1.3.38. Mostre que, se (X, τ) é um espaço regular que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então (X, τ) é um espaço normal.

Exercício 1.3.39. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base enumerável para (X, τ) e seja $\mathcal{C}$ uma base qualquer para (X, τ). Então, existe uma família enumerável $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ que é base para (X, τ).

Capítulo 2

Funções

2.1 Funções contínuas

Uma maneira de entender a definição de função contínua é a seguinte: imagine que f seja uma máquina de transformar algo em outra coisa. Para exemplificar, imaginemos que f transforma farinha em pizza. Assim, se queremos obter "y m^2 de pizza", precisamos fornecer x kg de farinha, de forma que $f(x) = y$. Mas, como toda medição acarreta em erros, este processo não tem precisão absoluta. Desta forma, para obtermos "y m^2 de pizza" dentro de uma margem de erro T (tolerância), precisamos fornecer x kg dentro de uma precisão P (exigida pela f). Vamos dizer que f é contínua se dada uma tolerância qualquer, sempre podemos encontrar uma precisão que satisfaça o processo.

O que não seria nada ruim. Mas não sei de onde viria o molho.

Traduzindo para a nossa linguagem, dados (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, f será contínua no ponto x se para toda tolerância T em torno de $f(x)$, existe uma precisão P em torno de x de forma que $f[P] \subset T$. Note que essa última condição simplesmente quer dizer que todo os pontos que satisfazem a precição tem imagem dentro da tolerância. Finalmente, note que estar dentro de uma precisão ou de uma tolerância é simplesmente estar "próximo" de um determinado ponto. Ou seja, basta trabalharmos com estes dois conceitos como sendo vizinhanças:

Definição 2.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Seja também $x \in X$. Dizemos que f é uma função **função contínua no ponto** x se, para toda vizinhança A de $f(x)$ existe uma vizinhança B de x tal que $f[B] \subset A$.

Veja o Alongamento 2.1.17 para ver que esse conceito de fato generaliza aquele normalmente visto em cursos de Cálculo.

Da mesma forma que obtemos uma definição mais simples (e menos intuitiva) quando abandonamos vizinhanças e definimos abertos diretamente de uma forma global para o espaço, também temos uma definição para funções contínuas (de maneira global):

Definição 2.1.2. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é uma **função contínua** se, para todo aberto A de Y, temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X (i.e., $\forall A \in \rho\ f^{-1}[A] \in \tau$).

De fato, os conceitos apresentados são versões globais e locais de uma mesma coisa:

Proposição 2.1.3. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$, f é contínua no ponto x.*

Demonstração. Suponha f contínua e $x \in X$. Seja A vizinhança de $f(x)$ e A' aberto tal que $f(x) \in A' \subset A$. Assim, $f^{-1}[A']$ é aberto, com $x \in f^{-1}[A']$ (portanto, vizinhança de x) e $f[f^{-1}[A']] \subset A' \subset A$.

Agora, suponha que para todo $x \in X$, f é contínua em x. Seja A aberto em Y. Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in A$, seja B_x vizinhança de x tal que $f[B_x] \subset A$. Como B_x é vizinhança de x, existe B'_x aberto tal que $x \in B'_x \subset B_x$. Assim, $f^{-1}[A] = \bigcup_{x \in f^{-1}[A]} B'_x$ é aberto. □

Exemplo 2.1.4. Considere (X, τ) um espaço topológico. Então a função $I : X \longrightarrow X$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in X$ (**função identidade**) é contínua (a verificação é imediata).

Exemplo 2.1.5. Qualquer função constante é contínua. De fato, sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e considere uma função constante $f : X \to Y$ dada por $f(x) = k$. Seja A um aberto de (Y, σ). Então,

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset, & k \notin A \\ X, & k \in A \end{cases}$$

Ou seja, em ambos os casos $f^{-1}[A]$ é um aberto de (X, τ).

Com a definição global de continuidade, prova-se o seguinte resultado facilmente:

Este resultado é lido como "composta de funções contínuas é contínua". O que era de se esperar.

Proposição 2.1.6. *Sejam (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) e (X_3, τ_3) espaços topológicos e sejam $g : X_1 \to X_2$ e $f : X_2 \to X_3$ funções contínuas. Então, $f \circ g : X_1 \to X_3$ é contínua.*

Demonstração. Seja A um aberto em X_3. Como f é contínua, temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X_2. Agora, como g é contínua, $g^{-1}[f^{-1}[A]]$ é aberto em X_1. Mas, como $g^{-1}[f^{-1}[A]] = (f \circ g)^{-1}[A]$, a proposição está provada. □

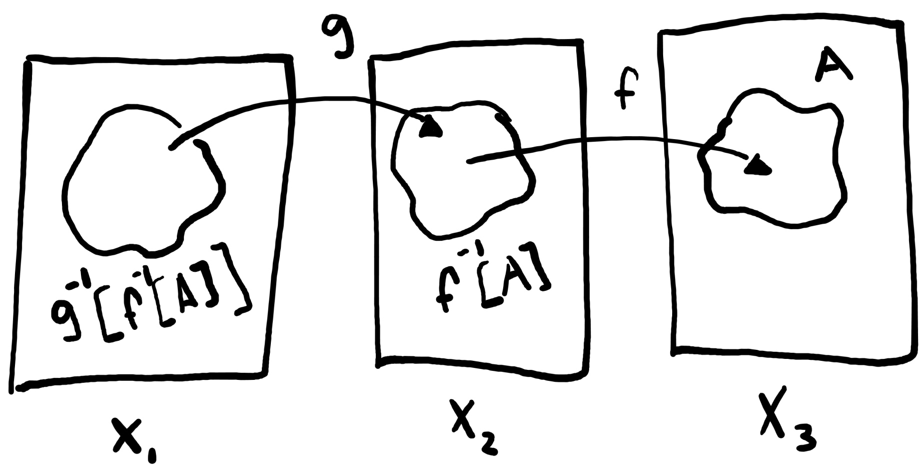

Figura 2.1: Composta de contínuas é contínua (vá da direita para a esquerda)

Densos são "empurrados" por funções contínuas:

Proposição 2.1.7. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua sobrejetora. Se $D \subset X$ é denso em X, então $f[D]$ é denso em Y.*

Demonstração. Seja $A \subset Y$ aberto não vazio. Note que $f^{-1}[A]$ é aberto em X. Como f é sobrejetor, $f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Logo, existe $d \in D$ tal que $d \in f^{-1}[A]$, ou seja, $f(d) \in A$. Portanto, $f[D] \cap A \neq \emptyset$. □

Corolário 2.1.8. *Imagem contínua de um espaço separável é separável.*

O seguinte exemplo será útil no estudo de sequências convergentes:

Exemplo 2.1.9. Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos

(a) $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\{\infty\} \cup A$, em que $A \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

Note que, desta forma, um conjunto contendo ∞ é aberto se, e somente se, apenas uma quantidade finita de elementos de $\mathbb{N}$ não pertence a ele. Chamamos este espaço de **espaço da sequência convergente**.

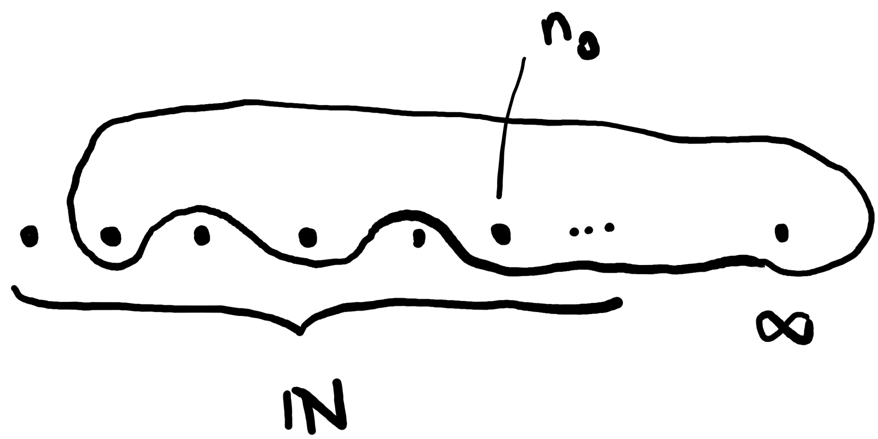

Figura 2.2: Típica vizinhança de ∞

Proposição 2.1.10. *Seja (X, τ) espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$ uma função ($\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia do exemplo anterior). Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \to f(\infty)$ (i.e., a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$).*

Demonstração. Suponha f contínua. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é aberto. Logo, $\mathbb{N} \smallsetminus f^{-1}[A]$ é finito, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $n \in f^{-1}[A]$. Logo, para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$.

Agora, suponha que $f(n) \to f(\infty)$. É imediato que f é contínua em todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que f é contínua em ∞. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como $f(n) \to f(\infty)$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$. Logo, $\{n : n \geq n_0\} \subset f^{-1}[A]$ e $\infty \in \{n : n \geq n_0\} \cup \{\infty\} \subset f^{-1}[A]$. □

Funções contínuas também "empurram" sequências convergentes:

Proposição 2.1.11. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, $f : X \to Y$ função contínua e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Então, $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração. Considere a função $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$, com $h(n) = x_n$ e $h(\infty) = x$. Note que h é contínua pela proposição anterior. Note também que $f \circ h$ é contínua, pois é composta de contínuas. Note que $(f \circ h)(n) =$

$f(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e que $(f \circ h)(\infty) = f(\infty)$. Logo, pela proposição anterior, aplicada a $f \circ h$, temos $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

No caso de espaços "ricos" em sequências convergentes, também temos a volta do resultado anterior:

Proposição 2.1.12. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (X, τ) possui bases locais enumeráveis. Dada $f : X \to Y$ uma função, temos que f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to x$, temos que $f(x_n) \to f(x)$.*

Veja também o Exercício 2.1.22.

Demonstração. Já está feito supondo f contínua.

Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x. Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}[A]$. Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subset f^{-1}[A]$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \to x$. De fato, seja $V \ni x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$. Note, também, que $f(x_n) \not\to f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, que é contradição. $\square$

Corolário 2.1.13. *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to x$, temos que $f(x_n) \to f(x)$.*

Alongamentos

Alongamento 2.1.14. Mostre que $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[F]$ é fechado (em X) para todo $F \subset Y$ fechado.

Alongamento 2.1.15. Mostre que na definição de função contínua poderíamos supor os abertos da imagem como sendo sendo básicos (isto é, os abertos em Y serem elementos de uma base $\mathcal{B}$ fixada previamente).

Alongamento 2.1.16. Mostre o análogo do alongamento anterior para a definição de continuidade num ponto, trocando vizinhança por "elemento de uma base local" fixada.

Alongamento 2.1.17. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \to X_2$ uma função. Mostre que, para cada $x \in X_1$, são equivalentes:

Para aqueles que gostam de ε's e δ's.

(a) f contínua em x (com as topologia induzidas pelas métricas);

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in X$, $d_1(x, y) < \delta \to d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Alongamento 2.1.18. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $Z \subset X$ subespaço de X. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que$(f \restriction Z) : Z \to Y$ é contínua.

Exercícios

Exercício 2.1.19. Seja (X, τ) espaço topológico. Seja A um aberto fechado em X. Mostre que a **função característica** de A é contínua. Isto é, que a função $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua (considere em $\{0, 1\}$ a topologia discreta (ou a induzida por $\mathbb{R}$, que dá na mesma)).

Exercício 2.1.20. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Sejam $F_1, ..., F_n \subset X$ fechados tais que $\bigcup_{i=1}^n F_i = X$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

(a) Mostre que se $f \restriction F_i$ é contínua para todo $i = 1, ..., n$, então f é contínua;

(b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada F_i não seja fechado).

(c) Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de que cada F_i ser fechado é necessária no item (a).

Exercício 2.1.21. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Seja $(A_i)_{i \in I}$ família de abertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Seja $f : X \longrightarrow Y$.

(a) Mostre que se $f \restriction A_i$ é contínua para todo $i \in I$, então f é contínua.

(b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada A_i não seja aberto).

Exercício 2.1.22. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos de Hausdorff, sendo que (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

(a) Mostre que neste caso podemos melhorar a Proposição 2.1.12 para $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em X, temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

(b) Mostre que se não tivermos axiomas de separação sobre os espaços, o resultado anterior não vale.

Exercício 2.1.23. Considere (X, τ) como sendo a reta esburacada e seja (Y, ρ) um espaço qualquer. Seja $f : X \longrightarrow Y$. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y. Conclua que a hipótese sobre o primeiro axioma de enumerabilidade é essencial no exercício anterior (e na Proposição 2.1.12).

Exercício 2.1.24. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas, onde Y é de Hausdorff.

(a) Então o conjunto $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

(b) Mostre a Proposição 2.2.2 a partir do item anterior.

2.2 Extensão de funções

Nesta seção vamos discutir um pouco sobre relações entre funções definidas apenas num subespaço com as funções definidas sobre o espaço todo.

Definição 2.2.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos. Seja $A \subset X$. Dadas $f : A \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas, dizemos que g é uma **extensão contínua** de f se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Os valores num denso determinam, no máximo, uma função contínua:

Proposição 2.2.2. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (Y, ρ) é de Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ são duas funções contínuas tais que $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$, então $f = g$.*

Veja uma generalização desse resultado no Exercício 2.1.24

Demonstração. Suponha que não. Seja $x \in X$ tal $f(x) \neq g(x)$. Sejam A e B abertos disjuntos tais que $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Note que $f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$ é um aberto contendo x. Logo, existe $d \in f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$. Note que $f(d) = g(d) \in A \cap B$, contradição. $\square$

Dissemos "no máximo" pois existem casos que uma função contínua num denso não admite qualquer extensão contínua:

Na verdade, dada qualquer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, existe um denso $D \subset \mathbb{R}$ tal que f é contínua em tal denso [**?**].

Exemplo 2.2.3. Considere $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Note que f é contínua, $\mathbb{N}$ é denso em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (espaço da sequência convergente) e não existe $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow [0, 1]$ contínua que estenda f.

Note que no mesmo exemplo, temos que f está definida num aberto e não pode ser estendida continuamente ao espaço todo. Na sequência, vamos apresentar um resultado sobre quando podemos estender uma função definida num fechado.

Na próxima demonstração usaremos muitas vezes o seguinte fato: Se (X, τ) é T_4 e F é um fechado contido num aberto V, então existe um aberto W tal que $F \subset W \subset \overline{W} \subset V$ (note que isto é, na verdade, equivalente a ser T_4 - veja o Alongamento 1.2.23).

Essa demonstração segue [?].

Proposição 2.2.4. *Sejam (X, τ) espaço topológico T_4 e $f : A \to [0, 1]$ contínua onde $A \subset X$ é fechado. Então existe $F : X \to [0, 1]$ extensão contínua de f.*

Demonstração. Para cada $r \in \mathbb{Q}$ e cada $s \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, sejam:

$$A_r = \{x \in A : f(x) \leq r\}$$

$$U_s = X \smallsetminus \{x \in A : f(x) \geq s\}$$

Note que, por continuidade, A_r é fechado, U_s é aberto e, se $r < s$, temos também que $A_r \subset U_s$.

Considere $(r_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração para $P = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $0 \leq r < s < 1\}$. Sobre P, considere a ordem $(r, s) \leq (a, b)$ quando $r \leq a$ e $s \leq b$. Note que, assim, $(r, s) < (a, b)$ se $r \leq a$, $s \leq b$ e ocorre também $r \neq a$ ou $s \neq b$.

Vamos construir uma sequência $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos de X de forma que

(a) $A_{r_n} \subset H_n \subset \overline{H_n} \subset U_{s_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\overline{H_m} \subset H_n$ se $(r_m, s_m) < (r_n, s_n)$.

Vamos fazer essa construção indutivamente. Por T_4, podemos definir H_0 de forma que

$$A_{r_0} \subset H_0 \subset \overline{H_0} \subset U_{s_0}$$

Suponha definido H_j satisfazendo as condições acima para todo $j < n$. Vamos definir H_n.

Os elementos de J marcam os H's cujo fecho precisa estar incluso em H_n. Já o elementos de K marcam os elementos onde $\overline{H_n}$ precisa estar incluso.

Considere $J = \{j \in \mathbb{N} : j < n, (r_j, s_j) < (r_n, s_n)\}$ e $K = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n, (r_n, s_n) < (r_k, s_k)\}$. Novamente por T_4, podemos definir H_n de forma que

$$A_{r_n} \cup \bigcup_{j\in J} \overline{H_j} \subset H_n \subset \overline{H_n} \subset U_{s_n} \cap \bigcap_{k\in K} H_k$$

Podemos re-escrever a família $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construída acima como

$$(H_{(r,s)})_{(r,s) \in P}$$

Note que, pela construção, temos

(a) $A_r \subset H_{(r,s)} \subset \overline{H_{(r,s)}} \subset U_s$ para $(r, s) \in P$

(b) $\overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(a,b)}$ se $(r, s) < (a, b)$.

Para $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, considere

$$X_r = \bigcap_{s>r} \overline{H_{(r,s)}}$$

Defina também $X_r = \emptyset$ se $r < 0$ e $X_r = X$ se $r \geq 1$. Para cada $(r, s) \in P$, seja $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t < s$. Note que

$$X_r \subset \overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(t,s)} \subset \overline{H_{(t,s)}} \subset \bigcap_{u>s} \overline{H_{(s,u)}} = X_s$$

Além disso, se $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, temos

$$A_r \subset X_r \cap A = A \cap \bigcap_{s>r} \overline{H_{(r,s)}} \subset A \cap \bigcap_{s>r} U_s = A_r$$

Assim, obtemos uma família $(X_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ de fechados satisfazendo:

(a) $X_r \subset \mathrm{Int}(X_s)$ se $r < s$

(b) $X_r \cap A = A_r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Agora estamos prontos para definir $F : X \to [0, 1]$. Para $x \in X$, defina

$$F(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in X_r\}$$

Note que como $f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$ para $x \in A$, temos que, de fato, F estende f. Além disso, temos que F é contínua já que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos

$$F^{-1}\left[\,]a, b[\,\right] = \bigcup_{(r,s) \in Q} (\mathrm{Int} X_s \smallsetminus X_r)$$

onde $Q = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q} \text{ e } a < r < s < b\}$.

□

Como consequência, obtemos um resultado que caracteriza os espços T_4 em termos de funções contínuas:

Teorema 2.2.5 (Lema de Urysohn)**.** *Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é T_4 se, e somente se, para todo $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.*

Demonstração. Considere $g : F \cup G \to \{0, 1\}$ dada por $g(x) = 0$ se $x \in F$ e $g(x) = 1$ caso $x \in G$. Note que g é contínua. Assim, qualquer extensão contínua de tal g satisfaz o que precisamos.

Para a recíprova, basta notar que $f^{-1}\left[[0, \frac{1}{2}[\right]$ e $f^{-1}\left[]\frac{1}{2}, 1]\right]$ são os abertos procurados. □

Podemos pensar que espaços normais são aqueles em que funções contínuas separam fechados disjuntos. Ao tentarmos fazer o análogo para separação entre pontos e fechados, obtemos um novo axioma de separação:

Alguns lugares chamam um espaço completamente regular de um **espaço de Tychonoff**.

Definição 2.2.6. Dizemos que (X, τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existir $f : X \to [0, 1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. No caso que (X, τ) também é T_1, dizemos que (X, τ) é um espaço **completamente regular**.

Veremos adiante que esse axioma é de fato um novo axioma de separação. Também veremos que ele tem um papel importante em compactificações.

Também obtemos que as funções a serem estendidas não precisam ser limitadas:

Teorema 2.2.7 (de Tietze). *Sejam (X, τ) espaço T_4. Sejam $F \subset X$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}$ função contínua. Então existe $F : X \to \mathbb{R}$ extensão contínua de f.*

Demonstração. Note que basta mostrarmos o resultado para

$$f : F \to]-1, 1[$$

Pois existe $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ bijetora contínua com inversa contínua e, portanto, o argumento segue via composições adequadas - veremos mais sobre isso no Corolário 2.4.14.

Temos que existe $g : X \to [-1, 1]$ contínua que estende f (Veja o Alongamento 2.2.8). Seja $F' = g^{-1}[\{-1, 1\}]$. Note que F e F' são fechados disjuntos. Pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \to [0, 1]$ contínua tal que $h[F] = \{1\}$ e $h[F'] = \{0\}$. Finalmente, note que a função desejada é $F : X \to]-1, 1[$ dada por $F(x) = g(x)h(x)$. □

Alongamentos

Alongamento 2.2.8. Mostre que se X é T_4 e $M \subset X$ é um fechado, então para toda $f : M \to [a, b]$ contínua, existe $F : X \to [a, b]$ extensão contínua de f.

Alongamento 2.2.9. Mostre que todo espaço completamente regular é um espaço regular.

Exercícios

Exercício 2.2.10. Mostre que subespaços de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ são $T_{3\frac{1}{2}}$.

Exercício 2.2.11. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de $\mathbb{R}$ tal que $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$, $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ e $x_n \neq x$ para todo n. Seja também $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de $\mathbb{R}$ tal que $y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ e $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Algumas aplicações

Com os resultados da seção passada, podemos discutir quando certos espaços são normais de forma simplificada. Vamos começar com o caso dos espaços métricos:

Definição 2.3.1. Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ conjuntos não vazios. Definimos $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso $A = \{a\}$, denotamos $d(A, B) = d(a, B)$ (analogamente para $B = \{b\}$).

Exemplo 2.3.2. Sejam (X, d) espaço métrico e $A \subset X$ um conjunto não vazio. Então, a função $f : X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, A)$ é contínua.

Demonstração. Seja $a \in A$ e sejam $x, y \in X$. Temos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Assim,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Analogamente, temos

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x).$$

Portanto, $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Com isso, temos que, dado $\varepsilon > 0$, para $x, y \in X$, temos que $d(x, y) < \varepsilon$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. O que mostra que tal função é contínua (ver Alongamento 2.1.17 e lembre que a métrica usual em $\mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$). $\square$

Corolário 2.3.3. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, (X, d) é normal.*

Demonstração. T_1 é imediato (já feito).

Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Considere a função $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, F)(1 - d(x, G))}{d(x, F) + d(x, G)}.$$

Note que f é como no Lema de Urysohn e portanto temos o resultado. □

A continuidade segue da continuidade de operações básicas (exercício) e de que composta de funções contínuas é contínua.

Vejamo agora uma maneira de usar os resultados anteriores para discutir quando certos espaços não são normais:

Exemplo 2.3.4. Considere (X, τ) como o plano de Niemytski (ver Exercício 1.3.36). Vamos mostrar que tal espaço não é normal. Faremos isso de duas maneiras (ambas usam um argumento de cardinalidade - escolha a que deixar você mais confortável).

Por ser T_1, afirmar que X não é normal equivale a afirmar que X não é T_4. Suponha, por absurdo, que X seja T_4. Note primeiramente que $R = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em X e, como R é discreto, qualquer subconjunto $F \subset R$ é fechado em R e, portanto, também é fechado em X. Note que F e $R \setminus F$ são disjuntos e fechados em X. Vamos agora terminar de duas maneiras diferente:

- Aplicando o Teorema de Tietze, temos que, para cada $F \subset R$, existe $f_F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f_F[F] = \{0\}$ e $f_F[R \smallsetminus F] = \{1\}$. Note que, se $F \neq G$, então $f_F \neq f_G$. Logo, temos uma quantidade maior ou igual que $|\wp(R)|$ de funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$. Por outro lado, seja $D \subset X$ denso enumerável. Então existem $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ funções (contínuas ou não) saindo de D e chegando em $\mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 2.2.2, existem, no máximo $|\mathbb{R}|$ funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$. Como $|\wp(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$, temos uma contradição.

  Isso é um fato que poder ser facilmente provado usando-se um pouco de teoria dos conjuntos.

- Aplicando diretamente o definição de T_4, para cada $F \subset R$, existem abertos (em X) $A(F)$ e $B(F)$ disjuntos tais que $F \subset A(F)$ e $R \setminus F \subset B(F)$.

  Vamos mostrar que, se $F \neq G$, então $A(F) \neq A(G)$. Sejam $F, G \subset R$ com $F \neq G$. Sem perda de generalidade, suponha $F \setminus G \neq \emptyset$. Como $F \setminus G = F \cap (R \setminus G)$, segue que $B(G) \cap A(F) \neq \emptyset$, mas como $A(G) \cap B(G) = \emptyset$, temos necessariamente $A(F) \neq A(G)$.

Seja D denso enumerável em X. Defina $A'(F) = A(F) \cap D$ e $B'(F) = B(F) \cap D$. Por argumentação análoga à anterior, vemos que se $F \neq G$, então $A'(F) \neq A'(G)$. Assim, obtemos $\varphi : \wp(R) \to \wp(D)$ dada por $\varphi(F) = A'(F)$, uma função injetora, o que é absurdo, uma vez que $|\wp(R)| > |\wp(D)|$.

Estas duas demonstrações apresentadas aqui podem ser generalizadas pelo Lema de Jones (ver Exercício 2.3.6).

Exercícios

Exercício 2.3.5. Seja (X, d) espaço métrico. Sejam $F \subset X$ fechado. Mostre que, dado $x \in X$, $d(x, F) = 0$ se, e somente se, $x \in F$.

Exercício 2.3.6. Prove o seguinte caso particular do **Lema de Jones**: Seja (X, τ) espaço topológico separável. Se existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $|D| = \mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo), então (X, τ) não é T_4.

