

Notas de Aula

Leandro F. Aurichi ¹

20 de abril de 2016

¹Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

1	Espaços topológicos	5
1.1	Definições básicas	5
	Alguns exemplos de espaços topológicos	9
	Fechados	11
	Fecho, interior e fronteiras	11
	Bases	13
	Alongamentos	16
	Exercícios	18
1.2	Axiomas de Separação	20
	Alongamentos	25
	Exercícios	26
1.3	Axiomas de Enumerabilidade	27
	Alongamentos	31
	Exercícios	32
2	Funções	35
2.1	Funções contínuas	35
	Alongamentos	39
	Exercícios	40
2.2	Lema de Urysohn	41
	Alongamentos	45
	Exercícios	45
2.3	Extensões de funções	45
	Alongamentos	49
	Exercícios	50
2.4	Homeomorfismos	50
	Alongamentos	53
	Exercícios	54

3	Produto	55
3.1	Definição e conceitos básicos	55
	Alongamentos	58
	Exercícios	59
	Exercícios extras	59
3.2	Algumas propriedades sobre produtos	60
	Alongamentos	64
	Exercícios	64
3.3	Exercícios extras	65
4	Compactos	67
4.1	Definição e propriedades básicas	67
	Alongamentos	71
	Exercícios	72
4.2	Teorema de Tychonoff	73
	Alongamentos	75
	Exercícios	75
	Exercícios extras	75
4.3	Algumas aplicações	77
	Alongamentos	81
	Exercícios	81
	Exercícios extras	81
5	Conexos	83
5.1	Definição e propriedades básicas	83
	Alongamentos	86
	Exercícios	86
	Índices	100
	Notação	100
	Índice Remissivo	101

Capítulo 1

Espaços topológicos

1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade. Uma maneira de dar uma noção de proximidade é de modo quantitativo, como no caso de espaços métricos:

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico**, se $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

- (a) $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (b) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$;
- (c) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Desta maneira, temos que uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro - simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2. Uma métrica sobre o conjunto dos reais \mathbb{R} é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre \mathbb{R} .

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correnteza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos

Para espaços de funções em geral não é possível definir métricas.

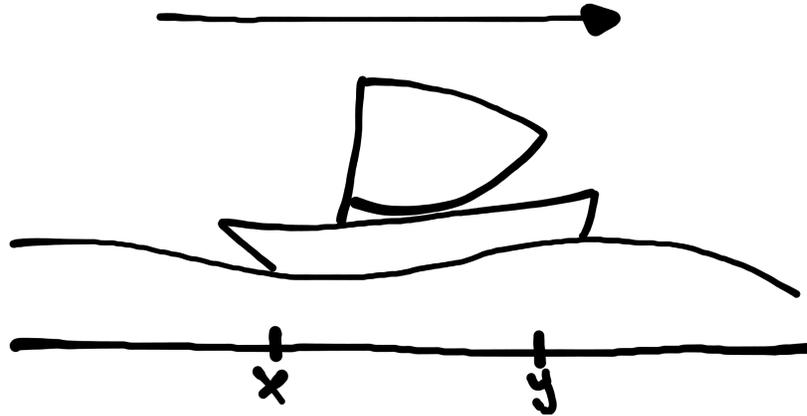


Figura 1.1: Uma correnteza forte

representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correnteza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.

Veja também o Exercício 1.1.69.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo. Para isso, vamos precisar de um conceito diferente:

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto. Dizemos que uma família não vazia \mathcal{F} de subconjuntos de X é um **filtro** sobre X se:

- (a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
- (b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Agora, em vez de usarmos uma função distância, “atribuímos” a cada ponto um filtro:

Vamos adotar o * aqui para não confundir com o conceito de vizinhança que será apresentado em 1.1.13. Faremos o análogo em mais algumas definições abaixo.

Definição 1.1.4. Seja X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que uma coleção \mathcal{V} de subconjuntos de X é um **sistema de vizinhanças*** para x se \mathcal{V} é um filtro sobre X e cada elemento $V \in \mathcal{V}$ é tal que $x \in V$. Chamamos cada $V \in \mathcal{V}$ de **vizinhança*** de x .