2.4 Homeomorfismos

Nesta seção vamos apresentar como formalizar a ideia que dois espaços são o mesmo do ponto de vista topológico.

Definição 2.4.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um **homeomorfismo**, se f é bijetora, contínua e f^{-1} é contínua. Neste caso, dizemos que (X, τ) e (Y, σ) são **homeomorfos**.

Intuitivamente, mostrar que dois espaços dados são homeomorfos é "fácil": basta exibir um homeomorfismo. Por outro lado, mostrar que dois espaços não são homeomorfos costuma ser uma tarefa mais "difícil": precisamos mostrar que não existe um homeomorfismo. Nesse sentido, encontrar invariantes topológicos é bastante útil, já que se um dos espaços satisfaz algum invariante enquanto o outro não, já temos automaticamente a não existência de homeomorfismos.

É lógico que às vezes é difícil de encontrar um homeomorfismo, mas isso é outra história.

Por causa desse tipo de truque, na prática muitas vezes a situação é o inverso do que a intuição pode dizer num primeiro momento, já que em geral é muito mais fácil verificar invariantes do que construir homeomorfismos no braço.

Definição 2.4.2. Chamamos uma propriedade P de um **invariante topológico**, se ela é preservada por homeomorfismos (isto é, se (X, τ) e (Y, σ) são espaços homemorfos, então (X, τ) tem a propriedade P se, e somente se, (Y, σ) tem).

Exemplo 2.4.3. Todos os axiomas de separação e de enumerabilidade que apresentamos são invariantes topológicos. Por exemplo, provamos no Corolário 2.1.8 que se X é separável e $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetora, então Y também é separável. Assim, se f é um homeomoforfismo entre X e Y, temos que o fato de X ser separável implica Y ser separável. Já a função f^{-1} nos dá que Y ser separável implica que X também é. Veja também o Exercício 2.4.25.

Nem tudo que é discutido no âmbito de espaços métricos é topológico, como o próximo exemplo ilustra:

Exemplo 2.4.4. Seja o conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Sobre este conjunto podemos ter a métrica d_1, herdada da métrica usual em $\mathbb{R}$ e, também, podemos ter a métrica discreta d_2, dada por

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

O espaço (X, d_1) não é completo, pois $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em (X, d_1). Por outro lado, (X, d_2) é completo, pois com a métrica discreta, qualquer espaço é completo.

A métrica d_1 induz a topologia τ sobre X que é a topologia induzida de $\mathbb{R}$ sobre X. Por outro lado, a métrica d_2 induz a topologia discreta σ sobre X. Note que, neste caso, $\tau = \sigma$. Portanto, a função $f : (X, d_1) \to (X, d_2)$, dada por $f(x) = x$ é um homeomorfismo.

Veja o Alongamento 2.4.16

Logo, apesar da propriedade "ser sequência convergente" ser um invariante topológico, a propriedade "ser sequência de Cauchy" não é.

Vamos terminar esta seção mostrando alguns resultados envolvendo a topologia da ordem e dando uma caracterização para o reais (a menos de homeomorfismos).

Definição 2.4.5. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem total** se, para todo $x, y \in X$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 2.4.6. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado. Chamamos de **topologia da ordem** sobre $(X, \leq)$ a topologia gerada pelos seguintes conjuntos (para todo $a, b \in X$):

(a) $]a, b[= \{x \in X : a < x < b\}$;

(b) $[a, b[= \{x \in X : a \leq x < b\}$, caso $a = \min X$;

(c) $]a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$, caso $b = \max X$.

Exemplo 2.4.7. As topologias usuais sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ e $[0, 1]$ são as topologias induzidas pelas ordens usuais dos respectivos conjuntos.

Definição 2.4.8. Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ espaços ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e, para todo $a, b \in X$, temos $a \leq b$ se, e somente se, $f(a) \preceq f(b)$.

Definição 2.4.9. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem densa** se para todo $x, y \in X$, com $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Exemplo 2.4.10. Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $[0, 1]$ têm as ordens usuais densas enquanto $\mathbb{N}$ não tem.

Vamos apresentar uma maneira de caracterizar os reais com esta linguagem. Para isso, vamos apresentar antes outra caracterização interessante, mas esta sobre os racionais. O seguinte lema será bem útil na demonstração:

Lema 2.4.11. *Seja $\{a_0, ..., a_{n+1}\}$ conjunto totalmente ordenado e seja Y um conjunto totalmente ordenado com ordem densa e sem maior nem menor elemento. Dada $f : \{a_0, ..., a_n\} \longrightarrow Y$ função injetora que preserva ordem, existe $\tilde{f} : \{a_0, ..., a_{n+1}\} \longrightarrow Y$ extensão de f que é injetora e que preserva a ordem.*

Não estamos supondo aqui que os a_i's estão na ordem indicada.

Demonstração. Note que só precisamos definir $\tilde{f}(a_{n+1})$ de forma a preservar a ordem. Temos três casos. Caso 1, $a_{n+1} < a_k$ para todo $k \leq n$; caso 2, $a_{n+1} > a_k$ para todo $k \leq n$; caso 3, existem $i, j \leq n$ tais que $a_i < a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_j$. Vamos resolver o caso 3, os outros são análogos. Sejam

$$E = \max\{a_i : a_i < a_{n+1}, i \leq n\}$$

$$D = \min\{a_j : a_{n+1} < a_j, j \leq n\}$$

Note que, como a ordem de Y é densa, existe $y \in]f(E), f(D)[$. Defina $\tilde{f}(a_{n+1}) = y$. $\square$

Note que no caso 3 usamos que Y tem ordem densa. Faça um rascunho para perceber que a não existência de máximo e mínimo são usados nos outros dois casos.

Teorema 2.4.12. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo (e, portanto, homeomorfo) a $\mathbb{Q}$.*

Veja o Exercício 2.4.19

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para X. Seja, também, $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para $\mathbb{Q}$. Vamos definir indutivamente $f : X \to \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem. Primeiramente, definimos $f(x_0) = q_0$.

Agora aplique o lema anterior para os conjuntos $\{x_0, x_1\}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus \{q_0\}$. Desta forma, agora temos definidos $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Agora invertemos um pouco o papel e estendemos f^{-1} da seguinte forma: aplicamos o lema para $Im(f) \cup \{q_k\}$ e $X \smallsetminus dom(f)$ onde $k = \min\{n : q_n \notin Im(f)\}$. Daí estendemos f^{-1} para q_k. No passo seguinte, invertemos novamente e aplicamos o lema para $dom(f) \cup \{x_k\}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus Im(f)$, onde $k = \min\{n : x_n \notin dom(f)\}$ e estendemos f para x_k. Continuamos esse processo, sempre alternando a extensão (entre f e f^{-1}).

Note que, no final, temos que a f obtida preserva ordem e é injetora. Note que ela está definida para todo x_n, já que sempre tomamos o menor índice na hora de estender f e, da mesma forma, temos que f é sobrejetora pois sempre tomamos q_n de menor índice na hora de estender f^{-1}. $\square$

Finalmente, a caracterização para os reais:

Teorema 2.4.13. *Todo espaço totalmente ordenado, com ordem densa, sem maior nem menor elementos, completo e separável é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado. Seja $D \subset X$ denso e enumerável. Vamos mostrar que D satisfaz as hipóteses do teorema anterior (Teorema 2.4.12).

Suponha por contradição que D possua maior elemento m. Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $m < x_1 < x_2$ (tais elementos existem pois X não possui maior elemento). Note que $]m, x_2[\neq \emptyset$ e $]m, x_2[\cap D = \emptyset$. Mas isso é uma contradição pois D é denso em X. Analogamente, D não tem menor elemento.

Suponha que a ordem de D não seja densa. Então, existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $d_1 < d_2$ e $]d_1, d_2[\cap D = \emptyset$. Mas, como a ordem em X é densa, $]d_1, d_2[\neq \emptyset$, o que é, novamente, uma contradição com o fato de D ser denso em X.

Desta forma, podemos tomar $f : D \to \mathbb{Q}$ o isomorfismo dado pelo teorema anterior. Vamos estender f para X da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D, d \leq x\}$$

Note que, pela densidade de D, $\tilde{f}$ preserva a ordem. Pela completude de X, temos que $\tilde{f}$ é bijetora (veja o Exercício 2.4.18). $\square$

Corolário 2.4.14. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então, $]a, b[$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Alongamentos

Alongamento 2.4.15. Mostre que composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.

Alongamento 2.4.16. Mostre que "ser uma sequência convergente" é um invariante topológico.

Alongamento 2.4.17. Seja $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}$. Mostre que tal espaço e o espaço da sequência convergente (Exemplo 2.1.9) são homeomorfos.

Exercícios

Exercício 2.4.18. Mostre que a função $\tilde{f}$ construída na demonstração de 2.4.13 é bijetora.

Exercício 2.4.19. Se X e Y são conjuntos totalmente ordenados e com a topologia da ordem, mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo de ordem, então f é um homeomorfismo (quando X e Y são considerados com as topologias da ordem).

Exercício 2.4.20. Mostre que todo espaço com uma topologia da ordem sempre é de Hausdorff.

Exercício 2.4.21. Seja $(X, \leq)$ conjunto totalmente ordenado e com a topologia da ordem. Mostre que se X tem um **ponto isolado** (x é isolado se $\{x\}$ é aberto) então $\leq$ não é uma ordem densa. Dê um exemplo de que não vale a volta.

Exercício 2.4.22. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ são homeomorfos.

Exercício 2.4.23. Dizemos que (X, τ) é um **espaço homogêneo** se para todo $x, y \in X$, existe $f : X \longrightarrow X$ homomorfismo de forma que $f(x) = y$.

(a) Mostre que $\mathbb{R}$ é homogêneo.

(b) Mostre que $]a, b[$ é homogêneo.

(c) Mostre que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como no espaço da sequência convergente (Exemplo 2.1.9) não é homogêneo.

Exercício 2.4.24. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função aberta** se $f[A]$ é aberto para todo A aberto em X (definimos uma **função fechada** de maneira análoga). Mostre que, se f é um homeomorfismo, então f é aberta.

Exercício 2.4.25. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua, injetora e aberta. Mostre que, se $\mathcal{B}$ é uma base em Y, então $\{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base em X.

Capítulo 3

Produto

3.1 Definição e conceitos básicos

Nesta seção, vamos apresentar como fazer o produto entre espaços topológicos. Vamos começar com o produto finito e provar algumas propriedades básicas. Depois, quando fizermos o produto geral, veremos que esses resultados são casos particulares. Mas optamos por esta ordem para acostumar o leitor com algumas notações e ideias.

Definição 3.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Definimos a **topologia produto** sobre $X \times Y$ como a topologia gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.

Observação 3.1.2. Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases para (X, τ) e (Y, σ) respectivamente, então $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é base para $X \times Y$ (veja o Alongamento 3.1.10).

Proposição 3.1.3. *Se (X, τ) e (Y, σ) são espaços de Hausdorff, então $X \times Y$ também é.*

Demonstração. Sejam $(a, b), (x, y) \in X \times Y$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, $x \neq a$. Então, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U$ e $a \in V$. Note que $(x, y) \in U \times Y$, $(a, b) \in V \times Y$ e tanto $U \times Y$, quanto $V \times Y$, são abertos disjuntos. $\square$

Proposição 3.1.4. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo (Y, σ) espaço de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então, o* **gráfico** *de f ($G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$) é fechado em $X \times Y$.*

Demonstração. Seja $(x, y) \notin G$. Então, $y \neq f(x)$. Sejam $A, B \in \sigma$ disjuntos tais que $y \in A$ e $f(x) \in B$. Como f é contínua, seja V aberto de X tal que $x \in V$ e $f[V] \subset B$. Note que $(x, y) \in V \times A$ e $(V \times A) \cap G = \emptyset$. De fato, se $z \in V$, então $f(z) \in B$. Portanto, $f(z) \notin A$ e $(z, f(z)) \notin V \times A$. $\square$

Considere a função $\pi_X : X \times Y \to X$ dada por $\pi_X(x, y) = x$. Note que π_X é contínua ($\pi_X^{-1}[A] = A \times Y$). Esta função é chamada de **função projeção** em X. O fato de querermos que este tipo de função seja contínua motiva a definição da topologia produto em geral: faremos a "menor" topologia que faz com que estas funções sejam contínuas.

Definição 3.1.5. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, em que X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia fraca** induzida por $\mathcal{F}$ a topologia sobre X gerada pelos conjuntos da forma $f_\alpha^{-1}[V]$, onde $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$. Note que, desta forma, cada f_α é contínua (veja o Alongamento 3.1.13).

Agora temos todo o material para definir o produto no caso geral:

Definição 3.1.6. Seja $\big((X_\alpha, \tau_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Defina o **produto** dos $\big((X_\alpha, \tau_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$ como

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha\}$$

com a topologia fraca induzida pelas funções $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde cada $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \to X_\alpha$ é dada por $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\alpha$ (chamamos x_α de α-ésima **coordenada** de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$).

Esta topologia é chamada de **topologia produto** sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (ou **topologia de Tychonoff**).

Observação 3.1.7. Note que tal topologia é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

onde V é um aberto de X_α. Isso é verdade pois $\pi_\alpha^{-1}[V] = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Fechando tal família por interseções finitas, temos uma base para a topologia. Ou seja, uma base para tal espaço é formada por conjuntos da forma:

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

onde $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito e cada V_α é aberto em X_α. Chamaremos tais abertos de **abertos básicos** do produto. Neste caso, também se costuma chamar de **suporte** do aberto o conjunto finito $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$.

Em geral, produto de abertos não é aberto: por exemplo, o produto $A = \prod_{n \in \mathbb{N}}]0, 1 + n[$ não é um aberto em $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. De fato, o ponto $x = (\frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}} \in A$, mas não existe um aberto básico contendo x e contido em A. Para ver isso, suponha que V seja um aberto básico tal que $x \in V \subset A$. Seja n fora do suporte de V. Note que o ponto $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k \neq n \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é tal que $y \in V$ mas $y \notin A$.

Apesar de produto de abertos nem sempre ser aberto, o produto de fechados sempre é fechado:

Proposição 3.1.8. *Se $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família tal que cada F_α é um fechado em X_α, então $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \smallsetminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha$. Logo, existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \notin F_\alpha$. Note que $V = \prod_{\beta \in A} V_\beta$ onde

$$V_\beta = \begin{cases} X_\alpha \smallsetminus F_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

é um aberto tal que $x \in V$ e $V \cap \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. □

Vamos terminar esta seção mostrando como algumas propriedades de separação se comportam no produto:

Proposição 3.1.9. *Se cada X_α é T_i, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é T_i, para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

Discutiremos as propriedades $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_4 na próxima seção.

Demonstração. T_0 Exercício.

T_1 Pela proposição anterior e pela caracterização dos unitários serem fechados.

T_2 Sejam $x \neq y$ e $\alpha \in A$ tais que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Sejam U e V abertos disjuntos de X_α tais que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$. Note que $\prod_{\beta \in A} U_\beta$ e $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$U_\beta = \begin{cases} U & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são abertos que separam x e y.

Um dos erros mais comuns aqui é simplesmente tomar uma vizinhança fechada em cada coordenada e tomar o produto de todas elas. O problema é que, apesar disso ser fechado, não é vizinhança (lembrando que produto infinito de abertos não necessariamente é aberto).

T_3 Seja $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e seja $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ aberto básico (i.e., cada V_α é aberto em X_α e $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito). Para cada α tal que $V_\alpha \neq X_\alpha$ seja W_α aberto em X_α tal que $x_\alpha \in W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$ (usando T_3). Note que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^*$ é uma vizinhança fechada de x onde

$$W_\alpha^* = \begin{cases} \overline{W_\alpha}, & V_\alpha \neq X_\alpha \\ X_\alpha, & V_\alpha = X_\alpha \end{cases}$$

Note, também, que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^* \subset \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$.

□

Alongamentos

Alongamento 3.1.10. Sejam (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) espaços topológicos e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para eles respectivamente. Mostre que $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é uma base para $X_1 \times X_2$.

Alongamento 3.1.11. Mostre que um espaço (X, τ) é de Hausdorff se, e somente se, $D = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.

Alongamento 3.1.12. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos não vazios. Seja $y \in Y$.

(a) Mostre que (X, τ) é homeomorfo a $X \times \{y\}$;

(b) Se (Y, σ) é T_1, mostre que $X \times \{y\}$ é fechado (em $X \times Y$).

Alongamento 3.1.13. Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de funções da forma $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$. Mostre que a topologia fraca em X induzida por tal família é a menor topologia sobre X tal que cada f_α é contínua.

Exercícios

Exercício 3.1.14. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ família de espaços topológicos. Para cada $\alpha \in A$, seja $B_\alpha \subset X_\alpha$. Mostre que $\overline{\prod_{\alpha \in A} B_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha}$.

Exercício 3.1.15. Sejam (X_1, d_1) e (Y_1, d_1) espaços métricos.

(a) Mostre que $d_E : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica euclidiana**).

O melhor para fazer esse exercício é olhar os exercícios extras abaixo.

(b) Mostre que $d_T : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do taxista**).

(c) Mostre que $d_M : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do máximo**).

(d) Mostre que todas a métricas dos itens anteriores induzem a topologia do produto entre $X_1 \times X_2$ (e, portanto, são todas equivalentes).

Exercícios extras

Vamos apresentar aqui o conceito de norma que, em particular, ajuda a provar que a métrica euclidiana é de fato uma métrica.

Definição 3.1.16. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamos uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ de um **produto interno** se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$;

(b) $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda \langle a, b\rangle$;

(c) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$;

(d) $\langle a, a\rangle > 0$ se $a \neq 0$

Exercício 3.1.17. Mostre que $\langle (a, b), (x, y)\rangle = ax + by$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Este é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.1.18. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $a, b \in V$.

(a) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle a, b - \lambda a\rangle = 0$, onde $\lambda = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}$.

(b) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b\rangle = \langle b - \lambda a, b - \lambda a\rangle + \lambda^2 \langle a, a\rangle$, onde λ é o mesmo acima.

(c) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b\rangle \geq \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle}$.

(d) Mostre que $\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$. Esta é a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Definição 3.1.19. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$;

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercício 3.1.20. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$ Mostre que a função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ é uma norma sobre V. Chamamos tal norma de norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot, \cdot\rangle$.

Exercício 3.1.21. Dada uma $\|\cdot\|$, mostre que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica. Esta é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exercício 3.1.22. Mostre que a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é a métrica induzida pela norma induzida pelo produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

3.2 Algumas propriedades sobre produtos

Vamos começar esta seção provando que os axiomas de enumerabilidade são preservados por produtos enumeráveis. Alguns destes resultados podem ser melhorados - veja a seção de exercícios extras abaixo.

Proposição 3.2.1. *Seja $\big((X_n, \tau_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ família de espaços que satisfazem o i-ésimo axioma de enumerabilidade. Então, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também satisfaz o i-ésimo axioma de enumerabilidade.*

Demonstração.

- Primeiro axioma de enumerabilidade (base locais enumeráveis): seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Seja, também, $\mathcal{V}_n$ base local enumerável para cada x_n. Sem perda de generalidade, suponha que $X_n \in \mathcal{V}_n$. Note que

$$\{\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n : V_n \in \mathcal{V}_n, \{m \in \mathbb{N} : V_m \neq X_m\} \text{ é finito}\}$$

é enumerável[1] e é uma base local para x. De fato, seja $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aberto básico tal que $x \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \neq X_n$, seja $V_n \in \mathcal{V}_n$ de forma que $x_n \in V_n \subset A_n$ (existe pois $\mathcal{V}_n$ é base local para x_n). Para n tal que $A_n = X_n$, defina $V_n = X_n$. Note que

$$x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

- Segundo axioma de enumerabilidade (base enumerável): análogo (veja Alongamento 3.2.15).

- Terceiro axioma de enumerabilidade (separabilidade): para cada $n \in \mathbb{N}$, seja D_n denso enumerável em X_n. Fixe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Defina

$$\begin{aligned} D = \; & \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists F \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que, para todo } n \in F,\ y_n \in D_n \\ & \text{e, para todo } n \notin F,\ y_n = x_n\}. \end{aligned}$$

  Note que D é enumerável. Seja $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ aberto básico não vazio. Seja $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que, para $n \notin F$, $V_n = X_n$. Para cada $n \in F$, seja $y_n \in V_n \cap D_n$. Note que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, onde $y_n = x_n$, para $n \notin F$.

□

Vejamos agora o comportamento dos últimos axiomas de separação com relação ao produto, começando com a propriedade $T_{3\frac{1}{2}}$, que é preservada:

Proposição 3.2.2. *Se cada* (X_α, τ_α) *é* $T_{3\frac{1}{2}}$*, então* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *é* $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ e $F \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ fechado tal que $x \notin F$. Seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ um aberto básico tal que $x \in V$ e $V \cap F = \emptyset$. Seja $G = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in G$, seja $f_\alpha : X_\alpha \to [0,1]$ contínua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ e $f_\alpha[X_\alpha \setminus V_\alpha] = \{1\}$ (estamos usando $T_{3\frac{1}{2}}$ nas coordenadas).

Considere $f : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to [0,1]$ dada por $f(y) = \max\{f_\alpha(y_\alpha) : \alpha \in G\}$, onde $y = (y_\beta)_{\beta\in A}$. Note que $f(x) = 0$. Além disso, $f[F] = \{1\}$, pois se $y \in F$, então existe α tal que $y_\alpha \notin V_\alpha$, com $\alpha \in G$ (caso contrário, teríamos $V \cap F \neq \emptyset$) e, portanto, $f_\alpha(y_\alpha) = 1$. Resta provar que f é contínua. De fato, para cada $\alpha \in G$, defina $g_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. Note que cada g_α é contínua (pois é composta de contínuas) e também que $f(x) = \max\{g_\alpha(x) : \alpha \in G\}$. Assim, f é contínua (ver Alongamento 3.2.13). □

[1]Note que a quantidade de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável e que, para cada F finito fixado, só existe uma quantidade enumerável de possibilidades de abertos.

Agora veremos que a propriedade T_4 não é preservada:

Proposição 3.2.3. *$\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é um espaço normal, onde $\mathbb{R}_S$ é a reta de Sorgenfrey. Em particular, produto de espaços normais não é necessariamente normal.*

Demonstração. Considere $\mathbb{R}_S$. Como já vimos, $\mathbb{R}_S$ é normal. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Considere $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$. Note que D é discreto e fechado. De fato, os conjuntos da forma

$$[x, x+1[\cap[-x, -x+1[\cap D = \{(-x, x)\}$$

são abertos em D e, portanto, D é discreto. Para verificar que é fechado, basta notar que seu complementar é aberto (Exercício 3.2.14).

Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é separável. Logo, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um denso enumerável e um discreto fechado de tamanho contínuo. Logo, pelo Lema de Jones (Exercício 2.3.6), $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. □

O próximo resultado é um bom teste para verificação de continuidade de uma função:

Um bom teste para ver se você está entendo é ver quem são o domínio e o contra domínio de cada $\pi_\alpha \circ f$.

Teorema 3.2.4. *Seja $f : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $\alpha \in A$, $\pi_\alpha \circ f$ é contínua.*

Demonstração. Se f é contínua, então $\pi_\alpha \circ f$ é contínua (composta de contínuas). Por outro lado, seja $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ um aberto básico e $F = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ (note que F é finito). Temos assim

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}[V] & = & f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]\right] \\ & = & \bigcap_{\alpha \in F} (\pi_\alpha \circ f)^{-1}[V_\alpha]. \end{array}$$

Note que o último termo é aberto pois é interseção finita de abertos. □

Observação 3.2.5. Note que o uso do resultado anterior muitas vezes se dá nesta forma:

$f(x)$ dada por $(f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ é contínua se, e somente se, cada f_α é contínua.

Vamos agora caminhar para um teorema que iremos usar diversas vezes no texto: o Teorema da Imersão.

Definição 3.2.6. Sejam $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos, (X, τ) um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Chamamos de **função diagonal** a função

$$\begin{array}{rccc} \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : & X & \to & \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \\ & x & \mapsto & (f_\alpha(x))_{\alpha \in A} \end{array}$$

Observação 3.2.7. Se cada f_α é contínua, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é contínua (pela Proposição 3.2.4).

Veremos agora condições para que exista uma cópia de X dentro de um produto. Depois, veremos que tal produto tem boas propriedades, sendo algumas hereditárias - o que vai permitir concluir novas propriedades sobre o próprio X.

Definição 3.2.8. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **imersão** se $f : X \to f[X]$ é um homeomorfismo. Dizemos neste caso que Y contém uma **cópia** de X (como subespaço).

Definição 3.2.9. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha | \alpha \in A\}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ **separa pontos** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ **separa pontos de fechados** se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f[F]}$.

Teorema 3.2.10 (**Teorema da imersão**). *Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha | \alpha \in A\}$ família de funções contínuas. Se $\mathcal{F}$ separa pontos, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é injetora. Se, além disso, $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é uma imersão.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Então existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$. Logo

$$(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x))_\beta \neq (\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(y))_\beta$$

pois $\pi_\beta(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x)) = f_\beta(x)$ e $\pi_\beta(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(y))_\beta = f_\beta(y)$.

Já temos que a aplicação é contínua pela Observação 3.2.7. Do parágrafo acima, $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é injetora. Resta mostrar que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]$ é fechado (na imagem) para todo $F \subset X$ fechado (pois disso segue que sua inversa é contínua).