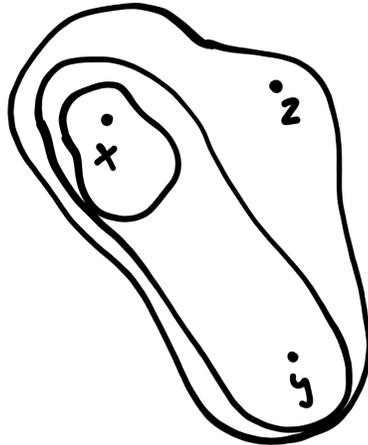


Figura 1.2: O ponto y é o mais próximo de x

A intuição por trás desta definição é que cada elemento de \mathcal{V} representa uma coleção de pontos “próximos” de x . Você pode pensar que um ponto y fixado está mais próximo de x quanto maior for o conjunto

$$\{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$$

Desta maneira, na situação representada pela figura, o ponto mais próximo de x é y (e não z).

O próximo exemplo dá uma maneira de traduzirmos para a ideia de vizinhanças o conceito de proximidade dado pela métrica usual em \mathbb{R} .

Exemplo 1.1.5. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V : \text{existem } a < x < b \text{ tais que }]a, b[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças* para x .

Sim, parece estranho agora que isso seja realmente uma tradução. Mas veremos isso mais formalmente no Alongamento 1.1.55.

Ao mudarmos ele ligeiramente, obtemos a ideia do exemplo do rio:

Exemplo 1.1.6. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V : \text{existe } a > x \text{ tal que }]x, a[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças* de x . Ao conjunto dos reais munido com tal conceito de vizinhanças* damos o nome de **reta de Sorgenfrey**.

Para tentarmos ver que algo da nossa intuição está sendo capturado neste exemplo, vamos analisar um caso específico. Considere as vizinhanças* de 0 como definidas acima. Note que números positivos estão muito mais

próximos de 0 do que os números negativos. Note também que isso não ocorre no caso mais simétrico do exemplo anterior.

Com todo esse material, podemos finalmente definir um espaço topológico. Intuitivamente, um espaço topológico nada mais é que um conjunto tal que todos os pontos possuem uma medida qualitativa de proximidade, mais uma condição mais técnica, que garante uma certa compatibilidade entre as noções de proximidade de diferentes pontos. Esta condição será dada em termos de certas vizinhanças* especiais:

Veja o Alongamento 1.1.54 para ver tal condição é necessária.

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto e seja $(V_x)_{x \in X}$ de forma que cada V_x é um filtro para x . Dizemos que $A \subset X$ é um **aberto*** (com relação a $(V_x)_{x \in X}$) se, para todo $a \in A$, $A \in V_a$. Ou seja, A é uma vizinhança* de todos os seus pontos.

Veja a definição “definitiva” em 1.1.12.

Definição 1.1.8. Dizemos que $(X, (\mathcal{V})_{x \in X})$ é um **espaço topológico*** se, para cada $x \in X$, \mathcal{V}_x é um sistema fundamental de vizinhanças* para x . Além disso, para qualquer $x \in X$ e qualquer $V \in \mathcal{V}_x$, existe $A \in \mathcal{V}_x$ aberto* tal que $x \in A \subset V$.

Esta não é a definição que iremos trabalhar. Optamos por apresentar esta versão por entendermos que a intuição por trás dela é mais aparente do que na definição “definitiva”.

Vejamos alguns exemplos de espaços topológicos*.

Exemplo 1.1.9. Considere \mathbb{R} como no Exemplo 1.1.5 e sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Note que um intervalo $]a, b[$ é aberto*. De fato, dado qualquer $x \in]a, b[$, o próprio conjunto $]a, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança* de x . Por outro lado, o conjunto $[a, b[$ não é aberto* pois $[a, b[$ não é vizinhança* de a . Note que, assim, isso forma um espaço topológico*, pois, para cada $x \in X$, sempre existe A aberto tal que $A \in \mathcal{V}_x$.

Exemplo 1.1.10. Se considerarmos a reta de Sorgenfrey (como no Exemplo 1.1.6) e tomamos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos que $]a, b[$ é aberto*, pois, para cada $x \in]a, b[$, temos que $[x, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança* de x . De maneira análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ também é aberto*.