Seja $z \in \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]} \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[X]$ onde $z = (z_\alpha)_{\alpha\in A}$. Seja $x \in X$ tais que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = z$. Vamos mostrar que $x \in F$ (e, portanto, que $z \in \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]$). Suponha que não. Logo existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \notin \overline{f_\beta[F]}$ (pois tal família separa pontos de fechados). Seja $V_\beta \subset X_\beta$ aberto tal que $f_\beta(x) \in V_\beta$ e $V_\beta \cap f_\beta[F] = \emptyset$. Para todo $\alpha \in A$, com $\alpha \neq \beta$, denote $V_\alpha = X_\alpha$. Seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$. Note que $z \in V$, pois $z_\beta = f_\beta(x) \in V_\beta$. Note que $V \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F] = \emptyset$, pois $V_\beta \cap f_\beta[F] = \emptyset$. Logo $z \notin \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]}$, contradição. □

Já vamos mostrar uma aplicação importante (e um pouco surpreendente) de tal teorema:

Proposição 3.2.11. *Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Então $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] | f$ é contínua$\}$ separa pontos de fechados.*

Demonstração. Decorre diretamente da forma como construímos $\mathcal{F}$ e do fato de X ser completamente regular. □

O fato de podermos "colocar" X dentro de um espaço desta forma terá muitas consequências interessantes.

Corolário 3.2.12. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe A tal que (X, τ) é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A}[0,1]$.*

Demonstração. Como $[0,1]$ é completamente regular, $\prod_{\alpha \in A}[0,1]$ é completamente regular e, portanto, qualquer um de seus subespaços também é. Reciprocamente, se (X, τ) for completamente regular, basta notar que $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] | f$ é contínua$\}$ separa pontos de fechados. Assim, o resultado segue pelo Teorema da Imersão. □

Alongamentos

Alongamento 3.2.13. Mostre que, se $f_1, ..., f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $g(x) = \max\{f_1(x), ..., f_n(x)\}$ é contínua (isso termina a demonstração da Proposição 3.2.2).

Alongamento 3.2.14. Mostre que o conjunto D construído na demonstração da Proposição 3.2.3 é fechado.

Alongamento 3.2.15. Mostre que, se cada $(X_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem base enumerável, então $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ também tem base enumerável.

Alongamento 3.2.16. Mostre diretamente que se (X, τ) e (Y, σ) são separáveis, então $X \times Y$ é separável.

Exercícios

Exercício 3.2.17. Considere $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ espaços métricos. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada d_n é limitada por 1 (ver o Exercício 1.1.68).

(a) Mostre que $d : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sup\{d_n(x(n), y(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma métrica sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Esta é chamada de **métrica produto**.

(b) Mostre que não necessariamente a topologia induzida pela métrica produto é a mesma que a topologia produto (induzida pela topologia de cada uma das coordenadas). Uma delas tem mais abertos que a outra. Qual?

(c) Mostre que se o produto tiver apenas finitas coordenadas, ambas topologias coincidem.

Exercício 3.2.18. O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathbb{R}_S$ (reta de Sorgenfrey) não tem base enumerável de uma maneira alternativa.

(a) Suponha que $\mathbb{R}_S$ tem base enumerável. Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ também tem.

(b) Considere D o conjunto determinado em 3.2.3. Note que tal conjunto não tem base enumerável.

(c) Lembre que subsespaço de conjunto com base enumerável também tem base enumerável. Chegue numa contradição.

Exercício 3.2.19. Mostre que se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família não enumerável tal que cada X_i tem pelo menos dois pontos, então todo G_δ (intersecção enumerável de abertos) não vazio em $\prod_{i \in I} X_i$ tem pelo menos dois pontos.

3.3 Exercícios extras

Aqui vamos apresentar o resultado que mostra que a separabilidade ainda é preservada, mesmo com produtos de comprimento contínuo. Nestes exercícios, vamos usar um pouco mais de argumentos de teoria dos conjuntos do que o usual neste texto.

Exercício 3.3.1. O objetivo deste exercício é mostrar que $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$ é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$ ($\mathbb{N}$ com a topologia usual).

(a) Note que podemos supor sem perda de generalidade que $A \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{]p, q[\cap A : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Note que $\mathcal{B}_0$ é enumerável.

(b) Para cada $n > 0$, defina $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}_0$ com exatamente n elementos e que sejam 2-2 disjuntos. Note que cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável (use o fato que a quantidade de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável).

(c) Fixe $n \geq 1$. Para cada $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$ e cada $\{J_1, ..., J_n\} \in \mathcal{B}_n$ (vamos supor que $J_i < J_j$ se $i < j$ Isto é, todo elemento de J_i é menor que todo elemento de J_j). Defina $f_{(a_1,...,a_n),\{J_1,...,J_n\}} : A \longrightarrow \mathbb{N}$ por

$$f_{(a_1,...,a_n),\{J_1,...,J_n\}}(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{se } \alpha \in J_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que o conjunto de todas estas funções é enumerável (com n fixado). Seja D o conjunto de todas essas funções (com n variando). Note que D também é enumerável.

(d) Note que $D \subset \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

(e) Mostre que D é denso em $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

Exercício 3.3.2. O objetivo deste exercício é mostrar que se cada (X_α, τ_α) é separável, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ também é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$.

(a) Fixe $D_\alpha \subset X_\alpha$ denso enumerável em cada X_α. Mostre que $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$;

(b) Para cada $\alpha \in A$, seja $\varphi_\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow D_\alpha$ bijetora. Note que cada φ_α é contínua.

(c) Defina $f : \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$. Mostre que f é contínua.

(d) Conclua que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é separável.

3.4 Topologia forte

Nesta seção vamos apresentar uma maneira de se obter uma topologia a partir de uma família de funções (uma outra maneira, chamada de topologia fraca, será apresentada posteriormente). A ideia aqui é começar com uma família $\mathcal{F}$ de funções cujos domínios são espaços topológicos e o contradomínio é um mesmo conjunto X. Daí definimos uma topologia sobre X de forma que todas essas funções sejam contínuas. Além disso, pedimos que essa topologia seja maximal com relação a tal propriedade.

Definição 3.4.1. Considere $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ família de funções, onde cada $f_i : Y_i \to X$, onde (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia forte** em X induzida por $\mathcal{F}$ a maior topologia sobre X tal que cada f_i é contínua.

Primeiramente, note que não é tão claro que tal topologia existe de fato. Isso é resolvido com o próximo resultado - nele exibimos uma topologia (descrevendo quem são os abertos) e provamos que ela (é a única que) tem a propriedade acima.

Proposição 3.4.2. *Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ família de funções da forma $f_i : Y_i \to X$ onde cada (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Então $\tau = \{V \subset X : f_i^{-1}[V] \in \tau_i$ para todo $i \in I\}$ é a topologia forte sobre X.*

Demonstração. Note que, de fato, τ é uma topologia sobre X. Note também que com relação a τ, toda f_i é contínua. Além disso, se ρ é uma topologia tal que cada f_i é contínua, então $\rho \subset \tau$. $\square$

Proposição 3.4.3. *Seja $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ família de funções da forma $f_i : Y_i \to X$ onde cada (Y_i, τ_i) é um espaço topológico. Seja τ uma topologia sobre X. Então τ é a topologia forte induzida por $\mathcal{F}$ se, e somente se, vale o seguinte critério: dada $g : X \to Z$, onde Z é um espaço topológico, g é contínua se, e somente se, cada $g \circ f_i : Y_i \to Z$ é contínua.*

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g \circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponha τ a topologia forte e seja $g : X \to Z$. Se g é contínua, então $g \circ f_i$ é contínua simplesmente por composição de funções contínuas. Agora suponha que cada $g \circ f_i$ é contínua. Vamos mostrar que g é contínua. Seja V aberto em Z. Então, por continuidade, $(g \circ f_i)^{-1}[V]$ é aberto em Y_i para todo $i \in I$. Ou seja, $f_i^{-1}\big[g^{-1}[V]\big]$ é aberto para todo $i \in I$. Pelo resultado anterior, obtemos que $g^{-1}[V]$ é aberto, como queríamos.

Agora suponha que o critério é verdadeiro. Vamos mostrar que τ é a topologia forte. Note que $Id : X \to X$ é uma função contínua. Logo, pelo critério, cada $f_i = Id \circ f_i$ é contínua. Pela maximalidade, temos que τ está contida na topologia forte. Considere novamente a função $Id : X \to X$, mas considere no X da imagem a topologia forte. Assim, cada $f_i = Id \circ f_i$ é contínua. Logo, pelo critério, Id é contínua. Desta forma, a topologia forte está contida em τ como queríamos. $\square$

Uma aplicação dessa técnica é a topologia quociente:

Definição 3.4.4. Seja (X, τ) um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Chamamos de **topologia quociente** sobre $X/\!\sim$ a topologia forte induzida pela família $\{\pi\}$ onde $\pi : X \to X/\!\sim$ é a função projeção - isto é, $\pi(x) = \tilde{x}$, onde $\tilde{x} = \{y \in X : x \sim y\}$.

Automaticamente, pelos resultados anteriores, obtemos:

Corolário 3.4.5. *Sejam (X, τ) espaço topológio e $\sim$ uma relação de equivalência sobre X. Então a topologia quociente sobre $X/\!\sim$ é o conjunto $\{V \subset X/\!\sim\, : \pi^{-1}[V] \in \tau\}$.*

Corolário 3.4.6. *Sejam* (X, τ) *espaço topológio e* $\sim$ *uma relação de equivalência sobre* X*. Seja* ρ *uma topologia sobre* $X/\sim$*. Então* ρ *é a topologia quociente se, e somente se, para toda* $g : X/\sim \to Z$*,* g *é contínua se, e somente se,* $g \circ \pi$ *é contínua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g \circ \pi"'] & X/\sim \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Ou seja, se $x \neq y$ e $x \sim y$, então eles são pontos que testemunham o fato de X não ser T_0.

Exemplo 3.4.7. Considere (X, τ) espaço topológico. Defina $x \sim y$ para $x, y \in X$ se, para todo $V \in \tau$, $x \in V$ se, e somente se, $y \in V$. Note que, de fato, $\sim$ é uma relação de equivalência sobre X. Vejamos que $X/\sim$ é um espaço T_0. Sejam $\tilde{x}, \tilde{y} \in X/\sim$ com $\tilde{x} \neq \tilde{y}$. Sem perda de generalidade, existe V aberto tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Vamos mostrar que $\pi[V]$ é aberto em $X/\sim$ (e isso é suficiente, uma vez que $\tilde{x} \in \pi[V]$ e $\tilde{y} \notin \pi[V]$). Note que para isso é suficiente mostrarmos que $\pi^{-1}[\pi[V]] = V$. Note que $V \subset \pi^{-1}[\pi[V]]$. Resta a outra inclusão. Seja a tal que $\pi(a) \in \pi[V]$. Ou seja, existe $v \in V$ tal que $a \sim v$. Logo, como $v \in V$, temos que $a \in V$ como queríamos.

Podemos identificar quando um espaço pode ser visto como quociente de outro espaço:

Proposição 3.4.8. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, ρ) *espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *sobrejetora. Se, para cada* $V \subset Y$*, temos* $V \in \rho$ *se, e somente se,* $f^{-1}[V] \in \tau$*, então existe uma relação de equivalência* $\sim$ *sobre* X *e* $\varphi : Y \to X/\sim$ *homeomorfismo tal que* $\pi = \varphi \circ f$*.*

Demonstração. Defina $a \sim b$ se $f(a) = f(b)$. Note que isso é uma relação de equivalência sobre X. Daí basta tomar φ dada por $\varphi(y) = x_y$ onde $x_y \in X$ é tal que $f(x_y) = y$. □

Exemplo 3.4.9. Considere $[0, 1]$ com a topologia usual. Considere a relação que identifica $0 \sim 1$, deixando os outros pontos não identificados. Note que $[0, 1]/\sim$ é homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exemplo 3.4.10. Considere

$$X = \{(n, \frac{1}{k}) : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{(n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$$

com a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

Considere também a seguinte relação de equivalência sobre X:

$$x \sim y \text{ se, e somente se,}$$

$$x = y \text{ ou } (x = (n, 0) \text{ e } y = (m, 0)) \text{ para algum } m, n \in \mathbb{N}$$

Vamos chamar de F o espaço $X/\sim$ com a topologia quociente. Este exemplo é conhecido como **fan space**.

Note que este espaço é enumerável. Vamos mostrar que o ponto $\widetilde{(0,0)}$ não tem base enumerável. Note que para cada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, o seguinte conjunto é uma vizinhança aberta de $\widetilde{(0,0)}$

$$A_f = \{\widetilde{(0,0)}\} \cup \{\widetilde{(n, \frac{1}{k})} : n \in \mathbb{N}, k > f(n)\}$$

Note também que $\{A_f | f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ é uma base para $\widetilde{(0,0)}$. Suponha que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base para $\widetilde{(0,0)}$. Então existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{A_{f_n} : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para $\widetilde{(0,0)}$. Considere $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(k) = \max\{f_i(k) : i \leq k\} + 1$$

Vamos mostrar que $A_{f_n} \not\subset A_g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (note que isso implica que $\{A_{f_n} : n \in \mathbb{N}\}$ não é base. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Note que $\widetilde{(n, \frac{1}{f_n(n)+1})} \in A_{f_n} \smallsetminus A_g$.

Exercícios

Exercício 3.4.11. Mostre que o fan space não é metrizável.

Exercício 3.4.12. O fan space tem sequências convergentes não triviais?

Exercício 3.4.13. Dê um exemplo de um espaço quociente tal que existe V aberto tal que $\pi[V]$ não seja aberto.

Capítulo 4

Compactos

4.1 Definição e propriedades básicas

Uma das propriedades topológicas mais importantes é a compacidade:

Definição 4.1.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura** (ou **recobrimento**) de X se $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Neste caso, chamamos $\mathcal{A}$ de **cobertura aberta** se os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos.

Definição 4.1.2. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço compacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X existe uma **subcobertura** $\mathcal{A}'$ (i.e., $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X$) finita.

Exemplo 4.1.3. Qualquer espaço finito é compacto.

Vamos apresentar agora um conceito que vai nos ajudar a mostrar que certos espaços são compactos:

Definição 4.1.4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **sub-base** para X se $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para X.

Uma sub-base é algo que, se fecharmos por intersecções finitas, vira uma base

O próximo resultado é útil para mostrar que certos espaços são compactos e será bastante útil na prova do Teorema de Tychonoff na próxima seção.

Proposição 4.1.5 (**Lema da sub-base de Alexander**). *Sejam (X, τ) espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma sub-base para X. Se toda cobertura para X feita por elementos de $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita, então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que X não seja compacto. Considere $\mathcal{C}$ a família de todas as coberturas abertas para X que não possuam subcobertura finita. Note que, se $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathcal{C}$, então $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{C}$ (ver Alongamento 4.1.22). Desta forma, pelo Lema de Zorn, podemos tomar $C \in \mathcal{C}$ elemento maximal. Vamos provar que $C \cap \mathcal{B}$ é uma cobertura para X. Note que isso é uma contradição, já que, desta forma, C admite subcobertura finita e portanto não pertence a $\mathcal{C}$.

Suponha que $C \cap \mathcal{B}$ não seja uma cobertura. Então existe $x \in X$ tal que $x \notin B$ para todo $B \in C \cap \mathcal{B}$. Mas, como C é cobertura, existe $A \in C$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{B}$ é sub-base, existem $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}$ tais que

$$x \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset A.$$

Como x não é coberto por $C \cap \mathcal{B}$, temos que cada $B_i \notin C \cap \mathcal{B}$. Ou seja, cada $B_i \notin C$. Pela maximalidade de $\mathcal{C}$, temos que, para cada $i = 1, ..., n$, $C \cup \{B_i\}$ admite subcobertura finita, digamos $\{B_i\} \cup C_i$, onde $C_i \subset C$ é finito. Vamos mostrar que $\{A\} \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ é uma cobertura para X (o que é uma contradição, já que tal família seria uma subcobertura finita de C). De fato, temos

$$\begin{array}{rcl} A \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup C_i & \supset & \bigcap_{i=1}^n B_i \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup C_i \\ & \supset & \bigcap_{i=1}^n B_i \cup \bigcup C_i \\ & = & X \end{array}$$

□

Em particular, obtemos o seguinte resultado que é o que o mais usado na prática:

Proposição 4.1.6. *A afirmação "toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita" é equivalente a ser compacto.*

Esse resultado tem uma demonstração direta, sem uso do Lema da sub-base (veja o Alongamento 4.1.23). Mas com o Lema da sub-base, podemos provar de maneira fácil o seguinte resultado:

Veja uma demonstração direta desse resultado no Exercício 4.1.32

Proposição 4.1.7. *O intervalo* $[0, 1]$ *com a topologia usual é compacto.*

Demonstração. Note que $\mathcal{B} = \{[0, b[: b \in]0, 1]\} \cup \{]a, 1] : a \in [0, 1[\}$ é uma sub-base para $[0, 1]$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ uma cobertura para $[0, 1]$. Seja

Note que tal conjunto é não vazio já que alguém precisa cobrir 0.

$$\beta = \sup\{b \in [0, 1] : [0, b[\in \mathcal{C}\}$$

Note que o próprio β não é coberto por algum conjunto da forma $[0, b[\in \mathcal{C}$. Assim, existe a tal que $]a, 1] \in \mathcal{C}$ e $\beta \in]0, 1]$. Seja b tal que $a < b < \beta$ e tal que $[0, b[\in \mathcal{C}$ (existe por β ser supremo). Note que $[0, b[\cup]a, 1] = [0, 1]$. □

Ao contrário do intervalo $[0,1]$ ser compacto, a reta toda não é.

Exemplo 4.1.8. Com a topologia usual, $\mathbb{R}$ não é compacto. Para ver isso, basta tomar a cobertura $\{]-n,n[: n \in \mathbb{N}\}$.

Como verificar a compacidade pela definição muitas vezes é trabalhoso, o seguinte resultado é bem prático:

Proposição 4.1.9. *Seja (X,τ) espaço compacto e seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para F e, para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Seja $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Note que $\mathcal{A}^* \cup \{X \smallsetminus F\}$ é uma cobertura aberta para X. Como X é compacto, tal cobertura admite subcobertura finita $\mathcal{B}$. Note, também, que $\mathcal{B} \smallsetminus \{X \smallsetminus F\}$ induz uma subcobertura finita de $\mathcal{A}$. □

Se um espaço é de Hausdorff, ele separa pontos de compactos (vamos ver que dá para melhorar ainda mais esse resultado depois).

Lema 4.1.10. *Seja (X,τ) um espaço de Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subset X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem A e B abertos tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $y \in K$, sejam A_y e B_y abertos tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem $y_1, \ldots, y_n \in K$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset K$. Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \qquad \textbf{e} \qquad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Note que ambos são abertos, $x \in A$ e $F \subset B$. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $z \in A \cap B$. Seja i tal que $z \in B_{y_i}$. Note que, assim, $z \in A_{y_i}$, que é contradição com o fato que $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$. □

Uma implicação do resultado anterior é que em espaços de Hausdorff, os compactos são fechados:

Proposição 4.1.11. *Sejam (X,τ) espaço de Hausdorff e $F \subset X$ compacto. Então F é fechado.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se $x \notin F$, existe A aberto tal que $x \in A \subset X \smallsetminus F$. □

Juntanto com o que tínhamos antes, temos que em compactos de Hausdorff, os fechados são exatamente os compactos:

Corolário 4.1.12. *Sejam (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff e $F \subset X$ um conjunto. Então, F é fechado se, e somente se, F é compacto.*

Vamos ver que, na verdade, espaços de Hausdorff separam compactos disjuntos.

Proposição 4.1.13. *Seja (X, τ) espaço Hausdorff. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.*

Demonstração. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Pelo Lema 4.1.10, para cada $y \in G$, existem A_y, B_y abertos tais que $A_y \supset F$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto, existem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset G$. Sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i} \qquad \textbf{e} \qquad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}.$$

Note que A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. □

Com isso, temos que em espaços compactos, basta a propriedade de Hausdorff para termos a normalidade:

Proposição 4.1.14. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar o resultado anterior. □

Outro resultado importante sobre a compacidade é que ela é preservada pela continuidade:

Proposição 4.1.15. *Sejam (X, τ), (Y, σ) espaços topológicos onde X é compacto e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Então Y é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para Y. Note que $\mathcal{B} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$ é uma cobertura aberta para X. Então, existe $\mathcal{B}'$ subcobertura finita. Assim, se para cada $B \in \mathcal{B}'$ tomamos $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B = f^{-1}[A_B]$, temos que $\{A_B \in A : B \in \mathcal{B}'\}$ é uma subcobertura finita para Y. □

Corolário 4.1.16. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo Y espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $F \subset X$ é compacto, então $f[F]$ é fechado.*

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior e da Proposição 4.1.11. □

Corolário 4.1.17. *Sejam (X, τ) e (Y, τ) espaços de Hausdorff, sendo X compacto, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta usar o resultado que se imagem inversa de fechado é fechado, então a função é contínua (Alongamento 2.1.14). □

Vamos agora olhar para uma versão local da compacidade:

Definição 4.1.18. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é **localmente compacto** se todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Para espaços de Hausdorff, a propriedade global implica na local:

Proposição 4.1.19. *Se (X, τ) é um espaço compacto de Hausdorff, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Note que X é regular. Portanto, todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, logo, compactas. □

Já a propriedade local não implica na global:

Exemplo 4.1.20. Com a topologia usual, $\mathbb{R}$ é localmente compacto, pois cada $[a, b]$ é compacto (ver Alongamento 4.1.30).

Vimos que, para espaços de Hausdorff, a compacidade implica na normalidade. Para espaços localmente compactos, conseguimos garantir a propriedade de ser completamente regular:

Proposição 4.1.21. *Seja (X, τ) um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então (X, τ) é completamente regular.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $x \in X \smallsetminus F$, que é aberto. Logo, existe V vizinhança compacta de x, tal que $V \subset X \smallsetminus F$. Seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $V \smallsetminus A$ é fechado (em V). Como V é compacto, V é completamente regular (pois é normal).

Então existe $g : V \to [0,1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $g[V \smallsetminus A] = \{1\}$. Defina $f : X \to [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in V \\ 1, & x \notin V \end{cases}$$

Note que f é a função desejada (veja Alongamento 4.1.28). $\square$

Alongamentos

Alongamento 4.1.22. Mostre que se $\mathcal{S}$ é uma cadeia de coberturas para um espaço, cada uma delas sem subcobertura finita, então $\bigcup \mathcal{S}$ também é uma cobertura sem subcobertura finita.

Alongamento 4.1.23. Mostre sem usar o Lema da Sub-base que a seguinta afirmação é equivalente a ser compacto: "toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita".

Alongamento 4.1.24. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ). Mostre que $\mathcal{B}$ é um recobrimento aberto para (X, τ).

Alongamento 4.1.25. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é compacta.

Alongamento 4.1.26. Caracterize os compactos discretos.

Alongamento 4.1.27. Dizemos que uma família de subconjuntos $\mathcal{F}$ satisfaz a **propriedade da intersecção finita** (**p.i.f.**) se, para todo $F \subset \mathcal{F}$ finito, temos que $\bigcap_{G \in F} G \neq \emptyset$. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que "X ser compacto" é equivalente a "toda $\mathcal{F}$ família de fechados de X com p.i.f., é tal que $\bigcap_{G \in \mathcal{F}} G \neq \emptyset$".

Alongamento 4.1.28. Mostre que a função f da Proposição 4.1.21 é a função desejada.

Alongamento 4.1.29. Mostre que compacidade é um invariante topológico (isto é, é preservada via homeomorfismos).

Alongamento 4.1.30. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $[a, b]$ é compacto (na topologia usual).

Alongamento 4.1.31. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Mostre que (X, τ) é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e $\overline{V}$ é compacto.

Exercícios

Exercício 4.1.32. Este é um roteiro para mostrar diretamente que $[0,1]$ é compacto (sem usar o Lema da sub-base). Considere $\mathcal{A}$ uma cobertura feita por abertos básicos. Considere

$$C = \{x \in [0,1] : \exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ finito, com } \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset [0,x]\}$$

(a) Mostre que existe $\alpha = \sup C$.

(b) Mostre que $\alpha = 1$.

(c) Encontre a subcobertura finita.

Exercício 4.1.33. Mostre que $[0,1]$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Exercício 4.1.34. Seja (X,d) espaço métrico. Mostre que se $F \subset X$ é compacto, então F é fechado e limitado (um conjunto A é dito **limitado** se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $A \subset B_r(x)$ para algum $x \in X$).

Exercício 4.1.35. Seja (X,τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\overline{V}$ é compacto para cada $V \in \mathcal{V}$.

Exercício 4.1.36. Seja (X,τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, para todo $x \in X$ existe K vizinhança compacta de x.

Exercício 4.1.37. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é localmente compacta.

Exercício 4.1.38. Seja (X,τ) espaço de Hausdorff. Dizemos que (Y,σ) espaço de Hausdorff é uma **compactificação** de X se X é um subsespaço denso de Y e (Y,σ) é compacto. Dizemos que uma compactificação (Y,σ) é uma **compactificação de Alexandroff** se $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$.