Os abertos* tem algumas propriedades a se destacar:

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço topológico. Temos:*

- (a) \emptyset e X são abertos*;
- (b) se A e B são abertos*, então $A \cap B$ também é;

(c) se \mathcal{A} é uma família de abertos*, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ é um aberto*.

Demonstração. Veja o Alongamento 1.1.51. □

Essas propriedades da última proposição na verdade motivam a definição usual de espaço topológico:

Definição 1.1.12. Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ é uma família que satisfaz:

Esta é a definição oficial para espaços topológicos. $\wp(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X .

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(c) se $\mathcal{A} \subset \tau$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de **aberto** e a própria família τ é chamada de **topologia**.

Temos que a definição de espaço topológico e a definição de espaço topológico* aqui apresentadas são equivalentes. Começando com um espaço topológico*, note que o conjunto dos abertos* forma uma topologia (basicamente, isso é a Proposição 1.1.11). Mas como recuperar o conceito de vizinhança*? Para isso, basta fazer a seguinte definição:

Definição 1.1.13. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $V \subset X$ é uma **vizinhança** de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

A coleção das vizinhanças de um ponto, de fato, forma um filtro (ver o Alongamento 1.1.52). Desta maneira, se começamos com um espaço topológico*, temos como definir um espaço topológico e vice e versa. Além disso, essas construções comutam (veja os Alongamentos 1.1.52 e 1.1.53).

Alguns exemplos de espaços topológicos

Vejam alguns exemplos de espaços topológicos. Outros exemplos serão dados no decorrer do texto.

Exemplo 1.1.14. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia caótica**).

Exemplo 1.1.15. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \wp(X)$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia discreta**).

A topologia discreta tem uma caracterização útil:

Proposição 1.1.16. *Seja X um conjunto qualquer e σ uma topologia sobre X . Então, σ é a topologia discreta se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.*

Demonstração. Se σ é a topologia discreta, segue da definição que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.

Reciprocamente, dado um conjunto qualquer $A \subset X$, ele pode ser escrito da forma $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Logo, pela definição de topologia, $A \in \sigma$ e, portanto, σ é a topologia discreta. \square

Veja o Alongamento 1.1.55 para notar que diversas maneiras definir a topologia nos reais chegam ao mesmo lugar.

Exemplo 1.1.17. O conjunto \mathbb{R} é um espaço topológico, com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A\}$. Esta é chamada de **topologia usual em \mathbb{R}** .

Exemplo 1.1.18. Seja X um conjunto qualquer. Considere $\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X (chamada **topologia cofinita** - veja também o Exercício 1.1.67).

De fato, note que $X, \emptyset \in \tau$. Seja \mathcal{A} uma família de elementos de τ . Temos que

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$$

Note que o lado direito da equação é finito pois é interseção de conjuntos finitos. Logo, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Note que

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

Novamente o lado direito é finito, pois é união finita de conjuntos finitos. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e τ é uma topologia sobre X .

Também podemos definir um espaço “menor” que um já fixado:

Veja Alongamento 1.1.57.

Definição 1.1.19. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. A **topologia de subespaço** sobre Y induzida por (X, τ) é dada por $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos $Y \subset X$, onde (X, τ) é um espaço topológico, Y será considerado com a topologia de subespaço.

Finalmente, associada a uma métrica, sempre existe uma topologia.

Proposição 1.1.20. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, é uma topologia sobre X , chamada **topologia induzida pela métrica d** .*

Demonstração. Note que $X \in \tau$ trivialmente e que $\emptyset \in \tau$ por vacuidade. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente, seja $\mathcal{A} \subset \tau$. Novamente, podemos supor que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ pois caso contrário nada há a provar. Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e, portanto, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. \square

Fechados

Um importante conceito é o de conjunto fechado:

Definição 1.1.21. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um **conjunto fechado** se $X \setminus F$ é aberto.

Exemplo 1.1.22. Em qualquer espaço topológico (X, τ) , X e \emptyset são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e \emptyset são abertos e fechados).

Exemplo 1.1.23. Em \mathbb{R} , $[0, 1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \setminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exemplo 1.1.24. Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\wp(X)$ e, portanto, é aberto.

Exemplo 1.1.25. Na reta de Sorgenfrey, $[a, b[$ é fechado, onde $a < b$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \setminus [a, b[$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b[$, então há dois casos a considerar:

- $x \geq b$: basta tomar o aberto $[x, x + 1[$, cuja interseção com $[a, b[$ é vazia;
- $x < a$: podemos considerar o aberto $[x, a[$, que também está contido no complementar de $[a, b[$.

Portanto, o complementar de $[a, b[$ é aberto, como queríamos.

Fecho, interior e fronteiras

Algo muito comum de se fazer é tomar o menor fechado contendo um determinado conjunto:

Definição 1.1.26. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos $\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$ (**fecho** de A , também denotado por $\text{Cl}(A)$).

Definimos $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{V \subset X : V \text{ é aberto e } V \subset A\}$ (**interior** de A , também denotado por $\text{Int}(A)$).

Proposição 1.1.27. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então \overline{A} é fechado e $\overset{\circ}{A}$ é aberto.*

Demonstração. Decorre diretamente da definição e das propriedades de conjuntos abertos e fechados. \square

Pensando que os abertos que contêm um ponto são as possíveis noções de “perto do ponto”, podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para “perto do ponto”, interceptamos o conjunto:

Note que esta definição difere da definição que daremos para ponto de acumulação.

Definição 1.1.28. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto aderente** a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.

Vamos mostrar que o fecho de um conjunto basicamente é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto:

Proposição 1.1.29. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } A\}$.*

Demonstração. Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A . Vamos provar que $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \setminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de \overline{A} , segue que $\overline{A} \subset X \setminus V$, contradição com o fato que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \overline{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \overline{A}$. Logo, $x \in X \setminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \setminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \overline{A}$. \square

Vale um resultado análogo para o interior de um conjunto A . Em particular, A é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{A} = A$ (ver Alongamento 1.1.61).

Proposição 1.1.30. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A, B \subset X$. Temos*

- (a) *Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;*
- (b) *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;*
- (c) *$\overline{A} = A$ se, e somente se, A é fechado.*

Demonstração. Dado $x \in \bar{A}$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U que contém x . Como $A \subset B$, segue em particular que $U \cap B \neq \emptyset$. Isto prova (a).

Provemos (c). Naturalmente se $\bar{A} = A$, obtemos que A é fechado, pois seu fecho é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, segue que $A = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\} = \bar{A}$. O item (b) segue então diretamente de (c), por \bar{A} ser fechado. \square

Exemplo 1.1.31. Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\bar{A} = A$ (e também que $\overset{\circ}{A} = A$).

Exemplo 1.1.32. Em \mathbb{R} , $\overline{[a, b[} = [a, b]$. De fato, b é o único ponto aderente a $[a, b[$ que é aderente a $[a, b]$.

Exemplo 1.1.33. Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a, b[} = [a, b]$. Para isso, basta lembrar que $[a, b]$ é fechado.

Exemplo 1.1.34. Em \mathbb{R} , $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Ambas as igualdades se devem ao fato de que dado qualquer ponto $q \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém pontos de \mathbb{Q} e de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. O mesmo vale na reta de Sorgenfrey.

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar:

Definição 1.1.35. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de fronteira** de A se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Notação 1.1.36. $\partial A = \{x \in X : x \text{ é ponto de fronteira de } A\}$.

Exemplo 1.1.37. Em \mathbb{R} , $\partial[a, b[= \{a, b\}$. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que $\partial[a, b[= \emptyset$.

Observação 1.1.38. A igualdade acima vale de modo geral. Se A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico (X, τ) , então $\partial A = \emptyset$.