(a) Seja (X,τ) espaço topológico de Hausdorff que admite uma compactificação. Mostre que (X,τ) é completamente regular.

(b) Considere (X,τ) espaço localmente compacto. Defina $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$. Defina σ topologia sobre Y de forma que $\tau \subset \sigma$ e todo $\{x\} \cup (X \smallsetminus K) \in \sigma$ onde $K \subset X$ é compacto. Mostre que (Y,σ) é uma compactificação de Alexandroff de X.

(c) Seja (X, τ) espaço de Hausdorff e suponha que exista (Y, σ) compactificação de Alexandroff para X. Mostre que (X, τ) é localmente compacto.

(d) Conclua que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, admite uma compactificação de Alexandroff.

4.2 Teorema de Tychonoff

Com o Lema da Sub-base fica fácil mostrar o Teorema de Tychonoff:

Teorema 4.2.1 (de Tychonoff). *Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ família de espaços compactos. Então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é compacto.*

Demonstração. Pelo Lema da Sub-base, basta mostrar que toda cobertura C para $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ feita por abertos da forma $\pi_\alpha^{-1}[V]$ onde V é aberto em X_α, admite subcobertura finita.

Para cada α, seja

$$C_\alpha = \{V \in \tau_\alpha : \pi_\alpha^{-1}[V] \in C\}.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha \in A$ tal que C_α é uma cobertura para X_α. Suponha que não. Então para cada $\alpha \in A$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup C_\alpha$. Note que $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \notin \bigcup C$, contradição.

Seja $\beta \in A$ tal que C_β é cobertura para X_β. Como X_β é compacto, existem $V_1, ..., V_n \in C_\beta$ tais que $X_\beta = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Note que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \pi_\beta^{-1}[V_i]$. Como cada $\pi_\beta^{-1}[V_i] \in C$, obtemos o resultado. □

Com este resultado, podemos caracterizar a topologia produto de uma maneira um tanto quanto inesperada:

Proposição 4.2.2. *Seja (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre X. Então, (X, σ) não é compacto.*

Demonstração. Seja $A \in \sigma \smallsetminus \tau$. Então, $X \smallsetminus A$ não é fechado em (X, τ). Logo, $X \smallsetminus A$ não é compacto em (X, τ). Seja $\mathcal{C}$ cobertura (em τ) para $X \smallsetminus A$ que não admite subcobertura finita.

Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em σ) sem subcobertura finita. Logo, (X, σ) não é compacto. □

Teorema 4.2.3. *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

Demonstração. Seja τ a topologia produto e σ uma topologia satisfazendo o enunciado. Pela definição de τ, se σ é tal que as projeções são contínuas, então $\tau \subset \sigma$. Por outro lado, se $\tau \subsetneq \sigma$, pelo resultado anterior, o produto não é compacto. Logo, $\tau = \sigma$. $\square$

Também conseguimos uma caracterização para os espaços completamente regulares:

Proposição 4.2.4. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe (Y, σ) compacto de Hausdorff tal que $X \subset Y$.*

Demonstração. Se existe tal Y, então Y é normal e, portanto, X é completamente regular. Por outro lado, se X é completamente regular, temos que X é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A}[0, 1]$ (ver Corolário 3.2.12) que é compacto. $\square$

Alongamentos

Alongamento 4.2.5. Mostre a volta do Teorema de Tychonoff: Se $\prod_{\alpha X_\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$ é compacto, então cada X_α é compacto.

Exercícios

Exercício 4.2.6. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Chamamos de **topologia da caixa** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ onde cada V_α é aberto em X_α.

Aqui deixamos de pedir que o suporte dos abertos básicos seja finito.

(a) Mostre que a topologia da caixa contém a topologia produto.

(b) Considere $\{0, 1\}$ com a topologia discreta. Note que $\prod_{n \in \mathbb{N}}\{0, 1\}$ é compacto com a topologia produto. Mostre que $\prod_{n \in \mathbb{N}}\{0, 1\}$ é discreto (e infinito) com a topologia da caixa (e, portanto, não é compacto).

Exercício 4.2.7. Considere $\mathbb{R}_S$ a reta de Sorgenfrey.

(a) Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é completamente regular mas não é normal.

(b) Mostre que existe K compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \subset K$.

(c) Conclua que nem todo subespaço de espaço normal é normal.

(d) Generalize o resultado anterior: Todo espaço completamente regular que não é normal gera um exemplo de espaço normal com um subespaço não normal.

Exercícios extras

Vamos apresentar uma demonstração alternativa para o Teorema de Tychonoff. O roteiro dela é o seguinte: caracterizamos a compacidade em termos de ultrafiltros e depois provamos a caracterização no produto, usando que ela vale em cada coordenada.

Definição 4.2.8. Seja X um conjunto. Dizemos que $F \subset \wp(X)$ é um **filtro** sobre X se

(a) $\emptyset \notin F$ (condição de não trivialidade);

(b) se $a, b \in F$, então $a \cap b \in F$;

(c) se $a \in F$ e $b \supset a$, então $b \in F$.

Dizemos que F é um **ultrafiltro** se F é maximal (i.e., se $G \supset F$ é um filtro, então $G = F$).

Exercício 4.2.9.). Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : A \text{ é vizinhança de } x\}$ é um filtro sobre x.

Exercício 4.2.10. Seja X um conjunto e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro.

Exercício 4.2.11. Sejam $X \neq \emptyset$ e $F \subset \wp(X)$ com a propriedade da intersecção finita. Mostre que

$$F' = \{A \subset X : \exists B_1, ..., B_n \in F, \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset A\}$$

é um filtro sobre X (o chamamos de **filtro gerado** por F).

Exercício 4.2.12. Seja F um ultrafiltro e seja $Y \notin F$. Mostre que existe $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.

Exercício 4.2.13. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) F é ultrafiltro;

(ii) para todo $Y \subset X$, temos que $Y \in F$ ou $X \smallsetminus Y \in F$.

Exercício 4.2.14. Seja (X, τ) infinito. Considere $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \smallsetminus F \text{ é finito}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ satisfaz a p.i.f.

(b) Mostre que qualquer $G \subset \mathcal{F}$ ultrafiltro não é da forma $\{A \subset X : x \in A\}$ para algum $x \in X$. Note que, de fato, existe algum $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercício 4.2.15. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma cadeia de subconjuntos de X, cada um deles com a propriedade da intersecção finita. Então, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ tem a propriedade da intersecção finita. ($\mathcal{F}$ é uma cadeia se para todo $A, B \in \mathcal{F}$ temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.)

Exercício 4.2.16. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. Então, existe $G \supset F$ que é ultrafiltro sobre X.

Definição 4.2.17. Sejam (X, τ) um espaço topológico e F um filtro sobre X. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto aderente** a F se, para todo $A \in F$, temos $x \in \overline{A}$.

Dizemos que F **converge** para X se, para toda vizinhança de x, temos que $V \in F$. (Notação: $F \to x$.)

Exercício 4.2.18. Mostre que se (X, τ) é de Hausdorff, então cada ultrafiltro sobre X converge para, no máximo, um ponto.

Exercício 4.2.19. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são equivalentes:

(i) (X, τ) é compacto;

(ii) Todo filtro sobre X tem ponto aderente;

(iii) Todo ultrafiltro sobre X converge.

Exercício 4.2.20. Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(a) Mostre que, se $F \in \mathcal{F}$, então $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[F]] \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in A$.

(b) Mostre que, para todo $\alpha \in A$, $\{\pi_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é ultrafiltro sobre X_α.

Exercício 4.2.21 (**Teorema de Tychonoff**)**.** Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma famíla de espaços topológicos compactos. Então, $X = \prod X_\alpha$ é compacto.

4.3 Algumas aplicações

Nesta seção vamos trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade:

Definição 4.3.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \smallsetminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A, então $x \in \overline{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (veja o Alongamento 4.3.14).

Proposição 4.3.2. *Seja (X, τ) espaço T_1. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.*

Demonstração. Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \smallsetminus (V \cap (A \smallsetminus \{x\}))$ um aberto tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \smallsetminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A. $\square$

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos:

Proposição 4.3.3. *Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A. Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, ..., x_n\}$, contradição com a infinitude de A. $\square$

$V_x \cap A = \{x\}$ se $x \in A$ e $V_x \cap A = \emptyset$ caso contrário.

No caso de espaços métricos, podemos caracterizar a compacidade em termos de sequências. Isso é o que vamos provar nos próximos resultados.

Cuidado que essa caracterização não vale em geral.

Proposição 4.3.4. *Seja (X, τ) com base locais enumeráveis, compacto e T_1. Então toda sequência admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência. Note que podemos supor que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito (caso contrário, teríamos uma subsequência constante convergente). Assim, seja $x \in X$ ponto de acumulação para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x decrescente. Seja $x_{n_0} \in V_0$. Para cada $k + 1 \in \mathbb{N}_{>0}$, escolha $x_{n_{k+1}} \in V_{n_{k+1}} \cap \{x_n : n > n_k\}$. Note que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x. $\square$

Para provarmos a volta do resultado acima no caso de espaços métricos, o seguinte resultado será útil:

Proposição 4.3.5. *Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.*

Existe uma "folga" $r > 0$ tal que todo x "cabe" em algum elemento da cobertura com esta folga.

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $\frac{1}{n}$ não satisfaz o enunciado. Isto é, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese. Suponha que $x_{n_k} \longrightarrow x$ para algum x. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto). Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x, y) & \leq & d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) \\ & < & \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} \\ & < & \frac{2}{n} \end{array}$$

Ou seja, $y \in B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ para todo $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ contrariando a escolha de x_{n_k}. □

Proposição 4.3.6. *Seja (X, d) métrico tal que toda sequência admite subsequência convergente. Então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $\mathcal{C}$ cobertura sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n > 0$, seja

$$x_n \in X \smallsetminus (B_r(x_0) \cup \cdots \cup B_r(x_{n-1}))$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, ..., n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x_i) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^{n} C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de $\mathcal{C}$. Note que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente pois $d(x_n, x_m) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. □

Juntando os resultados anteriores, temos:

Corolário 4.3.7. *Seja (X, d) espaço métrico. São equivalentes:*

(a) (X, d) é compacto;

(b) Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X;

(c) Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.

Com essa caracterização, fica imediata a prova do seguinte:

Corolário 4.3.8. *Todo métrico compacto é completo.*

Lembre-se que "ser limitado" não é um invariante topológico.

No caso de $\mathbb{R}^n$, os compactos são exatamente os subespaços fechados e limitados (ver o Exercício 4.3.15). Para podermos fazer o resultado análogo para outros espaços métricos, precisamos de um outro conceito:

Definição 4.3.9. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 4.3.10. *Seja (X, d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, fixe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_\varepsilon(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_\varepsilon(y_x)$. □

Proposição 4.3.11. *Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo. O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergente. Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é. Considere $\varepsilon_0 = 1$ e $F_0 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_0} B_{\varepsilon_0}(x)$. Note que, para algum $x_{n_0} \in F_0$, $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Continuamos este processo fazendo, para cada $k+1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+2}$, escolhendo F_{k+1} finito de forma que $\{x_n : n > n_k\} \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$. Daí escolhemos $x_{n_k+1} \in F_{k+1}$ de forma que $B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \cap \{x_n : n > n_k\}$ seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente. $\square$

Corolário 4.3.12. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.*

O totalmente limitado é necessário de fato:

Exemplo 4.3.13. Considere $\mathbb{N}$ com a métrica discreta. Note que, com tal métrica, $\mathbb{N}$ é completo. Note também que $\mathbb{N}$ é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola $B_2(0)$).

Basta notar que as únicas sequências de Cauchy são as quase constantes

Alongamentos

Alongamento 4.3.14. Mostre que $\mathbb{N}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ tem pontos aderentes mas não pontos de acumulação.

Exercícios

Exercício 4.3.15. Mostre que em $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é um fechado limitado.

Exercício 4.3.16. Mostre que $D \subset X$ é fechado e discreto se, e somente se, D não admite pontos de acumulação.

Exercícios extras

Vamos apresentar nos próximos exercícios uma aplicação um tanto estranha do Teorema de Tychonoff.

Considere

$$S = \{(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} : \exists L > 0 \ -L < x_z < L \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}\}.$$

S nada mais é que o conjunto das sequências limitadas reais, mas que estamos indexando em $\mathbb{Z}$.

Note que S é um espaço vetorial. Vamos dizer que uma função linear $\mu : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **média** se, para todo $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$

$$\inf_{z \in \mathbb{Z}} x_z \leq \mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) \leq \sup_{z \in \mathbb{Z}} x_z.$$

Exercício 4.3.17. Note que as próprias funções inf e sup não são médias.

Exercício 4.3.18. Note que uma função constante não é uma média.

Exercício 4.3.19. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ finito e não vazio. Mostre que μ_F dada por

$$\mu_F = \frac{1}{|F|} \sum_{z \in F} x_z$$

é uma média.

Essa seria uma média com pesos.

Exercício 4.3.20. Seja $(a_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$ tal que $a_z \geq 0$ para cada z e $\sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z = 1$. Mostre que μ dada por

$$\mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = \sum_{a_z x_z}$$

também é uma média.

O problema com os tipos de médias apresentados acima é que se "deslocamos" a sequência, sua média muda. Para formalizar, considere o seguinte operador *shift*: dado $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$, denotamos por $s((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = (x_{z+1})_{z \in \mathbb{Z}}$. Note que enquanto inf e sup são invariantes quanto a aplicações de s, os exemplos acima não são. Nosso trabalho agora se resume a provar que existe uma média invariante por s. Começamos com uma aproximação:

Exercício 4.3.21. Mostre que existe uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de médias tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Z} \in S$, temos

$$\lim_{n \to \infty} |\mu_n(s(x)) - \mu_n(x)| = 0$$

Podemos considerar o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias como um subconjunto de $\prod_{s \in S} \mathbb{R}$ simplesmente tomando μ como $(\mu(s))_{s \in S}$. Desta forma, podemos ainda melhorar e tomar o conjunto $\mathcal{M}$ como sendo um subconjunto de

$$\prod_{s \in S} [m(s), M(s)]$$

onde $m(s)$ é o ínfimo de s e M é o supremo de s. Desta forma, pelo Teorema de Tychonoff, temos que $\mathcal{M}$ é um subconjunto de um espaço compacto.

Exercício 4.3.22. Se convença das afirmações acima.

Exercício 4.3.23. Mostre que o conjunto $\mathcal{M}$ de todas as médias é fechado no espaço descrito acima e, portanto, é compacto.

Exercício 4.3.24. Considere $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência como no Exercício 4.3.21.

(a) Mostre que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação em $\mathcal{M}$.

(b) Mostre que tal ponto de acumulação é uma média invariante por *shifts*.

Capítulo 5

Conexos

5.1 Definição e propriedades básicas

Vamos apresentar agora outro importante invariante topológico:

Definição 5.1.1. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é **conexo** se, dados quaisquer abertos A e B de X disjuntos tais que $A \cup B = X$, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

A ideia aqui é que não dá para dividir o espaço em dois abertos não triviais.

Os intervalos são exatamente os subconjuntos conexos na reta real:

Definição 5.1.2. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Chamamos $I \subset X$ de **intervalo** se, para quaisquer $a, b, c \in X$ tais que $a, b \in I$ e $a \leq c \leq b$ tivermos $c \in I$.

Proposição 5.1.3. *$A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.*

Demonstração. Suponha que A não seja um intervalo. Então existem $a, b \in A$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ e $x \notin A$. Então

$$A = (]-\infty, x[\cap A) \cup (]x, +\infty[\cap A)$$

que são abertos disjuntos não vazios de A e, portanto, A não é conexo.

Tais conjuntos são não vazios pois $a \in]-\infty, x[\cap A$ e $b \in]x, +\infty[\cap A$

Seja agora A um intervalo. Suponha que A não seja conexo. Então existem V, W abertos em A, disjuntos, tais que $A = V \cup W$. Sejam $v \in V$ e $w \in W$. Sem perda de generalidade, vamos supor $v < w$. Considere $\alpha = \sup\{x \in V : [v, x] \subset V\}$ (note que tal definição faz sentido pois $v \in \{x \in V : [v, x] \subset V\}$ e tal conjunto é limitado superiormente). Note que $\alpha \notin V$ pois, se $\alpha \in V$, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V$ e, portanto, $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \in V$ e $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < w$, o que contraria a definição de α. Logo $\alpha \notin V$, o que implica $\alpha \in W$ (pois $A = V \cup W$). Como W é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\subset W$. Assim, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \in W$, contrariando a definição de α. $\square$

Já na topologia da reta de Sorgenfrey, os intervalos não são conexos:

Exemplo 5.1.4. A reta de Sorgenfrey não é conexa. Basta notar que

$$]-\infty,0[\cup[0,+\infty[=\mathbb{R}$$

e $]-\infty,0[$ e $[0,+\infty[$ são abertos disjuntos não vazios da reta de Sorgenfrey.

Conexidade é uma propriedade preservada por funções contínuas:

Proposição 5.1.5. *Sejam $(X,\tau),(Y,\sigma)$ espaços topológicos e $f:X\to Y$ contínua e sobrejetora. Se X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Sejam $A,B\subset Y$ abertos disjuntos tais que $Y=A\cup B$. Note que $X=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$ e $f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]=\emptyset$. Se A e B forem ambos não vazios, então $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ seriam abertos não vazios (pois f é sobrejetora), implicando em X não ser conexo. □

Com isso, podemos provar facilmente um importante resultado de Cálculo:

Corolário 5.1.6 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam (X,τ) um espaço topológico conexo e $f:X\to\mathbb{R}$ contínua. Sejam $f(a)<f(b)$, para $a,b\in X$. Se $y\in\mathbb{R}$ é tal que $f(a)<y<f(b)$, então existe $x\in X$ tal que $f(x)=y$.*

Note que esse resultado simplesmente está dizendo que a imagem de f é um intervalo.

Demonstração. Basta notar que o resultado anterior implica que $f[X]$ é conexo em $\mathbb{R}$ e lembrar que os conexos em $\mathbb{R}$ são os intervalos. □

Também obtemos facilmente um resultado sobre a cardinalidade dos conexos completamente regulares:

Corolário 5.1.7. *Seja (X,τ) espaço topológico completamente regular, conexo e com mais de um ponto. Então $|X|\geq|\mathbb{R}|$.*

Demonstração. Sejam $x,y\in X$ distintos. Por X ser completamente regular, existe $f:X\to[0,1]$ contínua tal que $f(x)=0$ e $f(y)=1$. Como X é conexo, $f[X]$ é um intervalo em $\mathbb{R}$, mas $1,0\in f[X]$, logo $f[X]=[0,1]$. □

Um outro jeito de caracterizar conjuntos conexos é em termos de conjuntos mutuamente separados:

Definição 5.1.8. Seja (X,τ) espaço topológico. Dizemos que $A,B\subset X$ são **mutuamente separados** se $\overline{A}\cap B=\emptyset$ e $A\cap\overline{B}=\emptyset$

Exemplo 5.1.9. $]-\infty,0[$ e $]0,+\infty[$ são mutuamente separados em $\mathbb{R}$.

Proposição 5.1.10. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, não existem $A, B \neq \emptyset$ mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$.*

Demonstração. Suponha que existam $A, B \subset X$ não vazios e mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$. Vamos mostrar que Y não é conexo. Vamos trabalhar dentro de Y (ou seja, a menos de indicado, todos os fechos e outros termos são pensados como no subespaço Y). Considere $U = Y \setminus \overline{A}$, $V = Y \setminus \overline{B}$.

- $U \cap V = \emptyset$: Suponha que não. Então existe y tal que $y \in U \cap V$. Note que $y \in Y$, $y \notin \overline{A}$ e $y \notin \overline{B}$ e, portanto, $y \notin A$ e $y \notin B$. Logo $y \notin Y$, contradição;
- $U \neq \emptyset$: Suponha $U = \emptyset$. Como $U = Y \setminus \overline{A}$, temos que $Y = \overline{A}$. Como A é mutuamente separado de B, obtemos que $B = \emptyset$, contradição
- $V \neq \emptyset$: Análogo ao caso anterior.

Disso segue que $Y = U \cup V$, com U, V abertos disjuntos não vazios. Isto é, Y não é conexo.

Por outro lado, suponha Y não conexo. Novamente, trabalhando dentro do subespaço Y, existem $U, V \subset Y$ abertos não vazios, disjuntos, tais que $U \cup V = Y$. Sejam U^* e V^* abertos de X tais que $U^* \cap Y = U$ e $V^* \cap Y = V$. Vamos mostrar que U e V são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que $x \in \overline{U} \cap V$. Como $x \in V$, $x \in Y$. Logo, deveríamos ter $x \in \overline{U} \cap V$ em Y, o que é uma contradição já que U e V são abertos disjuntos (em Y). ☐

Com isso, podemos mostrar que um conjunto conexo não pode ser dividido em dois subconjuntos mutuamente separados:

Corolário 5.1.11. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ conexo. Se $A, B \subset X$ são mutuamente separados e $Y \subset A \cup B$, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.*

Demonstração. Como $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, basta mostrarmos que $Y \cap A$ e $Y \cap B$ são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que exista $x \in \overline{Y \cap A} \cap (Y \cap B)$. Então $x \in B$ e $x \in \overline{Y \cap A} \subset \overline{A}$. Logo, $x \in \overline{A} \cap B$, contradição. ☐

Vamos terminar esta seção com alguns resultados que implicam na conexidade de alguns subconjuntos:

Proposição 5.1.12. *Seja (X, τ) espaço topológico.*

(a) *Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.*

(b) *Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.*

Demonstração. (a) Suponha que X não seja conexo. Sejam $A, B \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = X$. Note que, para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \subset A$ ou $X_\alpha \subset B$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in I$ tais que $X_\alpha \subset A$ e $X_\beta \subset B$. Como $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, temos uma contradição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X_\alpha \subset A$, para todo $\alpha \in I$. Logo $X \subset A$ e daí $B = \emptyset$, contradição.

(b) Fixe $x \in X$. Para cada $y \in X$, seja A_y conexo tal que $x, y \in A_y$. Por (a), concluímos que $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ é conexo.

□

Proposição 5.1.13. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$ conexo. Então para todo $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, temos B conexo.*

Demonstração. Suponha que não. Sejam U e V mutuamente separados não vazios tais que $B = U \cup V$. Note que $A \subset U \cup V$, então, por A ser conexo, temos $A \subset U$ ou $A \subset V$. Suponha, sem perda de generalidade, que $A \subset U$, então $\overline{A} \subset \overline{U}$, logo $\overline{A} \cap V = \emptyset$ e assim $V = \emptyset$ (pois $V \subset \overline{A}$). □

Alongamentos

Alongamento 5.1.14. Mostre que "ser conexo" é um invariante topológico.

Alongamento 5.1.15. Mostre que (X, τ) é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e o próprio X.

Exercícios

Exercício 5.1.16. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ família de conjuntos conexos tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Mostre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é conexo.

Exercício 5.1.17. Mostre que se um espaço tem um subespaco denso conexo, então o espaço todo é conexo.

Exercício 5.1.18. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A, B \subset X$ conexos e não mutuamente separados. Mostre que $A \cup B$ é conexo.

Exercício 5.1.19. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto finito de conexos é conexo.

(a) Sejam (X, τ), (Y, σ) conexos. Mostre que $X \times \{y\}$ é conexo para qualquer $y \in Y$. Use essa ideia e a Proposição 5.1.12 para mostrar que $X \times Y$ é conexo.

(b) Conclua que produto finito de conexos é conexo.

Exercício 5.1.20. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto qualquer de conexos é conexo (usa o anterior). Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços conexos. Seja $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(a) Seja $F \subset A$ finito. Mostre que $D_F : \{(b_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : b_\alpha = a_\alpha$ se $\alpha \notin F\}$ é homeomorfo a $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ (e, portanto, é conexo pelo exercício anterior).

(b) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset A : F$ é finito$\}$. Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(c) Mostre que $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in D_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

(d) Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é conexo.

(e) Mostre que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é conexo.

Exercício 5.1.21. Mostre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é conexo.

Exercício 5.1.22. Se você achou o último exercício interessante, tente provar que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \smallsetminus E$, onde E é enumerável, é conexo. Provavelmente você vai precisar de um argumento (simples) de cardinalidade.

5.2 Componentes e conexidade por caminhos

Um conceito que ajuda bastante na hora de trabalhar com conexos é a componente conexa:

Definição 5.2.1. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Definimos a **componente conexa** de x como $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ onde $\mathcal{A} = \{A \subset X : x \in A$ e A é conexo $\}$.

Note que, pela Proposição 5.1.12, temos que a componente conexa de x é sempre conexa. Desta forma, é fácil ver que a componente conexa de x é o *maior* (no sentido da inclusão) subconjunto conexo de X contendo x.

Algo que não é tão óbvio a partir da definição é que as componentes conexas são sempre fechadas:

Proposição 5.2.2. *Componentes conexas são fechadas.*

Demonstração. Seja C_x componente conexa para $x \in X$. Temos por definição $C_x \subset \overline{C_x}$. Como C_x é conexo, temos que $\overline{C_x}$ é conexo (e contém x). Logo $\overline{C_x} \subset C_x$. □

Cuidado que, apesar de parecer ser a mesma coisa, esses conceitos serão diferentes.

Uma ideia que se poderia ter para se definir conexidade seria a "existência de caminhos" entre pontos. Essa ideia pode ser formalizada da seguinte maneira:

Definição 5.2.3. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é **conexo por caminhos** se, para quaisquer $x, y \in X$, existir $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Neste caso, dizemos que f é um **caminho** de x para y.