Exemplo 1.1.39. Em \mathbb{R} (ou na reta de Sorgenfrey), $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Bases

Uma base nada mais é que uma subfamília de abertos que é suficiente para recuperarmos todos os abertos por meio de uniões:

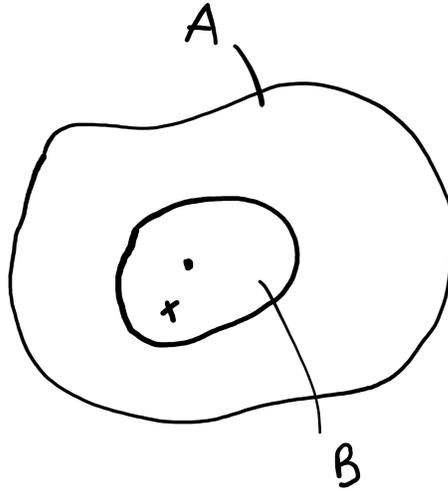


Figura 1.3: O desenho básico de uma base

Definição 1.1.40. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma **base** para (X, τ) se para todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Uma importante caracterização para bases é o seguinte resultado:

Veja a figura 1.3.

Proposição 1.1.41. Uma família \mathcal{B} de subconjuntos de τ é uma base para (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{B} seja uma família como no enunciado e seja $A \in \tau$. Para cada elemento $x \in A$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Segue, então, que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $A \in \tau$. Como podemos escrever $A = \bigcup \mathcal{B}'$ com $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, tomamos $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$. Além disso, temos que $B \subset A$. \square

Exemplo 1.1.42. $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia usual de \mathbb{R} .

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \tau$. Pela definição de τ , existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Note que existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$$

Logo, $B =]a, b[\in \mathcal{B}$ e $x \in B \subset A$.

Exemplo 1.1.43. Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então, $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é uma base para (X, d) (ver Alongamento 1.1.64).

Exemplo 1.1.44. Seja X um conjunto qualquer. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para a topologia discreta sobre X (ver Alongamento 1.1.64).

Exemplo 1.1.45. A família $\mathcal{B} = \{[x, y[: x < y\}$ é uma base para a reta de Sorgenfrey (ver Alongamento 1.1.64).

Em algum sentido, uma base é um conjunto suficiente para determinar todos os abertos. Podemos fazer o análogo para vizinhanças:

Definição 1.1.46. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos Veja o Exercício 1.1.78 que \mathcal{V} é um **sistema fundamental de vizinhanças** de x se

- (a) Para todo $V \in \mathcal{V}$, V é vizinhança de x ;
- (b) Para todo aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset A$.

No caso em que os elementos de \mathcal{V} são abertos, chamamos \mathcal{V} de **base local** para x .

Exemplo 1.1.47. Em \mathbb{R} , $\mathcal{V}_1 = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x (mais que isso, como todos os membros de \mathcal{V}_1 são abertos, \mathcal{V}_1 é uma base local de x).

$\mathcal{V}_2 = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Exemplo 1.1.48. Na reta de Sorgenfrey, $\mathcal{V} = \{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Exemplo 1.1.49. Considere X com a topologia discreta. $\mathcal{V}_1 = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x , bem como $\mathcal{V}_2 = \{A \subset X : x \in A\}$.

O próximo resultado mostra como bases do espaço original se relacionam com as de um subespaço:

Proposição 1.1.50. *Se \mathcal{B} é uma base para (X, τ) , então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.* Podemos fazer o análogo com sistemas fundamentais de vizinhanças.

Demonstração. Sejam $A' \in \tau_Y$ e $x \in A'$. Pela definição de topologia de subespaço, existe $A \in \tau$ tal que $A' = A \cap Y$ e, assim, $x \in A$. Logo, pelo fato de \mathcal{B} ser base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, $x \in B \cap Y \subset A \cap Y$ e, portanto, \mathcal{B}' é uma base para (Y, τ_Y) . □

Alongamentos

Alongamento 1.1.51. Mostre a Proposição 1.1.11.

Alongamento 1.1.52. Fixe um espaço topológico (X, τ) . Considere para cada $x \in X$, \mathcal{V}_x a coleção de todas as vizinhanças de x .

- (a) Mostre que cada \mathcal{V}_x é um filtro.
- (b) Mostre que $(X, (\mathcal{V}_x)_{x \in X})$ é um espaço topológico*.
- (c) Mostre que $\{A \subset X : A \text{ é aberto}^*\} = \tau$.