A conexidade por caminhos implica na conexidade:

Proposição 5.2.4. *Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (X, τ) é conexo.*

Demonstração. Pela Proposição 5.1.12, basta mostrarmos que, para quaisquer $x, y \in X$, existe C conexo tal que $x, y \in C$. De fato, sejam $x, y \in X$ distintos. Como X é conexo por caminhos, existe $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Note que $f[[0, 1]]$ é conexo (por f ser contínua e $[0, 1]$ ser conexo) e $x, y \in f[[0, 1]]$. □

A volta do resultado anterior não vale em geral:

Exemplo 5.2.5. Espaço Pente: Espaço conexo que não é conexo por caminhos.

Considere $A = \left\{\left(\frac{1}{n+1}, y\right) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}_{\geq 0}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$ e $B = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Note que tanto A quanto B são conexos por caminhos, logo, A e B são conexos. Considere $X = A \cup B$.

Fato: X é conexo.

Note que $B \subset \overline{A}$ e, portanto, $A \subset A \cup B \subset \overline{A}$. Logo, como A é conexo, temos o resultado pela Proposição 5.1.13.

Fato: X não é conexo por caminhos.

Suponha que exista $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = (0, 1)$ e $f(1) = (1, 1)$. Considere $\alpha = \sup\{x \in [0, 1] : f(x) \in B\}$. Temos dois casos:

- $f(\alpha) \in A$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(f(\alpha)) \cap B = \emptyset$ (o que é possível pois $B \cup \{(0,0)\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$). Como f é contínua, existe V vizinhança de α tal que $f[V] \subset B_r(f(\alpha))$. Note que existe $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha - \varepsilon, \alpha[\subset V$. Pela definição de α, $f[]\alpha - \varepsilon, \alpha[] \cap B \neq \emptyset$, contradição.

- $f(\alpha) \in B$. Seja $r > 0$ tal que $(0,0) \notin B_r(f(\alpha))$. Como f é contínua, existe um intervalo aberto V tal que $\alpha \in V$ e $f[V] \subset B_r(f(\alpha))$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha, \alpha + \varepsilon[\subset V$. Pela definição de α, existe $\beta \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[$ tal que $f(\beta) \in A$, contradição com o fato que $f[V]$ é conexo.

Aqui a ideia é que dentro da bola, cada componente conexa é uma reta vertical.

Proposição 5.2.6. *Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua e sobrejetora. Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (Y, σ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $a, b \in Y$ e $\alpha, \beta \in X$ tais que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$. Seja $h : [0,1] \to X$ contínua tal que $h(0) = \alpha$ e $h(1) = \beta$. Então $f \circ h : [0,1] \to Y$ é uma função contínua tal que $(f \circ h)(0) = a$ e $(f \circ h)(1) = b$. $\square$

Alongamentos

Alongamento 5.2.7. Mostre que “ser conexo por caminhos” é um invariante topológico.

Alongamento 5.2.8. Mostre que se existe um caminho de x para y, existe um caminho de y para x.

Alongamento 5.2.9. Mostre que se existe um caminho de x para y e um caminho de y para z, então existe um caminho de x para z.

Exercícios

Exercício 5.2.10. Considere a relação $x \sim y$ dada por “existe um caminho de x para y”.

(a) Mostre que tal relação é uma relação de equivalência.

(b) Mostre que, fixado x, o conjunto $\{y : \text{existe um caminho de } x \text{ para } y\}$ é exatamente o conjunto dos y’s equivalentes a x por $\sim$. Chamamos tal conjunto de **componente conexa por caminhos** de x.

(c) A componente conexa por caminhos de um ponto é sempre fechada?

Exercício 5.2.11. Mostre que, dado $q \in \mathbb{Q}$, a componente conexa de q é $\{q\}$ (dentro do espaço $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida).

Exercício 5.2.12. Mostre que se um espaço tem uma quantidade finita de componentes conexas, então cada componente é aberta.

5.3 Propriedades locais de conexidade

Nesta seção vamos apresentar versões locais das propriedades de conexidade apresentadas anteriormente:

Definição 5.3.1. Um espaço topológico (X, τ) é **localmente conexo por caminhos** se todo ponto de X admite uma base local conexa por caminhos.

Conexidade local por caminhos é suficiente para fazer um espaço conexo ser conexo por caminhos:

Note que só usamos nessa demonstração que cada ponto possui algum aberto conexo por caminhos que o contém.

Proposição 5.3.2. *Se (X, τ) é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos então, (X, τ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e

$$C = \{y \in X : \text{ existe um caminho de } x \text{ para } y\}$$

Vamos mostrar que C é aberto e fechado (portanto, $C = X$, pelo Alongamento 5.1.15).

C é aberto. Seja $y \in C$. Como X é localmente conexo por caminhos, existe A aberto e localmente conexo tal que $y \in A$. Note que, se mostrarmos que $A \subset C$, teremos que C é aberto. Assim, seja $a \in A$. Como $a \in C$, existe um caminho de y para a. Como existe um caminho de x para y, temos que existe um caminho de x para a (ver o Alongamento 5.2.9). Logo, $a \in C$ como queríamos.

C é fechado. Seja $y \in X \smallsetminus C$. Como X é localmente conexo por caminhos, existe A aberto e conexo por caminhos tal que $y \in A$. Note que, se mostrarmos que $A \cap C = \emptyset$, terminamos. Suponha que não. Seja $b \in C \cap A$. Como $b \in C$, existe um caminho de x para b e, como $b \in A$, existe um caminho de y para b. Logo, existe um caminho de x para y, contradição. $\square$

Definição 5.3.3. Um espaço topológico (X, τ) é **localmente conexo** se todo ponto admite uma base local conexa.

Exemplo 5.3.4. O exemplo do pente (Exemplo 5.2.5) com o ponto $(0, 0)$ incluído é um espaço conexo por caminhos.

Exemplo 5.3.5. O exemplo do pente (Exemplo 5.2.5) (com ou sem $(0, 0)$) é um conexo que não é localmente conexo.

Exemplo 5.3.6. $[0, 1[\cup]1, 2]$ é localmente conexo, mas não é conexo.

Proposição 5.3.7. *Se (X, τ) é localmente conexo, todo ponto de X tem componente conexa aberta.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e C componente conexa de x. Seja $y \in C$. Como X é localmente conexo, existe A aberto e conexo tal que $y \in A$. Note que $C \cup A$ é conexo (pois $y \in C \cap A$). Assim, como C é o maior conexo contendo x, temos que $C \cup A \subset C$. Ou seja, $A \subset C$ e portanto C é aberto. $\square$

Exercícios

Exercício 5.3.8. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é locamente conexo.

Exercício 5.3.9. Dê um exemplo de um espaço tal que toda componente conexa seja aberta, mas que não seja localmente conexo.

5.4 Algumas aplicações

Um tipo de aplicação em que argumentos sobre conexidade são bastante comuns é se mostrar que certos espaços não são homeomorfos.

Proposição 5.4.1. *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo. Então $f \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Mas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é conexo, enquanto $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ é. $\square$

Proposição 5.4.2. *$[0, +\infty[$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ homeomorfismo. Então $f \restriction]0, +\infty[\to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Contudo, $]0, +\infty[$ é conexo enquanto que $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ não é. $\square$

Proposição 5.4.3. *$S^1 = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a qualquer subespaço de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que exista $f : S^1 \to A \subset \mathbb{R}$ homeomorfismo. Como S^1 é conexo (basta notar que S^1 é imagem contínua de um intervalo da reta), segue que A é um conexo de $\mathbb{R}$, isto é, A é um intervalo. Considere $a \in A$ tal que a não seja uma extremidade de A (isto é, existem $b, c \in A$ tais que $b < a < c$). Então $f \restriction S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\} \to A \setminus \{a\}$ é um homeomorfismo, mas $S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\}$ é conexo e $A \setminus \{a\}$ não é. $\square$

Exemplo 5.4.4 (No mundo real, literalmente)**.** Considere a superfície da Terra T com a métrica usual. Vamos supor que a função $t : T \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $t(x)$ é a temperatura no local x, seja contínua. Então existem dois pontos antípodas[1] na Terra que possuem a mesma temperatura. De fato, considere $F : T \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = t(x) - t(y)$ onde y é o ponto antípoda de x. Temos que F é uma função contínua (a função que leva x no seu antípoda é contínua). Seja x_0 um ponto qualquer em T e seja y_0 seu antípoda. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow T$ uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = y_0$. Note que $F(f(0)) = -F(f(1))$. Assim, pelo Teorema do valor intermediário (Corolário 5.1.6), temos que existe $r \in [0, 1]$ tal que $F(f(r)) = 0$. Isto é, $f(r)$ é um ponto em que sua temperatura é a mesma que a do seu antípoda.

Exemplo 5.4.5 (**Função base 13 de Conway**)**.** Considere os seguintes algarismos numa base 13:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ +\ -\ ,$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere sua expansão na base acima. Defina a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } +a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ -a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } -a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde os a_n's e b_n's são algarismos entre[2] 0 e 9. Note que f é sobrejetora. Mais que isso, dado qualquer intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, $f[[a, b]] = \mathbb{R}$. Note também que f é não contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Esta f serve de contraexemplo para a afirmação que se uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ leva conexos em conexos, então ela é contínua.

[1] Isto é, simétricos em relação ao centro da Terra.

[2] Ao se formalizar tal exemplo, deve-se tomar cuidado com as expansões decimais que terminem em 9999999... e com as expansões na base 13 fixada que terminem em , , , , , , , , , ... Mas isso pode ser feito facilmente.

Exercícios

Exercício 5.4.6. Mostre que $[0,1[$ e $]0,1[$ não são homeomorfos em $\mathbb{R}$.

Exercício 5.4.7. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo (com a topologia da ordem). Mostre que $\leq$ é uma ordem densa.

Exercício 5.4.8. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo. Mostre que $\leq$ é uma ordem completa.

Exercício 5.4.9. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elementos, separável e conexo. Mostre que $(X, \leq)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Capítulo 6

Homotopia

6.1 Definição e resultados básicos

Começamos com uma definição de quando uma função pode ser obtida de uma outra a partir de uma "deformação":

Definição 6.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g se existe uma função contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que H é uma **homotopia** entre f e g. Notação: $f \simeq g$.

Um jeito de imaginar essa situação é uma analogia temporal: pense em $H(x, t)$ como uma família de funções variando com o tempo - representado com a variável t. Assim, a cada instante t_0, temos que $H(\cdot, t_0) : X \to Y$ uma função contínua. Além disso, a mudança das funções ao longo do tempo é contínua e as funções inicial e final são, respectivamente, f e g.

Vejamos um exemplo simples, mas que terá algumas consequências importantes:

Exemplo 6.1.2. Em $\mathbb{R}^n$, considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = x$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, $f \simeq g$. De fato, basta tomar $H(x, t) = (1 - t)x$.

Na verdade, a convexidade nos permite generalizar o truque anterior:

Exemplo 6.1.3. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e (X, τ) espaço topológico. Então quaisquer $f, g : X \to A$ funções contínuas são homotópicas. Basta tomar $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$.

Se estamos interessados em como funções podem ser deformadas umas nas outras, é interessante notar que essa relação é uma relação de equivalência:

Proposição 6.1.4. *$\simeq$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos provar a transitividade, deixando as outras como exercício. Sejam $f, g, h : X \to Y$ funções contínuas tais que $f \simeq g \simeq h$. Vamos mostrar que $f \simeq h$. Sejam H_1 e H_2 tais que, para todo $x \in X$,

$$\begin{array}{ll} H_1(\cdot, 0) = f & H_2(\cdot, 0) = g \\ H_1(\cdot, 1) = g & H_2(\cdot, 1) = h. \end{array}$$

Para ver que essa função é contínua, use o Exercício 2.1.20.

Defina

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

□

Definição 6.1.5. As classes de equivalência da relação $\simeq$ são chamadas de **classes de homotopia**.

O próximo resultado tem demonstração puramente técnica. Mas é bastante útil e sua demonstração ilustra bem como proceder quando homotopias precisam ser construídas explicitamente em função de outras.

Proposição 6.1.6. *Composições de funções homotópicas são homotópicas.*

Demonstração. Sejam (X, τ), (Y, σ) e (Z, μ) espaços topológicos e sejam $f_1, f_2 : X \to Y$ tais que $f_1 \simeq f_2$ e $g_1, g_2 : Y \to Z$ tais que $g_1 \simeq g_2$.

Vamos mostrar que $g_1 \circ f_1$ é homotópica a $g_2 \circ f_2$. Sejam H_X e H_Y tais que

$$\begin{array}{ll} H_X(\cdot, 0) = f_1 & H_Y(\cdot, 0) = g_1 \\ H_X(\cdot, 1) = f_2 & H_Y(\cdot, 1) = g_2. \end{array}$$

Defina $H'(x,t) = H_Y(f_1(x), t)$. Note que $H'(x, 0) = g_1 \circ f_1(x)$ e $H'(x, 1) = g_2 \circ f_1(x)$. Portanto, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_1$.

Defina $H''(x,t) = g_2(H_X(x,t))$. Note que $H''(x, 0) = g_2 \circ f_1(x)$ e $H''(x, 1) = g_2 \circ f_2(x)$. Portanto, $g_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Logo, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. □

Com o que temos, já podemos definir um importante invariante topológico:

Definição 6.1.7. Um espaço topológico (X, τ) é dito **contrátil** se $Id_X : X \to X$ ($Id_X(x) = x$, para $x \in X$) é homotópica a alguma função constante.

Formalmente, o espaço é contrátil se existe uma função constante homotópica à função identidade. Mas, na prática, nessa situação a função identidade é homotópica a qualquer função constante (veja o Alongamento 6.1.17). Para maior clareza, vamos utilizar o seguinte abuso de notação: dado $c \in X$, denotaremos também por c a função constante $x \mapsto c$ (a função que leva todo $x \in X$ em c).

O exemplo que fizemos anteriormente nos dá o seguinte resultado:

Exemplo 6.1.8. Qualquer conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ é contrátil.

Mas não vale a recíproca (veja o Exercício 6.1.18).

Em vez de apresentar um exemplo explícito de espaço não contrátil, apresentamos uma implicação que já nos garante uma gama grande de exemplos:

Proposição 6.1.9. *Se (X, τ) é contrátil, então (X, τ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Seja $c \in X$ tal que $id_X \simeq c$. Note que é suficiente mostrarmos que, para todo $a \in X$, existe um caminho de a para c. Seja H tal que $H(x, 0) = a$ e $H(x, 1) = c$. Note que $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por $\gamma(t) = H(a, t)$ é o caminho desejado. $\square$

O próximo resultado dá uma caracterização externa para os espaços contráteis :

Proposição 6.1.10. *Um espaço topológico (X, τ) é contrátil se, e somente se, para todo espaço topológico (T, σ) e para todas as funções contínuas $f, g : T \to X$ contínuas temos que $f \simeq g$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Basta tomar $T = X$, $f = Id_X$ e g alguma função constante.

($\Rightarrow$) Suponha que $Id_X \simeq c$ para algum c. Sejam $f, g : T \to X$ funções contínuas. Lembrando que $f \simeq f$ e $g \simeq g$ e que compostas de homotópicas são homotópicas, temos:

$$f = Id_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq Id_X \circ g = g.$$

Logo, $f \simeq g$. $\square$

Podemos generalizar o conceito de homeomorfismo neste contexto:

Definição 6.1.11. Espaços topológicos (X, τ) e (Y, σ) são ditos **homotopicamente equivalentes** se existem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Neste caso, g é dita uma **inversa homotópica** de f (e vice versa).

Note que, de fato, espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. Mas a recíproca não é verdadeira, como o próximo resultado ilustra.

Proposição 6.1.12. *Um espaço topológico (X, τ) é contrátil se, e somente se, (X, τ) é homotopicamente equivalente a um espaço unitário.*

Demonstração. Suponha (X, τ) contrátil, ou seja, $Id_X \simeq c$ para algum $c \in X$. Sejam $Y = \{c\}$ e $j : Y \to X$ a função inclusão. Note que $c \circ j = Id_Y$ e $j \circ c = c \simeq Id_X$ por hipótese.

Agora suponha que $f : X \to \{a\}$ e $g : \{a\} \to X$ são inversas homotópicas. Note que $g \circ f$ é constante $(= g(a))$ e, por hipótese, $g \circ f \simeq Id_X$. □

Definição 6.1.13. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que o conjunto $A \subset X$ é uma **retração** (**retrato**) de X se existe uma função contínua $r : X \to A$ (chamada de **retração**) tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. Se $r \simeq Id_X$ chamamos a retração de **retração de deformação**

Proposição 6.1.14. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Se o conjunto $A \subset X$ é uma retração de deformação, então A e X são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. Sejam $j : A \to X$ a função inclusão e r a retração de deformação. Note que $r \circ j = Id_A$ e $j \circ r = r \simeq Id_X$. □

Vejamos agora como formalizar a ideia de deformação entre caminhos:

Definição 6.1.15. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $f, g : [0, 1] \to X$ dois caminhos. Dizemos que f e g são **caminhos homotópicos** se existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ homotopia entre f e g tal que $H(0, \cdot)$ e $H(1, \cdot)$ são funções constantes.

Note que, em particular, $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$.

Alongamentos

Alongamento 6.1.16. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é contrátil.

Alongamento 6.1.17. Mostre se X é contrátil, então $id_X \simeq c$, para qualquer c constante.

Exercícios

Exercício 6.1.18. Mostre que $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ é contrátil (apesar de não ser convexo).

Exercício 6.1.19. Mostre que $\{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ é contrátil (cuidado com o caminho).

Exercício 6.1.20. Sejam $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ e $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Mostre que $r : X \longrightarrow S^1$ dada por $r(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$ é uma retração de deformação.

(b) Mostre que X e S^1 são homotopicamente equivalentes.

Exercício 6.1.21. Considere $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ com a topologia induzida. Sejam X espaço qualquer e $f,g : X \to S^2$ funções contínuas tais que $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$. Mostre que f e g são homotópicas.

Exercício 6.1.22. Mostre que o espaço do pente (com o ponto $(0,0)$) é contrátil.

Exercício 6.1.23. Sejam $f,g : X \to Y$ funções contínuas. Sejam A tal que $f \restriction A = g \restriction A$. Dizemos que f e g são **homotópicas relativamente** a A se existe uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ entre f e g tal que, para qualquer $a \in A$, $H(a,\cdot)$ é constante. Mostre que se f e g são caminhos entre a,b, então f e g são caminhos homotópicos se, e somente se, f e g são homotópicas relativamente a $\{0,1\}$.

Exemplo 6.1.24. Este é um roteiro para dar um exemplo de um espaço contrátil para um ponto x_0 mas tal que a identidade não é homotópica relativamente a $\{x_0\}$. Considere X o exemplo do pente com o ponto $(0,0)$. Considere $x_0 = (0,1)$ e suponha que existe $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H(\cdot,0) = id_X$, $H(\cdot,1) = x_0$ de forma que $H(x_0,t) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$.

(a) Note que $id_X \simeq x_0$.

(b) Considere $V = [0,1] \times]\frac{1}{2},1] \cap X$. Note que $(0,1) \in V$. Mostre que existem $\varepsilon > 0$ e $A \subset V$ tais que $H[A \times]1-\varepsilon,1]] \subset V$.

(c) Mostre que, para cada $n > 0$ tal que $(\frac{1}{n},1) \in A$, existe $t_n \in [0,1-\varepsilon]$ tal que $H((\frac{1}{n},1),t_n) \notin A$.

(d) Considere todos os t_n's dado pelo item anterior. Mostre que existem uma subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $t_0 \in [0,1-\varepsilon]$ tais que $t_{n_k} \to t_0$.

(e) Obtenha uma contradição a partir de $((\frac{1}{n_k},1),t_{n_k}) \to ((0,1),t_0)$

6.2 Grupo Fundamental

A ideia nesta seção é dar uma maneira de caracterizar quais "laços" num espaço podem ser deformados de um para o outro.

Definição 6.2.1. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Chamamos de **laço no ponto** x_0 uma função $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = f(1) = x_0$.

Definição 6.2.2. Sejam $f, g : [0, 1] \to X$ laços no ponto x_0. Dizemos que f e g são **laços homotópicos** se f e g são caminhos homotópicos. Usaremos a notação $f \simeq_{x_0} g$, mas podemos omitir o x_0 quando este estiver claro no contexto.

Note que então, na homotopia, $H(0, \cdot)$ e $H(1, \cdot)$ são constantes.

Observação 6.2.3. A relação $\simeq_{x_0}$ é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de f por $[f]$. O conjunto de tais classes será denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Observação 6.2.4. Vale lembrar que podemos "concatenar" dois laços:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Um aspecto bastante interessante nisso é que podemos dar uma estrutura de grupo para as classes dos laços, tomando como operação a concatenação de seus representantes:

Proposição 6.2.5. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Definimos $* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ por $[f] * [g] = [f * g]$. Tal operação está bem definida.*

Demonstração. Basta mostrar que se $f_1 \simeq_{x_0} f_2$ e $g_1 \simeq_{x_0} g_2$, então $(f_1 * g_1) \simeq_{x_0} (f_2 * g_2)$. $\square$

Antes de continuarmos, vamos introduzir uma notação auxiliar para as demonstrações dos próximos resultados (a natureza dessa definição é puramente técnica):

Definição 6.2.6. Sejam $f : [0, 1] \to X$ e $g : [0, 1] \to X$ dois laços num ponto $x_0 \in X$. Dado $a \in]0, 1[$, denotamos por $f *_a g : [0, 1] \to X$ o seguinte laço:

A ideia aqui é percorrer o laço f no intervalo $[0, a]$ e depois percorrer o laço g no intervalo $[a, 1]$.

$$(f *_a g)(t) = \begin{cases} f(\frac{t}{a}) & \text{se } 0 \leq t \leq a \\ g(\frac{t-a}{1-a}) & \text{se } a < t \leq 1 \end{cases}$$

Note que, assim, $f * g = f *_{\frac{1}{2}} g$.

Lema 6.2.7. *Sejam* $f : [0,1] \to X$ *e* $g : [0,1] \to X$ *dois laços no ponto* x_0. *Sejam* $a, b \in]0,1[$. *Então* $f *_a g \simeq_{x_0} f *_b g$.

Demonstração. Note que é suficiente mostrarmos que $f * g \simeq f *_a g$ para todo $a \in]0,1[$. Dado $t \in [0,1]$, defina

$$H_t = f *_{(at+(1-t)\frac{1}{2})} g$$

Note que $H_t : [0,1] \to X$. Definindo $H(s,t) = H_t(s)$ temos a homotopia desejada (para ver que é contínua, basta escrevê-la explicitamente). $\square$

Proposição 6.2.8. *Sejam* (X, τ) *espaço topológico e* $x_0 \in X$. *Então* $(\pi_1(X, x_0), *)$ *é um grupo.*

Demonstração. Associatividade: Note que $f * (g * h) \neq (f * g) * h$, pois no primeiro caso, f ocupa "metade do tempo", já no segundo caso, ocupa "$\frac{1}{4}$ do tempo". Estendendo a ideia anterior, podemos definir $f *_a g *_b h$ de forma que no intervalo $[0, a[$ se percorra o caminho indicado por f, em $[a, b[$ se percorra o caminho indicado por g e, finalmente, no intervalo $[b, 1[$ se percorra o caminho indicado por h. De maneira análoga ao feito anteriormente, pode-se notar que, dados $0 < a < b < 1$ e $0 < \alpha < \beta < 1$, $f *_a g *_b h \simeq_{x_0} f *_\alpha *_\beta h$.

Assim, só precisamo notar que $f * (g * h) = f *_{\frac{1}{2}} g *_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} h$ e que $(f * g) * h = f *_{\frac{1}{4}} g *_{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} h$.

Elemento neutro: Considere e o laço constante igual a x_0. Vamos mostrar que $[e]$ é o elemento neutro. Para tanto, basta mostrar que $f * e \simeq_{x_0} f \simeq_{x_0} e * f$. De fato, para o primeiro caso, fazemos

$$H(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2x}{2-x}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{2-x}{2} \\ x_0, & \text{se } \frac{2-x}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Elemento inverso: Dado f laço em x_0, seja f^- dado por $f^-(x) = f(1-x)$. Definimos $[f]^- = [f^-]$. Se mostrarmos que $f * f^- \simeq_{x_0} e \simeq_{x_0} f^- * f$, seguirá que $[f]^-$ está bem definido. Para o primeiro caso, fazemos

$$H(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-x}{2} \\ f^-(t+x), & \text{se } \frac{1-x}{2} \leq t \leq 1-x \\ x_0, & \text{se } 1-x \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

$\square$

Definição 6.2.9. (X, x_0) é dito um **espaço com ponto base** se X é um espaço topológico e $x_0 \in X$. Denotamos por $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se $f : X \to Y$ e $f(x_0) = y_0$. Dizemos que (X, x_0) e (Y, y_0) são **homotopicamente equivalentes** se existem $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \equiv Id_Y$ relativamente a $\{y_0\}$ e $g \circ f \equiv Id_X$ relativamente a $\{x_0\}$.

Proposição 6.2.10. *Toda $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ contínua induz um homomorfismo $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Para cada laço g sobre x_0 defina $(f'(g))(t) = f(g(t))$. Note que $f'(g)$ é um laço sobre y_0. Defina $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ como $f^\sharp([g]) = [f'(g)]$. Note que $f^\sharp$ está bem definida (exercício).

Resta então mostrar que $f^\sharp([g] * [h]) = f^\sharp([g]) * f^\sharp([h])$. Note que

$$f'(g*h) = \begin{cases} f(g(2x)) = (f'(g))(2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(h(2x-1)) = (f'(h))(2x-1), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} = f'(g)*f'(h).$$

□

Proposição 6.2.11. *(a) $(Id_X)^\sharp = Id_{\pi_1(X, x_0)}$;*

(b) Se $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ são tais que $f \simeq g$ com relação a $\{x_0\}$, então $f^\sharp = g^\sharp$;

(c) Se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, então $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$.

Demonstração. (a) Imediato.

(b) Seja h laço sobre x_0. Basta mostrar que $f'(h) \simeq_{x_0} g'(h)$. Note que a demonstração segue de maneira análoga à prova de que composta de homotópicas é homotópica, tomando-se cuidado com x_0.

(c) Seja h laço sobre x_0. Dado $t \in [0, 1]$, temos $((g \circ f)'(h))(t) = (g \circ f)(h(t)) = g'(f(h(t))) = ((g' \circ f')h)(t)$.

□

Proposição 6.2.12. *Se (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ relativamente a y_0 e $g \circ f \simeq Id_X$ relativamente a x_0. Assim, $(g \circ f)^\sharp = Id_{\pi_1(X, x_0)}$ e $(f \circ g)^\sharp = Id_{\pi_1(Y, y_0)}$, mas $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$ e $(f \circ g)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$. Logo, $f^\sharp$ e $g^\sharp$ são isomorfismos. □

Corolário 6.2.13. *Se (X,τ) e (Y,σ) são tais que $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(Y,y_0)$ não são isomorfos, então não existe homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$.*

Exercicios

Exercício 6.2.14. Mostre que se X é contrátil para a função constante igual a $x_0 \in X$ e a homotopia preserva o ponto x_0, então o grupo fundamental de X sobre o ponto x_0 é trivial.

Exercício 6.2.15. Seja $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mostre que $\pi_1(X,(1,0))$ e $\pi_1(S^1,(1,0))$ são isomorfos.

Exercício 6.2.16. Seja X conexo por caminhos. Sejam $x_0, x_1 \in X$. Mostre que $\pi_1(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$.

6.3 Espaço de recobrimento

Nesta seção, vamos apresentar uma técnica para se determinar grupos fundamentais. Como exemplo, vamos determinar o grupo fundamental de S^1.

Definição 6.3.1. Sejam (X,τ), $(\tilde{X},\rho)$, (Y,σ) espaços topológicos. Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma função contínua. Sejam $f : Y \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow \tilde{X}$ funções contínuas. Dizemos que g é um **levantamento** de f se $f = p \circ g$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Exemplo 6.3.2. Considere $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Dado $z \in \mathbb{Z}$, seja $\omega_z : [0,1] \longrightarrow S^1$ dada por $\omega_z(t) = (\cos(2\pi z t), \operatorname{sen}(2\pi z t))$. Note que $\tilde{\omega}_z : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\omega}_z(t) = zt$ é um levantamento de ω_z.

Na notação da definião anterior, temos que $X = S^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\omega}_z"] \arrow[r, "\omega_z"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Definição 6.3.3. Dado um espaço (X, τ), chamamos de um **espaço de recobrimento** um espaço $(\tilde{X}, \rho)$ e uma função $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ tais que, para todo $x \in X$, existe A aberto tal que $x \in A$, $p^{-1}[A] = \bigcup_{i \in I} A_i$ onde cada A_i é aberto, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $p_i = p \restriction A_i$ é um homeomorfismo.

Vamos abusar da notação e, quando dissermos que $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um espaço de recobrimento, estaremos indicando que a situação acima ocorre - incluindo aí os homeomorfismos $p_i : A_i \to A$.

Exemplo 6.3.4. Note que, no exemplo anterior, temos que $\mathbb{R}$ e p formam um espaço de recobrimento para S^1.

Proposição 6.3.5. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $\varphi : Y \to X$ uma função contínua e sejam $f, g : Y \to \tilde{X}$ levantamentos para φ. Então $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ é aberto.*

Demonstração. Seja $D = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$. Seja $y \in D$. Seja A aberto em X tal que $p(f(y)) \in A$ e seja A_i aberto homeomorfo a A contendo $f(y)$. Pela continuidade de f e g, existem abertos V e W tais que $f[V], g[W] \subset A_i$ e $y \in V, W$. Vamos mostrar que $V \cap W \subset D$ (note que isso prova o que desejamos). De fato, seja $v \in V \cap W$. Temos que

$$p(f(z)) = \varphi(z) = p(g(z)).$$

Como $f(z), g(z) \in A_i$, aplicando p_i^{-1} dos dois lados da equação, obtemos $f(z) = g(z)$ como queríamos. □

Corolário 6.3.6. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento onde X é de Hausdorff. Seja $\varphi : Y \to X$ uma função contínua onde Y é um espaço conexo. Se $f, g : Y \to \tilde{X}$ são dois levantamentos para φ tais que existe algum $y \in Y$ tal que $f(y) = g(y)$, então $f = g$.*

Demonstração. Seja $D = \{d \in Y : f(d) = g(d)\}$. Pelo resultado anterior, D é aberto. Se mostrarmos que D é fechado, teremos o resultado pela conexidade de Y. Seja $y \in Y \smallsetminus D$. Então $f(y) \neq g(y)$. Seja A como na definição de espaço de recobrimento tal que $p(f(y)) \in A$. Note que, como f e g são levantamentos de φ, $p(f(y)) = \varphi(y) = p(g(y))$. Assim, existem A_i e A_j distintos tais que $f(y) \in A_i$ e $g(y) \in A_j$. Pela continuidade de f e g, existem abertos V e W em Y tais que $f[V] \subset A_i$ e $g[W] \subset A_j$ com $y \in V \cap W$. Note que, como $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(V \cap W) \cap D = \emptyset$ como queríamos. □

Antes de começarmos a demonstração de que é possível levantar homotopias de caminhos, vamos provar um resultado que vai nos ajudar (e que é interessante por si só):

Proposição 6.3.7. *Seja (X, d) espaço métrico compacto. Dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que todo conjunto A com diâmetro menor que r é tal que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subset C$. Chamamos um r assim de um* **número de Lebesgue** *para a cobertura $\mathcal{C}$.*

Dizemos que A tem **diâmetro** menor que r se, para todo $a, b \in A$, $d(a, b) < r$.

Demonstração. Para $s \in \mathbb{R}_{>0}$, considere

$$V_s = \{x \in X : \exists C \in \mathcal{C}\ d(x, X \smallsetminus C) > s\}$$

Vamos provar que V_s é aberto. Dado $x \in V_s$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $d(x, X \smallsetminus C) > s$. Seja $t = d(x, X \smallsetminus C)$. Vamos provar que $B_{t-s}(x) \subset V_s$ (o que prova o que queremos). Seja $y \in B_{t-s}(x)$. É suficiente mostrar que $d(y, X \smallsetminus C) > s$. Suponha que não. Então

$$\begin{aligned} d(x, X \smallsetminus C) &\leq d(x, y) + d(y, X \smallsetminus C) \\ &\leq d(x, y) + s \\ &< t - s + s \\ &= t \end{aligned}$$

contrariando que $d(x, X \smallsetminus C) = t$.

Note que $\{V_s : s \in \mathbb{R}_{>0}\}$ é uma cobertura aberta para X. Note que que, se $s > t$, então $V_s \subset V_t$. Por compacidade, existem $s_1, ..., s_n$ tais $X \subset \bigcup_{i=1} V_{s_i}$. Logo, $X = V_s$, para $s = \min\{s_1, ..., s_n\}$.

Note que $r = s$ satisfaz o que desejamos. De fato, dado um conjunto A de diâmetro $\varepsilon < r$, dado $a \in A$, temos que $A \subset B_\varepsilon(a)$ e $B_\varepsilon(a) \subset B_r(a) \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$ já que $a \in V_s$.

□

Lema 6.3.8. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua. Seja V conexo de Y tal que $f[V] \subset A$ para algum A da definição de espaço de recobrimento. Se $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ é um levantamento para f, então $\tilde{f}[V] \subset A_i$ para algum i.*

A ideia aqui é que conexos acabam chegando num único "pedaço" no levantamento.

Demonstração. Como $\tilde{f}$ é levantamento, temos que $\tilde{f}[V] \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Como os A_i's são dois a dois disjuntos e $\tilde{f}[V]$ é conexo, temos o resultado. □

Lema 6.3.9. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : Y \to X$ uma função contínua. Sejam $V, W \subset Y$ abertos e $\tilde{f} : V \to \tilde{X}$ levantamento para $f \restriction V$. Se W é tal que:*

Este lema serve para "estender um pouco" um levantamento.

(a) $f[W] \subset A$, onde A é um dos abertos como na definição de espaço de recobrimento.

(b) $V \cap W$ é conexo e não vazio.

Então $\tilde{f}$ admite uma extensão contínua para $V \cup W$ que é um levantamento para $f \restriction (V \cup W)$.

Demonstração. Seja $\tilde{y}_0 \in V \cap W$. Como $f(y_0) \in A$, existe A_i como na definição de espaço de recobrimento tal que $\tilde{f}(y_0) \in A_i$. Defina $\tilde{g} : W \to \tilde{X}$ como $p_i^{-1} \circ f$. Pelo lema anterior, $\tilde{f}[V \cap W] \subset A_i$. Logo, $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ coincidem em $V \cap W$ e, portanto, podemos estender $\tilde{f}$ aos valores de $\tilde{g}$ (veja o Alongamento 6.3.16). □

Proposição 6.3.10. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to X$ uma função contínua. Dado $y_0 \in [0,1] \times [0,1]$ e fixado $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tais que $p(\tilde{x}_0) = f(y_0)$, existe um único levantamento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos básicos de $[0,1] \times [0,1]$ tal que, para cada $C \in \mathcal{C}$, $f[C] \subset A^C$ onde A^C é um dos abertos como na definição de espaço recobrimento. Seja r um número de Lebesgue para tal cobertura. Sejam $Q_1, ..., Q_n$ quadrados abertos de mesmo diâmetro menor que r que cubram $[0,1] \times [0,1]$ e de forma que

$$(\bigcup_{i \leq j} Q_i) \cap Q_{j+1}$$

é não vazio e conexo e que $y_0 \in Q_1$. Pelo diâmetro de Q_1, existe A como na definição de espaço de recobrimento tal que $f[Q_1] \subset A$. Seja A_i o aberto homeomorfo a A via p tal que $\tilde{x}_0 \in A_i$. Se definirmos $\tilde{f}_1 : Q_1 \to \tilde{X}$ como $p_i^{-1} \circ f \restriction Q_1$, temos que $\tilde{f}$ é um levantamento para f em Q_1.

Podemos estender $\tilde{f}_1$ para $\tilde{f}_2 : Q_1 \cup Q_2 \to \tilde{X}$ pelo lema. Prosseguindo assim, obtemos $\tilde{f} = \tilde{f}_n$ o levantamento desejado. Tal levantamento é único pelo Corolário 6.3.6. □

De maneira análoga ao resultado anterior, podemos provar o seguinte:

Proposição 6.3.11. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Seja $f : [0,1] \to X$ uma função contínua. Dado $y_0 \in [0,1]$ e fixado $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ tal que $p(x_0) = f(y_0)$, existe um único levantamento $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(y) = \tilde{x}_0$.*

Com tudo isso, agora podemos provar que levantamentos de homotopias de caminhos existem e são únicos:

Teorema 6.3.12. *Seja* $p : \tilde{X} \to X$ *um espaço de recobrimento. Seja* $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ *uma homotopia entre* $H(\cdot, 0)$ *e* $H(\cdot, 1)$*. Dado* $y_0 \in [0,1] \times [0,1]$ *e fixado* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$ *tal que* $p(\tilde{x}_0) = f(y_0)$*, existe um único levantamento* $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ *tal que* $\tilde{f}(y) = \tilde{x}_0$*. Além disso,* $\tilde{H}$ *é uma homotopia entre* $\tilde{H}(\cdot, 0)$ *e* $\tilde{H}(\cdot, 1)$*.*

Demonstração. Já temos que existe $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ um único levantamento para H como no enunciado. Resta mostrar que é, de fato, uma homotopia de caminhos. Isto é, resta mostrar que $\tilde{H}(0, \cdot)$ e $\tilde{H}(1, \cdot)$ são constantes. Vamos provar o caso para $\tilde{H}(0, \cdot)$ e o outro é análogo. Note que, como H é homotopia de caminhos, $H(0, \cdot)$ é constante. Seja A aberto como na definição espaço de recobrimento tal que $H(0,0) \in A$. Note que $\tilde{H}[\{0\} \times [0,1]]$ é conexo e, portanto, está contido num único A_i. Como $\tilde{H}$ é levantamento, $\tilde{H}(0, \cdot)$ é constante. $\square$

Vamos terminar esta seção, determinando o grupo fundamental de S^1. Lembrando o que fizemos no início da seção, temos que, para cada $z \in \mathbb{Z}$, $\omega_z(t) = (\cos(2\pi z t), \mathrm{sen}(2\pi z t))$. Informalmente, temos que cada ω_z dá "z" voltas em S^1 - indicando-se por voltas positivas as em sentido anti-horário e por negativas as em sentido horário. Note também que $\omega_{a+b} \simeq \omega_a * \omega_b$. Ou seja, essas funções se comportam como $\mathbb{Z}$ com a soma. Vamos provar exatamente isso.

Teorema 6.3.13. $\pi_1(S^1, (1,0))$ *é isomorfo ao grupo* $(\mathbb{Z}, +)$ *e é gerado por* $[\omega] = [\omega_1]$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que cada laço em $x_0 = (1,0)$ é homotópico a algum ω_z e que ω_z e ω_s não são homotópicos se $z \neq s$. Daí o resultado segue se definirmos $\varphi : \pi(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ por $\varphi(f) = z$, onde z é o único tal que $[f] = [\omega_z]$.

Seja $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ um laço em x_0. Seja $\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ um levantamento para f com $\tilde{f}(0) = 0$ (dada pela Proposição 6.3.11). Note que $\tilde{f}(1) = z \in \mathbb{Z}$, pois $p^{-1}[(1,0)] = \mathbb{Z}$. Assim, note que $\tilde{f}$ é homotópica a $\tilde{\omega}_z$ via

$$\tilde{H}(s,t) = (1-t)\tilde{f}(s) + t\tilde{\omega}_z(s)$$

Aplicando p a esta homotopia, obtemos que $[f] = [\omega_z]$.

Resta mostrar a unicidade. Suponha $[\omega_z] = [\omega_s]$. Seja $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ homotopia entre ω_z e ω_s. Então, pelo Teorema 6.3.12, obtemos que existe $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ levantamento para F tal que $\tilde{F}(0,0) = 0$. Note que, assim, $\tilde{F}(\cdot, 0)$ é um levantamento para ω_s e $\tilde{F}(\cdot, 1)$ é um levantamento para ω_z. Pela unicidade (Corolário 6.3.6), temos que $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{\omega}_z$ e $\tilde{F}(\cdot, 1) =$

$\tilde{\omega}_s$. Finalmente, temos que $\tilde{F}$ é levantamento de caminhos, logo $\tilde{F}(1,\cdot)$ é constante. Assim

$$z = \tilde{\omega}_z(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{\omega}_s(1) = s$$

$\square$

Alongamentos

Alongamento 6.3.14. Mostre que S^1 não é contrátil.

Alongamento 6.3.15. Seja $p : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento. Mostre que se X é de Hausdorff, então $\tilde{X}$ também é.

Alongamento 6.3.16. Sejam $f : V \to Y$ e $g : W \to Y$ funções contínuas onde $V, W \subset X$ são abertos e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in V \cap W$. Mostre que $h : V \cup W \to Y$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ g(x) & \text{se } x \in W \end{cases}$$

é contínua.

Exercícios

Exercício 6.3.17. Mostre que $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ não é contrátil.

Exercício 6.3.18. Considere $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. Este é um roteiro para mostrar o **Teorema do ponto fixo de Brouwer**: Seja $f : D^2 \longrightarrow D^2$ uma função contínua. Então f tem ponto fixo.

(a) Suponha que não. Para cada x, defina $F(x)$ igual ao (único) ponto de S^1 que está na intersecção da semi-reta iniciada em x e que passa por $f(x)$ (e que é diferente de x). Faça um desenho e se convença que F é contínua.

(b) Note que F é uma retração de deformação.

(c) Conclua que D^2 e S^1 são homotopicamente equivalentes e obtenha uma contradição.

Capítulo 7

Aplicações

7.1 Metrizabilidade

Nesta seção, vamos fazer alguns casos simples de quando podemos concluir que um espaço topológico tem uma métrica associada. Também vamos ver alguns critérios para ver se podemos tomar tal métrica completa.

No que se segue, convém lembrar do resultado do Exercício 1.1.68 que diz que, para todo espaço métrico completo (X, d), existe d' métrica completa limitada por 1 que é equivalente a d.

O próximo resultado basicamente diz que existe uma métrica no produto enumerável de métricos que induz a topologia produto. Além disso, podemos tomar tal métrica completa se cada um dos espaços for completo:

Proposição 7.1.1. *Sejam $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ espaços métricos tais que cada d_n é limitada por 1. Então $d : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^{n+1}}$$

é uma métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ que induz a topologia produto sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Além disso, se cada d_n for completa, então d é completa.

Demonstração. Exercício. $\square$

Corolário 7.1.2. *Existe uma métrica completa sobre $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$ que induz a topologia produto deste espaço.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior e do fato de $[0,1]$ com a métrica usual ser completo. $\square$

Teorema 7.1.3. *Seja* (X, τ) *espaço* T_1. *São equivalentes:*

(a) X *é* T_3 *e tem base enumerável;*

(b) X *é separável e metrizável;*

(c) X *é homeomorfo a um subespaço de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Claramente $b \Rightarrow a$, já que X ser metrizável implica em ser regular e, para espaços métricos, ser separável implica a existência de base enumerável.

$c \Rightarrow a$. Note que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável (pois é produto enumerável de espaços com base enumerável) e é regular (produto de regulares é regular). Logo, (X, τ) tem tais propriedades, pois ambas são preservadas para subespaços.

$c \Rightarrow b$. Como $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável, X também tem. Logo X é separável. Note que subespaço de métrico é metrizável.

$a \Rightarrow c$. Sejam $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base para X e $C = \{(m,n) : \overline{B_m} \subset B_n\}$. Note que (X, τ) é normal (espaço regular com base enumerável é normal). Para cada $(m,n) \in C$, seja $f_{m,n} : X \to [0,1]$ contínua tal que $f_{m,n}[\overline{B_m}] = \{0\}$ e $f_{m,n}[X \setminus B_n] = \{1\}$ (cuja existência se deve à normalidade). Seja $\mathcal{F} = \{f_{m,n} : (m,n) \in C\}$. Note que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados.

De fato, seja $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$. Seja B_n um aberto da base tal que $x \in B_n \subset X \setminus F$. Como X é regular, existe B_m tal que $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n$. Note que $f_{m,n}$ é tal que $f_{m,n}(x) = 0$ e $f_{m,n}[F] = \{1\}$. Pelo Teorema da Imersão, X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathcal{F}}$, mas como $\mathcal{F}$ é enumerável, segue que X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. □

Note que, desta forma, do ponto de vista topológico o espaço permanece o mesmo, mudando apenas a sua métrica.

Agora vamos analisar quando a métrica encontrada pode ser completa. Aqui vamos fazer um processo diferente do completamento de espaços métricos. Lá, estendemos o espaço e a métrica até fazer com que o total fique completo. Aqui, vamos trocar a métrica por uma equivalente, mas que seja completa.

Definição 7.1.4. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é **completamente metrizável** se ele é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Exemplo 7.1.5. O espaço $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ com a métrica usual não é completo, mas é um espaço completamente metrizável pois a métrica discreta (que é equivalente a usual) é equivalente a esta.

Enquanto subespaços fechados de métricos completos são métricos completos (ver o Exercício 7.1.10), o subespaços abertos são completamente metrizáveis:

Proposição 7.1.6. *Sejam (X, d) espaço métrico completo e $A \subset X$ aberto. Então A é completamente metrizável.*

Demonstração. Considere $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, X \setminus A)$. Note que g é contínua e, para todo $a \in A$, $g(a) > 0$ (pois A é aberto). Assim, $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(a) = \frac{1}{g(a)}$ é contínua e positiva. Considere então $G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset X \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que G é completo. Para isso, basta mostrar que G é fechado em $X \times \mathbb{R}$. Definindo $l : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $l(x, y) = y \cdot g(x)$ (que é contínua), vemos que $G = \{(x, y) : y \cdot g(x) = 1\} = l^{-1}[\{1\}]$, isto é, G é a imagem inversa de um fechado via função contínua, logo G é fechado, como queríamos.

Por fim, note que $h : A \to G$ definida por $h(x) = (x, f(x))$ é um homeomorfismo: h é claramente bijetora; por ser contínua nas coordenadas, segue que h é contínua; a inversa de h é a projeção $\pi : G \to A$ dada por $\pi((x, f(x)) = x$, que é contínua por ser restrição de π_X. Portanto, A é completamente metrizável. □

Podemos melhorar ainda mais o resultado anterior:

Teorema 7.1.7. *Todo G_δ num espaço métrico completo é completamente metrizável.*

Um G_δ é uma interseção enumerável de abertos.

Demonstração. Sejam (X, d) espaço métrico completo e $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é aberto em X. Seja d_n métrica completa equivalente a d sobre A_n. Podemos supor d_n limitada por 1. Assim, existe uma métrica completa sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ que induz a topologia produto. Considere $\Delta = \left\{(a, \ldots, a, \ldots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n : a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right\}$. Note que Δ é fechado em $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (por ser T_2). Logo, Δ é métrico completo.

Note que $f : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \Delta$ dada por $f(a) = (a)_{n \in \mathbb{N}}$ é um homeomorfismo. Portanto, G é completamente metrizável. □

Com isso, obtemos facilmente um resultado bastante contra intuitivo:

Corolário 7.1.8. *Existe uma métrica completa equivalente à usual sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Veja também o Exercício 7.1.12.

Demonstração. Note que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ é um G_δ e, portanto o resultado segue pelo teorema anterior. □

Alongamento

Alongamento 7.1.9. Sejam $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ espaços métricos completos. Mostre que $X_1 \times X_2$ com a métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ é métrico completo.

Exercicios

Exercício 7.1.10. Seja (X, d) um espaço métrico completo. Mostre que $F \subset X$ é completo se, e somente se, é fechado.

Exercício 7.1.11. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos completos. Seja $F \subset X$ fechado e $A \subset Y$ aberto. Mostre que $F \times A$ é completamente metrizável.

Exercício 7.1.12. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **isometria** se, para todo $a, b \in X$, $d(a, b) = d'(f(a), f(b))$.

(a) Mostre que toda isometria é um homeomorfismo sobre sua imagem.

(b) Considere $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Considere d a métrica usual em $\mathbb{P}$ e considere d' a métrica obtida a partir do Corolário 7.1.8. Mostre que a função identidade id de $(\mathbb{P}, d)$ em $(\mathbb{P}, d')$ é um homeomorfismo mas não é uma isometria.

Exercício 7.1.13. Mostre que todo métrico separável (X, d) está contido num métrico compacto (Y, d') (não necessariamente a métrica d é uma restrição de d', mas essas duas métricas são equivalentes em X).

7.2 Espaços de Baire

Intersecção de dois densos não precisa ser densa (Alongamento 7.2.9). Mas se tivermos uma família em que cada denso é também aberto, qualquer intersecção finita também é densa (Alongamento 7.2.10). Espaços de Baire são aqueles que podemos repetir esse processo para famílias enumeráveis:

Definição 7.2.1. Dizemos que (X, τ) é um **Espaço de Baire** se para toda família $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos densos em X, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é denso em X.

Nosso primeiro exemplo de espaços de Baire são os compactos de Hausdorff:

Teorema 7.2.2 (Teorema de Baire, para compactos)**.** *Seja (X, τ) um compacto de Hausdorff. Então (X, τ) é de Baire.*

Veja também o Exercício 7.2.17

Demonstração. Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos e $V \neq \emptyset$ um aberto. Vamos mostrar que $V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$. Para tanto, vamos construir uma sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos não vazios tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\overline{V_0} \subset V$;

(b) $\overline{V_n} \subset A_n$;

(c) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$.

Como $A_0 \cap V$ é um aberto não vazio, existe $x_0 \in A_0 \cap V$. Por X ser regular (pois é compacto e de Hausdorff), existe V_0 aberto tal que $x_0 \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset A_0 \cap V$. Note que temos satisfeitos os itens (a), (b) e (c) acima (os dois últimos por vacuidade).

Suponha definidos V_k, para $k = 0, 1, \ldots, n$, satisfazendo as condições impostas acima. Definamos V_{n+1}. Como $V_n \cap A_{n+1}$ é aberto não vazio, existe $x_{n+1} \in V_n \cap A_{n+1}$. Novamente, pela regularidade de X, existe V_{n+1} aberto tal que $x_{n+1} \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap A_{n+1}$, que claramente satisfaz (b) e (c). Isto encerra a indução.

Note que a família $(\overline{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de fechados com a propriedade da intersecção finita (devido à condição (c)), num espaço compacto. Logo, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$. Por (a) e (b), $x \in V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. $\square$

Outro exemplo importante de espaços de Baire são os espaços métricos completos:

Teorema 7.2.3 (Teorema de Baire, para métricos completos)**.** *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então (X, d) é um espaço de Baire.*

Demonstração. Sejam $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos e V um aberto não vazio. Vamos mostrar que $V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \emptyset$. Para tanto, vamos construir uma sequência de bolas abertas $(B_{r_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

(a) $r_n \to 0$;

(b) $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset V$;

(c) $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset A_n$;

(d) $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n)$.

Como $A_0 \cap V$ é aberto não vazio, existem $x_0 \in A_0 \cap V$ e $r_0 \in]0, 1[$ tais que $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset A_0 \cap V$ (o que é possível pela regularidade de (X, d)). Note que todas as condições impostas acima são satisfeitas. Suponha definidos $B_{r_k}(x_k)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, satisfazendo as condições (a), (b), (c) e (d).

Por termos que $B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$ é aberto não vazio, existem $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$ e x_{n+1} tais que $x_{n+1} \in B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}$. Claramente as condições impostas acima são satisfeitas.

Segue, por construção, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como (X, d) é métrico completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Note que $x \in \overline{B_{r_k}(x_k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$: de fato, $(x_n)_{n\geq k}$ é uma sequência de pontos de $\overline{B_{r_k}(x_k)}$ que converge para x. Logo, $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_{r_k}(x_k)}$ e, portanto, $x \in V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. □

Com isso, podemos provar o seguinte resultado (tomando-se o cuidado de escolher a métrica certa):

Corolário 7.2.4. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um espaço de Baire.*

Demonstração. Segue de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser completamente metrizável e do fato de que "ser de Baire" é um invariante topológico. □

Também obtemos uma forma indireta de provar que não existe uma métrica completa equivalente a usual nos racionais:

Corolário 7.2.5. *$\mathbb{Q}$ não é completamente metrizável.*

Demonstração. Note que, para cada $q \in \mathbb{Q}$, $A_q = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$ é um aberto denso em $\mathbb{Q}$. Contudo, observe que $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} A_q = \emptyset$. Logo, $\mathbb{Q}$ não é de Baire (e, portanto, não pode ser completamente metrizável). □

De forma mais indireta ainda, obtemos que os racionais não formam um G_δ em $\mathbb{R}$:

Corolário 7.2.6. *$\mathbb{Q}$ não é um G_δ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\mathbb{Q}$ fosse um G_δ, ele seria completamente metrizável. □

Vimos que se X é completamente metrizável ou se é localmente compacto e de Hausdorff, obtemos que X é de Baire. Vamos terminar esta seção mostrando que essas condições não são necessárias:

Proposição 7.2.7. *A reta de Sorgenfrey é um espaço de Baire mas não é localmente compacto nem completamente metrizável.*

Demonstração. Já vimos que $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$ não é localmente compacto (Exercício 4.1.37) e, claramente, $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$ não é completamente metrizável já que nem é metrizável.

Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S$ é de Baire. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de abertos densos em $\mathbb{R}_S$.

Fato 7.2.8. *Se A é aberto denso em $\mathbb{R}_S$, então A contém um aberto denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Note que podemos escrever $A = \bigcup_{i\in I}[a_i, b_i[$. Considere $A' = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$ e note que A' é aberto em $\mathbb{R}$ e que $A' \subset A$. Vamos mostrar que A' é denso em $\mathbb{R}$. Para isso, basta provarmos que, dados $a < b$, temos que $]a, b[\cap A' \neq \emptyset$. Note que $]a, b[$ é aberto em $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$. Logo, $]a, b[\cap A \neq \emptyset$. Seja $i \in I$ tal que $]a, b[\cap[a_i, b_i[\neq \emptyset$. Note que, assim, $]a, b[\cap]a_i, b_i[\neq \emptyset$ o que implica que $]a, b[\cap A' \neq \emptyset$ como queríamos. $\square$

Seja $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada $A'_n \subset A_n$ e A'_n é aberto denso em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é de Baire (pois é métrico completo), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ é denso em $\mathbb{R}$ e, portanto, denso em $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$ (ver o Exercício 7.2.15). Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A' \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A$, temos que $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$ é de Baire. $\square$

Alongamentos

Alongamento 7.2.9. Dê um exemplo de um espaço com dois densos disjuntos.

Alongamento 7.2.10. Mostre que a intersecção finita de abertos densas é densa.

Alongamento 7.2.11. Dizemos que $Y \subset X$ é um **conjunto raro** se, $\mathrm{Int}\overline{A} = \emptyset$. Dizemos que $Z \subset X$ é um **conjunto magro** se existe uma família $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos raros em X tal que $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Alternativamente, dizemos que um conjunto magro é um **conjunto de primeira categoria** e todo conjunto não magro é dito um **conjunto de segunda categoria**.

(a) Mostre que $Y \subset X$ é raro em X se, e somente se, $X \smallsetminus \overline{Y}$ é denso em X.

(b) (**Teorema de Baire em termos de Categoria**) Mostre que todo espaço de Baire é de segunda categoria.

Alongamento 7.2.12. Dê um exemplo de um espaço enumerável de segunda categoria. Como são os conjuntos raros neste exemplo?

Alongamento 7.2.13. Dê um exemplo de um conjunto que pode ser escrito como união enumerável de G_δ's mas que não seja ele próprio um G_δ.

Exercícios

Exercício 7.2.14. Sejam $Y \subset X$ espaços topológicos (com Y com a topologia de subespaço). Seja $R \subset Y$ raro (em Y). Mostre que R é raro em X.

Exercício 7.2.15. Mostre que a reta real e a reta de Sorgenfrey tem os mesmos densos.

Exercício 7.2.16. Mostre que a condição "ser de Hausdorff" é necessária para mostrar que todo compacto é de Baire.

Exercício 7.2.17. Mostre que todo espaço localmente compacto é de Baire.

Exercício 7.2.18. Mostre que todo espaço enumerável T_1, sem pontos isolados não é de Baire (x é um **ponto isolado** se $\{x\}$ é aberto).

Exercício 7.2.19. Mostre que todo subespaço aberto não vazio de um espaço de Baire é um espaço de Baire.

Exercício 7.2.20. Seja (X, τ) um espaço de Baire se seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de abertos densos em X. Mostre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é um espaço de Baire.

7.3 Compactificação de Stone-Čech

Dado X um espaço de Hausdorff, dizemos que K é uma **compactificação** de X se K é compacto, de Hausdorff e $\overline{X} = K$. Note que, assim, para que um espaço admita alguma compactificação, ele precisa ser, no mínimo, completamente regular já que todo compacto de Hausdorff é completamente regular e tal propriedade é hereditária para subespaços. Nesta seção, vamos mostrar que, na verdade, todo espaço completamente regular admite uma compactificação natural e que tal compactificação tem propriedades bastante interessantes.

Definição 7.3.1. Seja (X, τ) completamente regular. Chamamos de $\beta X = \{(f(x))_{f \in \mathcal{F}} : x \in X\} \subset [0, 1]^{\mathcal{F}}$, onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to [0, 1]$. βX é a **compactificação de Stone-Čech**.

A menos de homeomorfismos, podemos considerar $X \subset \beta X$ (pelo Teorema da Imersão). Desta forma, usaremos tal identificação ao longo desta seção.

A seguir, vamos mostrar que βX de fato é uma compactificação e também exibir uma propriedade importante de tal compactificação:

Teorema 7.3.2. *Seja (X, τ) completamente regular. Então*

(a) βX é um compacto de Hausdorff tal que $\overline{X} = \beta X$.

(b) Para toda $f : X \to [0, 1]$ contínua, existe $\tilde{f} : \beta X \to [0, 1]$ extensão contínua de f.

Demonstração. Claramente βX é compacto Hausdorff, por ser definido como um subconjunto fechado de $[0, 1]^{\mathcal{F}}$, que é um compacto de Hausdorff. Do Teorema da Imersão, temos que X é homeomorfo a $\{(f(x))_{f \in \mathcal{F}} : x \in X\}$. Assim, a igualdade $\beta X = \overline{X}$ segue diretamente pela definição.

Provemos (b). Sejam $g : X \to [0, 1]$ contínua e $a \in \beta X$. Note que $a = (a_f)_{f \in \mathcal{F}}$, com cada $a_f \in [0, 1]$ (lembre-se que $[0, 1]^{\mathcal{F}} = \prod_{f \in F}[0, 1]$). Defina $\tilde{g}(a) = a_g$. Vamos provar que, de fato, $\tilde{g}$ estende g. Seja $x \in X$. Na imersão, identificamos $x = ((f(x))_{f \in \mathcal{F}}$. Desta forma, $\tilde{g}(x) = g(x)$ como queríamos. A continuidade segue do fato de que $\tilde{g} : \beta X \to [0, 1]$ simplesmente é a função π_g (projeção na g-ésima coordenada). □

Observação 7.3.3. Aqui vale fazer um comentário sobre a Compactificação de Stone-Čech para $\mathbb{N}$. Podemos mostrar facilmente que esta compactificação não acrescenta apenas um ponto: veja o Exercício 7.5.2.

A seguir vamos provar que as propriedades descritas no teorema acima na verdade caracterizam a compactificação de Stone-Čech:

Proposição 7.3.4. *Seja (X, τ) espaço completamente regular e Y um compacto de Hausdorff tal que $\overline{X} = Y$ e, para qualquer função $f : X \to [0, 1]$ contínua, exista $\tilde{f} : Y \to [0, 1]$ extensão contínua de f. Então, dada $f : X \to K$ contínua, onde K é compacto Hausdorff, existe $\tilde{f} : Y \to K$ extensão contínua de f.*

Demonstração. Podemos supor $K \subset [0, 1]^I$ pelo Teorema da Imersão, para algum conjunto I. Seja $f : X \to K$ contínua. Considere, para cada $i \in I$, $f_i : X \to [0, 1]$ dada por $f_i = \pi_i \circ f$. Por hipótese, existe $\tilde{f}_i : Y \to [0, 1]$ extensão contínua de f_i. Defina $\tilde{f} : Y \to K$ como sendo $\tilde{f}(y) = (\tilde{f}_i(y))_{i \in I}$. Note que $\tilde{f}$ é uma extensão contínua de f. Só resta mostrar que $\tilde{f}[Y] \subset K$. Pelo Alongamento 7.4.1, temos

$$\tilde{f}[Y] = \tilde{f}[\overline{X}] \subset \overline{f[X]} \subset \overline{K} = K$$

□

Proposição 7.3.5. *βX é o único espaço que satisfaz as condições (a) e (b) do Teorema 7.3.2 (a menos de homeomorfismo).*

Demonstração. Seja Y satisfazendo (a) e (b). Considere $i_1 : X \to Y$ a função inclusão. Pela proposição anterior, existe $f : \beta X \to Y$ extensão contínua de i_1. Considere $i_2 : X \to \beta X$ também a função inclusão. Então existe $g : Y \to \beta X$ extensão contínua de i_2. Note que $f \circ g : Y \to Y$ e $g \circ f : \beta X \to \beta X$ são contínuas e $f \circ g \restriction X = g \circ f \restriction X = id_X$. Logo, f e g são bijeções contínuas, uma a inversa da outra (pois X é denso). □

Proposição 7.3.6. *Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado infinito. Então F contém um subespaço homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

Veja o Exercício 7.5.1.

Demonstração. Note que podemos construir famílias $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $a_n \in V_n \cap F$;
- V_n é aberto;
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é homeomorfo a $\mathbb{N}$ (já que é discreto). Seja $g : A \longrightarrow [0,1]$. Considere $G : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$G(n) = \begin{cases} g(a_k) & \text{se } n \in V_k \cap \mathbb{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Veja o Alongamento 7.4.2.

Seja $\tilde{G} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ extensão contínua de G. Dado $a_k \in A$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}(a_k) & \in & \tilde{G}[V_k] \\ & \subset & \tilde{G}[\overline{V_k}] \\ & = & \tilde{G}[\overline{V_k \cap \mathbb{N}}] \\ & \subset & \overline{\tilde{G}[V_k \cap \mathbb{N}]} \\ & = & \{g(a_k)\} \end{array}$$

Logo, $\tilde{G}$ é uma extensão contínua para g para $\beta\mathbb{N}$ todo e, em particular, para $\overline{A}$. Logo, como $\overline{A}$ é compacto, temos que $\overline{A}$ é homeorfo a $\beta\mathbb{N}$. Como $\overline{A} \subset F$, temos o resultado. □

Corolário 7.3.7. *Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado infinito. Então $|F| = |\beta\mathbb{N}|$.*

O corolário acima nos dá facilmente a seguinte aplicação:

Corolário 7.3.8. *$\beta\mathbb{N}$ é um compacto onde nenhuma sequência não trivial é convergente.*

Veja o Exercício 7.5.4.

Demonstração. Uma sequência convergente não trivial seria um subconjunto fechado, infinito e enumerável. □

7.4 Alongamentos

Alongamento 7.4.1. Sejam X e Y espaços topológicos $f : X \to Y$ contínua. Dado $A \subset X$, mostre que $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.

Alongamento 7.4.2. Sejam X espaço topológico, $A \subset X$ aberto e $D \subset X$ denso. Mostre que $\overline{A} = \overline{A \cap D}$.

7.5 Exercícios

Exercício 7.5.1. Seja F compacto infinito e de Hausdorff.

(a) Note que existe $x \in F$ ponto de acumulação de F.

(b) Note que existe $y \in F$ distinto de x e existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

(c) Mostre que existem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $a_n \in V_n$ e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são abertos dois a dois disjuntos.

Exercício 7.5.2. Considere $X = \mathbb{N} \cup \{a\}$ é um compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{N}$ tem a topologia usual (como subespaço) e $\overline{\mathbb{N}} = X$

(a) Mostre que X é homeomorfo ao espaço da sequência convergente.

(b) Mostre que $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ dada $f(n) = 0$ se n é par e $f(n) = 1$ se n é ímpar, não admite extensão contínua para X.

(c) Conclua que X não é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$.

Exercício 7.5.3. Mostre que $\beta\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$ não é finito.

Exercício 7.5.4. Mostre que $\beta\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$ não é enumerável.

Exercício 7.5.5. Mostre que $\mathbb{R}$ admite uma compactificação K tal que $|K \smallsetminus \mathbb{R}| = 1$.

Exercício 7.5.6. Mostre que $\mathbb{R}$ admite uma compactficação K tal que $|K \smallsetminus \mathbb{R}| = 2$.

Exercício 7.5.7. Mostre que as duas compactificações de $\mathbb{R}$ dos exercícios anteriores não sãohomeomorfas a $\beta\mathbb{R}$.

Exercício 7.5.8. Este é um roteiro para mostrar que não existe uma compactificação K de $\mathbb{R}$ tal que $|K \smallsetminus \mathbb{R}| = 3$.

(a) Suponha que exista compactificação K para $\mathbb{R}$ tal que $K \setminus \mathbb{R} = \{a, b, c\}$ com a, b, c distintos. Mostre que existem A, B, C abertos disjuntos tais que $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$.

(b) Mostre que $K \setminus (A \cup B \cup C)$ é um compacto contido em $\mathbb{R}$.

(c) Mostre que existe um intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ tal que $K \setminus (A \cup B \cup C) \subset [\alpha, \beta]$.

(d) Mostre que pelo menos dois dos conjuntos A, B, C são ilimitados em $]\beta, +\infty[$ ou pelo menos dois deles são ilimitados em $]-\infty, \alpha[$.

(e) Mostre que $]\beta, +\infty[$ ou $]-\infty, \alpha[$ podem ser escritos como união de dois abertos disjuntos.

(f) Note que o último item é uma contradição.

7.6 Paracompacidade

Definição 7.6.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ é **localmente finita** se, para todo $x \in X$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $\{F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 7.6.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **refinamento** para $\mathcal{C}$ se $\mathcal{F}$ é uma cobertura e para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $F \subset C$.

Definição 7.6.3. Dizemos que (X, τ) é um **espaço paracompacto** se toda cobertura aberta admite refinamento aberto localmente finito.

Observação 7.6.4. Note que todo espaço compacto é paracompacto.

Esse resultado é um caso particular de um teorema que faremos adiante. Mas a sua demonstração é bem mais simples e serve em alguns outros casos.

Proposição 7.6.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico com base enumerável e regular. Então (X, τ) é paracompacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para X. Para cada $x \in X$, sejam $B_x, C_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x \subset \overline{B_x} \subset C_x \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$. Como o conjunto de todos os B_x's é enumerável, fixe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\{B_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{B_x : x \in X\}$. Defina $W_0 = C_{x_0}$ e $W_n = C_{x_n} \smallsetminus \bigcup_{k<n} \overline{B_{x_n}}$, para $n > 0$. Vamos mostrar que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o refinamento desejado.

Cobertura: Basta notar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{x_n} = X$.

Refinamento: Basta notar que $W_n \subset C_{x_n} \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$.

Localmente finito: Sejam $x \in X$ e x_j tais que $x \in B_{x_j}$. Note que $W_n \cap B_{x_j} = \emptyset$ se $j < n$. Logo, $|\{W_n : W_n \cap B_{x_j} \neq \emptyset\}| \leq j$. □

A ideia do próximo resultado é dizer que, para famílias localmente finitas, união dos fechos é o fecho da união:

Lema 7.6.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma família localmente finita. Então,* $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$. *Em particular,* $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ *é fechado.*

Demonstração. Note que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$. Por outro lado, sejam $x \in \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$ e A aberto tal que $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $x \in \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F}$ pela definição de $\mathcal{F}_0$. Pelo fato de $\mathcal{F}_0$ ser finito, temos $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{F} \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Logo, $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ como queríamos. $\square$

O próximo lema nos dá uma condição suficiente para que dois fechados num paracompacto possam ser separados:

Lema 7.6.7. *Sejam (X, τ) um espaço paracompacto e $A, B \subset X$ fechados disjuntos. Se, para todo $x \in B$, existem abertos U_x e V_x tais que $A \subset U_x$, $x \in V_x$ e $U_x \cap V_x = \emptyset$, então existem U e V abertos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Demonstração. Note que $\{V_x : x \in B\} \cup \{X \smallsetminus B\}$ é uma cobertura aberta para X. Logo, existe $\{W_s : s \in S\}$ refinamento finito aberto para $\{V_x : x \in B\}$ (só olhamos para os que cobrem o próprio B). Note que, como cada $W_s \subset B_x$ para algum x, temos que $\overline{W_s} \cap A = \emptyset$ (U_x atesta isso). Seja $V = \bigcup_{s \in S} W_s$. Note que $B \subset V$. Pelo Lema 7.6.6, $V' = \bigcup_{s \in S} \overline{W_s}$ é fechado. Como $A \subset X \smallsetminus V'$, basta fazermos $U = X \smallsetminus V'$. $\square$

Teorema 7.6.8. *Todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.*

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Pelo Lema 7.6.7, (X, τ) é regular (faça $A = \{x\}$ e B fechado tal que $x \notin B$). Como (X, τ) é regular, o Lema 7.6.7 implica que (X, τ) é normal. $\square$

Vamos terminar esta seção mostrando que todo espaço métrico é paracompacto. A demonstração que apresentaremos é baseada na feita em [**?**][1]. Antes, precisamos de um definição e um resultado bastante conhecido de teoria dos conjuntos:

Definição 7.6.9. Dizemos que $\leq$ é uma **boa ordem** sobre X se todo subconjunto não vazio de X admite mínimo (segundo $\leq$).

[1] Note que é um artigo de uma única página, que apresenta uma nova demonstração para um teorema já conhecido anteriormente.

O seguinte fato é equivalente ao axioma da escolha (em alguns livros modernos, ele inclusive fica no lugar do axioma da escolha na lista dos axiomas básicos).

Teorema 7.6.10 (Princípio da boa ordem)**.** *Todo conjunto não vazio admite uma boa ordem.*

Agora passamos à demonstração do teorema:

Teorema 7.6.11. *Todo espaço métrico é paracompacto.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathcal{C}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, vamos definir uma família $(D_n(C))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ por indução sobre n. Para cada $C \in \mathcal{C}$, defina $D_1(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2}}(x)$, onde

A é o conjunto dos pontos x's tais que, além de C ser o "primeiro" aberto da cobertura a contê-lo, x cabe com certa folga em C. Formalmente, a cada passo n, aberto C, teríamos um A_n^C, mas isso só aumentaria a quantidade de índices aqui.

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\} \text{ e } B_{\frac{3}{2}}(x) \subset C\}$$

Suponha definidos $D_k(C)$ para todo $k < n$ e todo $C \in \mathcal{C}$. Defina $D_n(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2^n}}(x)$, onde

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}, x \notin D_k(C')$$
$$\text{para qualquer } k < n \text{ e } C' \in \mathcal{C} \text{ e } B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C\}$$

Vamos mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é o refinamento desejado. Primeiramente, note que, de fato, $D_n(C) \subset C$. Vejamos que, de fato, cobre. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}$. Assim, existe algum $n \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C$. Desta forma, $x \in D_n(C)$ ou $x \in D_k(C')$ para algum $k \leq n$ e $C' \in \mathcal{C}$.

Resta mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é localmente finito. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in D_n(C')$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, onde n é tal que $x \in D_n(C)$. Note que é suficiente mostrarmos que:

(a) Se $i \geq n+j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ não intercepta $D_i(C')$ para qualquer $C' \in \mathcal{C}$.

(b) Se $i < n + j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ intercepta $D_i(C')$ para, no máximo, um $C' \in \mathcal{C}$.

Vamos provar (a). Como $n \geq i$, toda bola utilizada na criação de $D_i(C')$ tem centro fora de $D_n(C)$. Como $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, temos que $d(x, y) \geq \frac{1}{2^j}$

para todo y centro de alguma bola utilizada na criação de $D_i(C')$. Como $i \geq j+1$ e $n+j \geq j+1$, temos que $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y) = \emptyset$.

Agora vamos provar (b). Sejam $p \in D_i(E)$ e $q \in D_i(F)$ com $E \prec F$. Vamos mostrar que $d(p,q) \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. Note que isso é suficiente. Como $p \in D_i(E)$, existe y tal que $p \in B_{\frac{1}{2^i}}(y) \subset D_i(E)$ e $B_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset E$. Como $q \in D_i(F)$, existe z tal que $q \in B_{\frac{1}{2^i}}(z) \subset D_i(F)$. Note que $z \notin E$ (pois $E \prec F$). Logo, $d(y,z) \geq \frac{3}{2^i}$. Logo, temos

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{2^i} & \leq & d(y,z) \\ & \leq & d(y,p) + d(p,q) + d(q,z) \\ & \leq & \frac{2}{2^i} + d(p,q) \end{array}$$

Assim, $d(p,q) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. □

Alongamentos

Alongamento 7.6.12. Se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita, então $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ também é.

Alongamento 7.6.13. Seja (X,τ) um espaço topológico paracompacto e $F \subset X$ fechado. Mostre que F é paracompacto.

Alongamento 7.6.14. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Seja $\mathcal{A}$ um refinamento de $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{B}$ um refinamento de $\mathcal{A}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é um refinamento de $\mathcal{A}$.

Exercícios

Exercício 7.6.15. Seja (X,τ) espaço topológico. Mostre que $D \subset X$ é um discreto (i.e, com a topologia induzida é discreto) fechado se, e somente se, $\{\{d\} : d \in D\}$ é localmente finito.

7.7 Partição da unidade

Definição 7.7.1. Seja (X,τ) um espaço topológico. Uma família $(f_s)_{s\in S}$ de funções contínuas de X em $[0,1]$ é chamada de uma **partição da unidade** se $\sum_{s\in S} f_s(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Observação 7.7.2. Se $(f_s)_{s\in S}$ é uma partição da unidade, então, para todo $x \in X$, $\{s \in S : f_s(x) \neq 0\}$ é enumerável.

Definição 7.7.3. Dizemos que uma partição da unidade $(f_s)_{s\in S}$ é **localmente finita**, se $\{f_s^{-1}[]0,1]] : s \in S\}$ é localmente finito.

Observação 7.7.4. Nesse caso, $\{f_s^{-1}[]0,1]] : s \in S\}$ é uma cobertura aberta e $\sum_{s\in S} f_s(x)$ é, na verdade, uma soma finita para cada ponto fixado.

Definição 7.7.5. Uma partição da unidade $(f_s)_{s\in S}$ é dita **subordinada** a uma cobertura $\mathcal{C}$ se para todo $s \in S$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f_s^{-1}[]0,1]] \subset C$.

Lema 7.7.6. *Seja (X, τ) um espaço topológico regular. Se toda cobertura aberta para X admite refinamento localmente finito (não necessariamente aberto ou fechado), então, para toda cobertura aberta $\{U_s : s \in S\}$, existe cobertura fechada localmente finita $\{F_s : s \in S\}$ tal que para todo $s \in S$, $F_s \subset U_s$.*

Demonstração. Seja $\{U_s : s \in S\}$ cobertura aberta. Como (X, τ) é regular, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W}$ tal que $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ refina $\{U_s : s \in S\}$. Seja $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ refinamento de $\mathcal{W}$ localmente finito. Para cada $t \in T$, seja $s(t) \in S$ tal que $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$. Para cada $s \in S$, seja $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$. Como $\{A_t : t \in T\}$ é localmente finito, temos que F_s é fechado. Note, também, que $F_s \subset U_s$. Resta mostrar que $\{F_s : s \in S\}$ é localmente finito (é cobertura, pois $(A_t)_{t\in T}$ é cobertura). Seja $x \in X$. Como $\{\overline{A_t} : t \in T\}$ é localmente finito, existe A aberto tal que $x \in A$ e $T' = \{t \in T : \overline{A_t} \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $\{s(t) : t \in T'\} = \{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$. Portanto, $\{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. □

Lema 7.7.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $\mathcal{U}$ cobertura aberta para X. Se existe $(f_s)_{s\in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U}$ admite refinamento aberto localmente finito.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que, para cada $g : X \to [0, 1]$ contínua e para cada $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) > 0$, existe U aberto tal que $x_0 \in U$ e existe $S' \subset S$ finito tal que

$$\forall s \in S \smallsetminus S', \forall x \in U, f_s(x) < g(x). \tag{7.1}$$

De fato, existe $S' \subset S$ finito tal que

$$1 - \sum_{s\in S'} f_s(x_0) < g(x_0).$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{s\in S\smallsetminus S'} f_s(x_0) = 1 - \sum_{s\in S'} f_s(x_0)$$

Como $\sum_{s\in S'} f_s$ é uma função contínua, existe um aberto U tal que $x_0 \in U$ e

$$\forall x \in U, \sum_{s\in S\smallsetminus S'} f_s(x) < g(x),$$

portanto, temos (7.1).

Vamos mostrar que $f = \sup\{f_s : s \in S\}$ é uma função contínua. De fato, para cada $x_0 \in X$, existe $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x) > 0$. Por (7.1), existem $S' \subset S$ finito e U aberto tais que $x_0 \in U$ e

$$\forall s \in S \smallsetminus S', \forall x \in U, f_s(x) < f_{s_0}(x).$$

Portanto, para cada $x \in U$, $\sup\{f_s(x) : s \in S\} = \max\{f_s(x) : s \in S'\}$. Logo, $f|_U$ é contínua, já que a função máximo é contínua (exercício).

Vamos agora ao refinamento. Para cada $s \in S$, temos que $V_s = \{x \in X : f_s(x) > \frac{1}{2}f(x)\}$ é aberto. Note que $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, pois $V_s \subset f_s^{-1}[]0,1]]$. Além disso, $\mathcal{V}$ é localmente finito (basta tomar $g = \frac{1}{2}f$ em (7.1)). □

Agora vamos ao principal teorema da seção:

Teorema 7.7.8. *Seja (X, τ) espaço T_1. São equivalentes:*

(a) (X, τ) é paracompacto e de Hausdorff;

(b) Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela localmente finita;

(c) Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela.

Demonstração. ($a \Rightarrow b$). Seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Seja $(U_s)_{s\in S}$ refinamento aberto localmente finito (decorrente da paracompacidade). Pelo Lema 7.7.6, existe $\{F_s : s \in S\}$ cobertura fechada localmente finita tal que $F_s \subset U_s, \forall s \in S$. Como X é normal (Teorema 7.6.8) podemos usar o Lema de Urysohn e definir, para cada $s \in S$, $g_s : X \to [0,1]$ contínua tal que $g_s[X \setminus U_s] = \{0\}$ e $g_s[F_s] = \{1\}$.

Defina $g(x) = \sum_{s\in S} g_s(x)$. Como $(U_s)_{s\in S}$ é localmente finita, g está bem definida e é contínua (dado $x \in X$ qualquer, existe um número finito de abertos de $(U_s)_{s\in S}$ tais que $x \in U_s$ e assim g é localmente uma soma finita de funções contínuas). Para cada $s \in S$, defina $f_s(x) = \frac{g_s(x)}{g(x)}$. Note que $(f_s)_{s\in S}$ é a partição desejada.

$(b \Rightarrow c)$. Óbvio.

$(c \Rightarrow a)$. Pelo Lema 7.7.7, resta mostrar que (X, τ) é de Hausdorff. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos. Como (X, τ) é T_1, $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ é uma cobertura aberta. Logo, por (c), existe $(f_s)_{s\in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$. Seja $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x_1) = a > 0$. Note que $f_{s_0}^{-1}[]0, 1]] \not\subset X \setminus \{x_1\}$, logo $f_{s_0}^{-1}[]0, 1]] \subset X \setminus \{x_2\}$, e assim $f_{s_0}(x_2) = 0$. Note, por fim, que $U_1 = f_{s_0}^{-1}[]\frac{a}{2}, 1]]$ e $U_2 = f_{s_0}^{-1}[[0, \frac{a}{2}[]$ são abertos disjuntos que contém x_1 e x_2, respectivamente. $\square$

Exercícios

Exercício 7.7.9. Mostre que existe uma partição da unidade $(f_i)_{i\in I}$ sobre $\mathbb{R}$ onde para cada $i \in I$, $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é compacto.

Dicas de alguns exercícios

1.1.62

d Para o lado $\overline{A} \subset A \cup \partial A$, considere $x \in \overline{A}$. Note que se $x \in A$, é trivial. No caso que $x \notin A$, mostre que $x \in \partial A$.

1.1.75

e Suponha que não e use os itens anteriores.

1.1.77

a Comece com $A \in \tau$ e $x \in A$. Use o fato que $\mathcal{B}$ é base. Depois use a propriedade do enunciado. Mostre que $A \in \sigma$.

1.2.21 Veja a Proposição **1.1.16**.

1.2.30

a Mostre que tal conjunto é fechado por intersecções finitas.

d Considere o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\}$. Mostre que tal conjunto não pode ser separado do ponto 0.

1.2.31 Lembre que os racionais são enumeráveis.

1.3.27 Fixe uma base local enumerável para cada ponto, mostre que a união de todoas elas forma uma base.

1.3.38 Veja a demonstração da proposição **1.2.20**. Use o fato da existência de uma base enumerável para construir o análogo das famílias $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.3.39 Considere $\mathcal{A} = \{(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2 : B_1 \subset B_2\}$. Fixe $C' \in \mathcal{C}$. Para cada $(B_1, B_2) \in \mathcal{A}$, se existir $C \in \mathcal{C}$ de forma que $B_1 \subset C \subset B_2$, então escolha C_{B_1,B_2} como um destes elementos. Se não existir, simplesmente faça $C_{B_1,B_2} = C'$. Note que $\mathcal{C}' = \{C_{B_1,B_2} : (B_1, B_2) \in \mathcal{A}\}$ é enumerável. Mostre que $\mathcal{C}'$ é base.

2.1.20

a Use o Alongamento 2.1.14.

c Considere $X = [0, 1]$, $F_1 = \{0\}$ e $F_2 =]0, 1]$.

2.1.22

a Suponha $x_n \longrightarrow x$. Note que a sequência $y_{2n} = x_n$ e $y_{2n+1} = x$ também é convergente.

b Veja o Exemplo **??**.

2.4.16 Mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X se, e somente se, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y. Lembre que funções contínuas levam sequências convergentes em sequências convergentes (Proposição 2.1.11).

2.4.18 Para mostrar que $\tilde{f}$ é bijetora, considere $x \in RR$, mostre que $f(a) = x$, onde $a \sup\{d \in D : f(d) \leq x\}$.

2.4.21 Considere $[0, 1] \cup [2, 0]$.

2.4.23

b Use o Corolário 2.4.14 e o item (a).

3.1.13 Mostre que em tal topologia, cada uma das f_α's é contínua. Mostre que se um dos abertos da definição da topologia fraca não estiver na topologia, então alguma das f_α's não é contínua.

3.2.14 Considere $(x, y) \notin D$. Mostre que existe uma vizinhança básica de (x, y) que não intercepta D. Faça um desenho e separe em casos que fica mais fácil.

3.2.15 Considere conjuntos da forma $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ onde B_n é elemento de alguma base se $n < n_0$ e $B_n = X_n$ caso contrário.

3.2.19 Primeiro, note que é suficiente provar o resultado para interseções enumeráveis de abertos básicos. Depois, olhe para os suportes de tais abertos e note que pelo menos um índice não está em nenhum dos suportes.

b Primeiro tome o conjunto de todos os subconjuntos com n elementos. Tal conjunto é enumerável pelo resultado do enunciado. Depois tome o subconjunto deste cujo os elementos sejam 2-2 disjuntos.

c Elas são indexadas por coisas enumeráveis (com n fixado).

e Fixe um aberto básico. Olhe as coordenadas em que ele é diferente de $\mathbb{N}$. Escolha intervalos abertos disjuntos (de $\mathbb{R}$) em torno de tais coordenadas (que são finitas). Construa uma $f \in D$ com tais intervalos e que esteja no aberto básico.

3.3.2

b Basta notar que $\mathbb{N}$ é discreto.

d Use o fato que imagem contínua de separável é separável e que denso em denso é denso.

4.1.33 Use o fato que $[0, 1]$ é compacto.

4.1.38

a Basta notar que é subespaço de um compacto Hausdorff.

c Escreva $Y = X \cup \{x\}$. Seja $a \in X$. Sejam A, B abertos (em Y) disjuntos tais que $a \in A$, $x \in B$. Note que $\overline{A} \subset X$ é compacto.

4.2.12 Caso contrário, $F \cup \{Y\}$ teria a p.i.f.

4.3.17 Não são lineares.

4.3.21 Defina $\mu_n((x_z)_{z\in\mathbb{Z}}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_z$.

4.3.22 Leia com calma e faça uns desenhos.

5.1.20

d Use o fato que cada D_F é conexo e a Proposição 5.1.12.

e Use o exercício 5.1.17.

5.2.10

c Pegue um pente.

5.3.9 Um conexo não localmente conexo serve.

6.1.21 Considere $H(x,t) = \frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$.

6.1.22 Primeiro "achate" o espaço para o eixo x, depois "comprima" tudo para um ponto.

6.2.16 Considere $\gamma : [0,1] \to X$ caminho de x_0 para x_1. Considere também γ^- o caminho inverso (de x_1 para x_0). Para cada f laço sobre x_0, considere $\varphi(f) = \gamma^- * f * \gamma$.

7.2.10 Mostre por intersecção de dois abertos densos é aberta densa.

7.2.16 Considere a topologia cofinita.

7.2.19 Se A é aberto, considere o interior de $B = X \smallsetminus A$ e depois olhe para $A \cup B$.

7.5.8

f Conexidade.

Soluções de alguns exercícios

1.1.59

b Vamos mostrar que $X \setminus (F \cup G)$ é aberto. Se mostrarmos que $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, seguirá que o complementar de $F \cup G$ é aberto por ser a interseção (finita) de abertos, o que acarretará que $F \cup G$ é fechado. De fato, se $x \in X \setminus (F \cup G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, e daí decorre que $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$. Reciprocamente, se $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, ou equivalentemente, $x \in X$ e $x \notin F \cup G$, acarretando a igualdade desejada.

c Note que se $\mathcal{A}$ é uma família não vazia de conjuntos, então

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} X \setminus A$$

Da igualdade acima, e do fato de que cada membro de $\mathcal{F}$ possui o complementar aberto, o temos (c).

1.1.60 Por definição, $\mathring{A}$ é a reunião dos abertos contidos em A. Daí, se $x \in V$ para algum V aberto contido em A, temos $x \in \mathring{A}$. A recíproca é imediata.

1.1.71 Seja $F \subset Y$ fechado em Y. Então $Y \setminus F$ é aberto em Y. Logo, existe $A \subset X$ um aberto em X tal que $A \cap Y = Y \setminus F$. Vamos mostrar que $F' = X \setminus A$ satisfaz o que desejamos. Primeiramente, note que F' é fechado em X (pois é complementar de um aberto). Agora só precisamos mostrar que, de fato,

$$F = F' \cap Y$$

Seja $y \in F$. Então $y \notin Y \setminus F$ e, portanto, $y \notin A$. Assim, $y \in X \setminus A$ e, portanto, $y \in Y \cap (X \setminus A) = F'$. A outra inclusão segue de maneira análoga (e é um bom alongamento para o leitor).

Agora precisamos mostrar que, dado F' fechado em X, $F' \cap Y$ é fechado em Y. Isso decorre imediatamente do fato que $Y \smallsetminus (Y \cap F') = Y \cap (X \smallsetminus F')$. Logo, $Y \smallsetminus (Y \cap F')$ é aberto em Y e, portanto, $Y \cap F'$ é fechado em Y.

1.1.72 Suponha $F \subset Y$ fechado em Y. Então existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F' \cap Y = F$. Logo, F é fechado em X (por ser interseção de fechados). Agora suponha $F \subset Y$ fechado em X. Note que $F = F \cap Y$ e, portanto, F é fechado em Y.

1.1.73 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço aberto. Então $A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, for aberto em X.

A demonstração é análoga a da Proposição **1.1.72**.

1.1.76 Suponha $x \in \overline{A}$. Seja $V \in \mathcal{V}$, então existe $U \subset V$ aberto tal que $x \in U$. Como $x \in \overline{A}$, obtemos $U \cap A \neq \emptyset$ e, portanto, $V \cap A \neq \emptyset$.

Suponha que para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$. Seja $U \subset X$ aberto tal que $x \in U$. Como $\mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset U$. Logo, como $V \cap A \neq \emptyset$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$.

1.2.22 Supondo (X, τ) T_3 e fixando $x \in X$, a família $\mathcal{V}_x = \{\overline{A} : A \in \tau$ e $x \in A\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x. Reciprocamente, supondo a existência de um sistema fundamental de vizinhanças fechadas podemos concluir que (X, τ) é T_3.

1.2.25 Procedamos pela contrapositiva.

Suponha $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, para quaisquer $x, y \in X$ distintos. Isso equivale a afirmar que a é ponto aderente de $\{x\}$ se, e somente se, a é ponto aderente de $\{y\}$ ou, equivalentemente, todo aberto que contém x também contém y, isto é, (X, τ) não é T_0.

1.2.26 Supondo (X, τ) T_1, provemos (b). Basta considerar $\mathcal{A} = \{A \in \tau : x \in A\}$. Por construção, vale que $\{x\} \subset \bigcap \mathcal{A}$. Por outro lado, se existisse $y \neq x$ tal que $y \in \bigcap \mathcal{A}$, então todo aberto de A que contém x também conteria y, o que contraria a hipótese de estarmos supondo (X, τ) T_1.

Agora suponha que para todo $x \in X$, existe uma coleção $\mathcal{A}_x$ de abertos tal que $\bigcap \mathcal{A}_x = \{x\}$. Defina $B_x = \{A \in \tau | x \in A\}$ e $\mathcal{V}_x = \{U \in \tau : (\exists A, B)(A \in A_x$ e $B \in B_x)(U = A \cap B)\}$. Claramente, $\mathcal{V}_x$ é sfv para x e $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

Finalmente, se para cada $x \in X$ existir um sfv $\mathcal{V}_x$ para x tal que $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$, então para $x \neq y$, segue que existem sistemas de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ e $\mathcal{V}_y$ para x e y, respectivamente, tais que $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x \neq \bigcap \mathcal{V}_y = \{y\}$, ou seja, existem abertos $A_y \in \mathcal{V}_y$ e $A_x \in \mathcal{V}_x$ tais que $x \in A_x$ mas $y \notin A_x$ e $y \in A_y$ mas $x \notin A_y$, donde (X, τ) é T_1.

1.2.27 Se (X, τ) é normal, então em particular $\{x\}$ é fechado. Assim, sejam F um fechado e $x \in X$ tais que $x \notin F$, isto é, $\{x\}$ e F são fechados disjuntos. Por X ser T_4, existem abertos A e B disjuntos tais que $\{x\} \subset A$ e $F \subset B$, isto é, (X, τ) é T_3 e, por ser T_1, X é regular.

Se (X, τ) for regular, novamente $\{x\}$ é fechado, para qualquer $x \in X$. Em particular, se $x \neq y$, $x \notin \{y\}$, logo existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $\{y\} \subset B$, logo (X, τ) é de Hausdorff.

Daí, se (X, τ) é Hausdorff, dados $x \neq y$ elementos de X, existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$, em particular, por serem disjuntos, $x \in A$ e $y \notin A$ e $y \in B$ e $x \notin B$, implicando em (X, τ) ser T_1.

Se (X, τ) é T_1, então claramente também é T_0.

1.3.26 Suponha que exista um aberto não vazio A tal que $A \cap D = \emptyset$. Então, $X \smallsetminus A$ é um fechado diferente de X de modo que $D \subset (X \smallsetminus A)$. Então, como $\overline{D}$ é a interseção de todos os fechados que contém D, segue que $\overline{D} \neq X$ e D não é denso.

Agora, suponha que para qualquer aberto não vazio A, temos que $A \cap D \neq \emptyset$. Seja F um fechado tal que $D \subset F$, segue que $X \smallsetminus F$ é um aberto tal que $(X \smallsetminus F) \cap D = \emptyset$. Logo $X \smallsetminus F = \emptyset$ e, então, $F = X$. Portanto, X é o único fechado que contém D e $\overline{D} = X$.

2.1.18 Seja A um aberto em Y. Então, como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é um aberto em X, e portanto, $f^{-1}[A] \cap Z$ é um aberto de Z. Por outro lado, como $(f \restriction Z)^{-1}[A] = f^{-1}[A] \cap Z$, temos que $f \restriction Z$ é contínua.

2.1.24

a Seja $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Sejam V, W abertos disjuntos tais que $f(x) \in V$ e $g(x) \in W$. Como f e g são contínuas, existem A, B abertos tais que $x \in A \cap B$ e $f[A] \subset V$ e $f[B] \subset W$. Note que $(A \cap B) \cap E = \emptyset$.

2.4.20 Sejam $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Então, se $x \neq \min X$ e $y \neq \max X$, temos que existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ de modo que $\tilde{x} < x < y < \tilde{y}$. Primeiramente, vamos fazer o caso em que existe $c \in X$ tal que $x < c < y$. Neste caso, temos que $x \in]\tilde{x}, c[$, $y \in]c, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, c[\cap]c, \tilde{y}[= \emptyset$. Já no caso em que não existe tal c, temos $x \in]\tilde{x}, y[$, $y \in]x, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, y[\cap]x, \tilde{y}[= \emptyset$.

Para os casos $x = \min X$ ou $y = \max X$, basta tomar conjuntos como $[x, y[$ e $]x, y]$ e trabalhar como anteriormente.

3.1.11 Suponha que (X, τ) seja espaço de Hausdorff. Seja $(a, b) \in X \times X$, com $a \neq b$. Sejam, também, $A, B \in \tau$ disjuntos tais que $a \in A$ e $b \in B$. Note que $(A \times B) \cap D = \emptyset$ e $(a, b) \in A \times B$.

Suponha que D seja fechado. Sejam $a, b \in X$, com $a \neq b$. Logo, $(a, b) \notin D$ e existem $A, B \in \tau$ tais que $(a, b) \in A \times B$ e $(A \times B) \cap D = \emptyset$. Portanto, $A \cap B = \emptyset$.

3.2.13 Basta mostrar para $n = 2$. Seja $x \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Como cada f_i é contínua, existe V_i tal que $f_i[V_i] \subset]f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon[$. Seja $V = V_1 \cap V_2$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $f_1(x) \leq f_2(x)$ (e, portanto, $g(x) = f_2(x)$). Assim, dado $y \in V$, temos:

$$\begin{array}{rcl} g(y) & = & \max\{f_1(y), f_2(y)\} \\ & < & \max\{f_1(x) + \varepsilon, f_2(x) + \varepsilon\} \\ & \leq & f_2(x) + \varepsilon \\ & = & g(x) + \varepsilon \end{array}$$

Analogamente, provamos que $g(y) > g(x) - \varepsilon$ e, portanto, g é contínua no ponto x.

4.1.23 Que compacto implica tal propriedade é imediato.

Por outro lado, seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ) e seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Para cada $x \in X$, existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_x$. Para cada x, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A_x$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{x_i} = X$ (aqui, usamos o fato que $\{B_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos básicos). Note que $\bigcup_{i=1}^n A_{x_i} = X$ (pois cada $A_{x_i} \supset B_{x_i}$).

4.1.37 Suponha, por absurdo, que $\mathbb{R}_S$ seja localmente compacto. Sejam $x \in \mathbb{R}_S$ e K vizinhança compacta de x. Seja $[x, y[\subset K$ e note que, por $[x, y[$ ser fechado num compacto, temos que $[x, y[$ é compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = [x, y - \frac{1}{n+1}[$. Note que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de abertos para $[x, y[$ sem subcobertura finita, o que contradiz $[x, y[$ ser compacto.

4.2.15 Suponha que não. Então, existem $A_1, \ldots, A_n \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F}$ tais que $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$. Sejam $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $A_i \in F_i$. Note que existe F_j tal que $F_j \supset F_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Logo, $A_1, \ldots, A_n \in F_j$, portanto, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$, que é uma contradição.

4.2.16 Considere $\mathcal{F} = \{G \subset \wp(X) : G \supset F \text{ e } G \text{ é filtro}\}$ ordenado pela inclusão. Pelo Lema de Zorn, existe $G \in \mathcal{F}$ maximal. G é um ultrafiltro que contém F.

4.2.19 ($i \Rightarrow ii$) Seja F filtro sobre X e considere $F' = \{\overline{A} : A \in F\}$. Note que F' tem p.i.f. (pois F também tem). Assim, pela compacidade (ver Alongamento 4.1.27), existe $x \in \bigcap_{\overline{A} \in F'} \overline{A}$. Note que tal x é aderente a F.

($ii \Rightarrow iii$) Sejam F ultrafiltro sobre X e x ponto aderente a F. Vamos mostrar que $F \to x$. Seja V vizinhança de x e suponha que $V \notin F$. Logo, $X \smallsetminus V \in F$ mas, $x \notin \overline{X \smallsetminus V}$ (de fato, seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $A \cap (X \smallsetminus V) = \emptyset$). Portanto, x não é aderente.

($iii \Rightarrow i$) Seja $\mathcal{F}$ uma família de fechados em X com p.i.f. Vamos mostrar que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Seja $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro. Sejam $x \in X$ tal que $G \to x$ e $H \in \mathcal{F}$. Veremos que $x \in H$. Suponha que não, assim, $x \in X \smallsetminus H$. Como $G \to x$, temos que $X \smallsetminus H \in G$ (pois $X \smallsetminus H$ é aberto que contém x). Mas $H \in G$ e $(X \smallsetminus H) \cap H \in G$, que é uma contradição.

4.2.21 Seja F um ultrafiltro sobre X. Para cada $\alpha \in A$, seja $F_\alpha = \{\pi_\alpha[B] : B \in F\}$. Note que F_α é um ultrafiltro sobre X_α (Veja o exercício 4.2.20).

Seja $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $F_\alpha \to x_\alpha$. Vamos mostrar que $F \to x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Note que é suficiente mostrar que todo aberto básico contendo x é elemento de F (exercício).

Sejam $V = \prod V_\alpha$ aberto básico tal que $x \in V$ e $\mathcal{F} = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{F}$, temos que $V_\alpha \in F_\alpha$ (pois $F_\alpha \to x_\alpha$). Logo, existe $B_\alpha \in F$ tal que $V_\alpha = \pi_\alpha[B_\alpha]$. Portanto, $\pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$ (pois $B_\alpha \subset \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$). Então, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$.

5.1.19

a Sejam $(x, y), (a, b) \in X \times Y$. Note que $X \times \{y\}$ e $\{a\} \times Y$ são conexos, pois são homeomorfos a X e Y, respectivamente (ver Alongamento **5.1.14**). Logo $A = (X \times \{y\}) \cup (\{a\} \times Y)$ é conexo, pois $(a, y) \in (X \times \{y\}) \cap (\{a\} \times Y)$ (pela Proposição 5.1.12). Assim, A é um conexo de $X \times Y$ tal que $(x, y), (a, b) \in A$. Logo, pela Proposição **5.1.12**, temos que $X \times Y$ é conexo.

5.4.7 Suponha que não seja verdade. Então, existem $a < b \in X$ tais que não existe $c \in X$ de modo que $a < c < b$. Note que $\{x \in X : x < b\}$ e $\{x \in X : x > a\}$ são abertos, $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Além disso, $A \neq \emptyset$ (pois $b \in A$) e $B \neq \emptyset$ (pois $a \in B$). Logo, X não é conexo.

5.4.8 Suponha $A \subset X$ um conjunto limitado superiormente tal que A não tenha supremo. Sejam $W = \{x \in X : \exists a \in A, x \leq a\}$ e $V = \{x \in X : \forall a \in A, a < x\}$.

W é aberto. Sejam $w \in W$ e $a \in A$ tais que $w \leq a$. Seja, também, $a' \in A$ tal que $a < a'$ (pois A não tem supremo). Note que $\{x \in X : x < a'\} \subset W$ é aberto e contém w.

V é aberto. Seja $v \in V$ de modo que v majora A. Como v não é o supremo de A, existe $v' \in X$, com $v' < v$, que também majora A. Logo, $\{x \in X : v' < x\}$ é um aberto contido em V e que contém v.

Além disso, $W \cap V = \emptyset$, $W \cup V = X$ (ordem total), $W \neq \emptyset$ (pois $W \supset A$) e $V \neq \emptyset$ (pois A é limitado superiormente. Logo, X não é conexo.

Referências Bibliográficas

[1] S. Willard. *General topology*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004.

Notação

Índice Remissivo