Alongamento 1.1.53. Fixe um espaço topológico* $(X, (\mathcal{V}_x)_{x \in X})$. Seja $\tau = \{A \subset X : A \text{ é aberto}^*\}$.

- (a) Mostre que τ é uma topologia sobre X .
- (b) Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{W}_x = \{V \subset X : V \text{ é vizinhança de } x \text{ em } (X, \tau)\}$. Mostre que, para cada $x \in X$, $\mathcal{W}_x = \mathcal{V}_x$.

Alongamento 1.1.54. Este é um exercício para mostrar que a hipótese de compatibilidade na definição de espaço topológico* é necessária. Considere $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_0 = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ e } \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável}\}$ e, para cada $x \neq 0$, $\mathcal{F}_x = \{\mathbb{R}\}$.

- (a) Note que, de fato, cada \mathcal{F}_x é um filtro.
- (b) Considere $\tau = \{A \subset X : \forall a \in A \ A \in \mathcal{F}_a\}$.
- (c) Mostre que τ é uma topologia sobre \mathbb{R} .
- (d) Seja \mathcal{V}_0 a coleção de todas as vizinhanças de 0 na topologia τ . Mostre que $\mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{F}_0$.

Alongamento 1.1.55. Vejamos que os abertos em \mathbb{R} podem ser obtidos de várias maneiras. Mostre que os abertos são os mesmos se:

- (a) fizermos como no Exemplo 1.1.17;
- (b) usamos as vizinhanças como em 1.1.5
- (c) usamos a métrica de 1.1.2 e depois a Proposição 1.1.20.

Alongamento 1.1.56. Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Alongamento 1.1.57. Mostre que, de fato, a topologia de subespaço é uma topologia.

Alongamento 1.1.58. Considere $[0, 1]$ com a topologia de subespaço de \mathbb{R} . Mostre que $[0, \frac{1}{2}[$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em \mathbb{R} .

Alongamento 1.1.59. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são verdadeiras:

- (a) X, \emptyset são fechados;
- (b) Se $F, G \subset X$ são fechados, então $F \cup G$ é fechado;
- (c) Se \mathcal{F} é uma família não vazia de fechados, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ é um fechado.

Alongamento 1.1.60. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto interior** de A se existe V aberto tal que $x \in V \subset A$. Mostre que $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } A\}$.

Alongamento 1.1.61. Mostre o análogo à Proposição 1.1.30 para o interior.

Alongamento 1.1.62. Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Mostre as seguintes afirmações:

- (a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$
- (b) $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$
- (c) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$
- (d) $\overline{A} = A \cup \partial A$

Alongamento 1.1.63. Mostre que a fronteira de um conjunto sempre é fechada.

Alongamento 1.1.64. Mostre as afirmações dos Exemplos 1.1.43, 1.1.44 e 1.1.45.

Alongamento 1.1.65. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$. Mostre que $\{A \in \tau : x \in A \subset V\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para x .

Alongamento 1.1.66. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$, \mathcal{V} sistema fundamental de vizinhanças de x e $W \subset X$ vizinhança de x . Mostre que $\{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Exercícios

Exercício 1.1.67. Na definição da topologia cofinita (Exemplo 1.1.18), poderíamos pedir, em vez que os abertos tivessem complementar finito, que os abertos simplesmente fossem infinitos?

Exercício 1.1.68. Dizemos que duas métricas sobre um mesmo espaço X são **métricas equivalentes** se elas induzem a mesma topologia. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico qualquer, então existe uma outra métrica d' sobre X equivalente a d e que é limitada (isto é, existe $L > 0$ tal que $d'(x, y) \leq L$ para todo $x, y \in X$).

Exercício 1.1.69. Seja X um conjunto. Chamamos de **assimétrica** (na maioria dos livros, **quasi-métrica**), uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- (i) $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
 - (ii) $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- (a) Mostre que $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ é uma topologia sobre X (como fizemos com uma métrica);
- (b) Considere seguinte função sobre \mathbb{R} :

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que d é uma assimétrica sobre \mathbb{R} . Mostre que a topologia induzida por ela é a mesma da reta de Sorgenfrey.

Exercício 1.1.70. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Note que a restrição de d a Y induz uma métrica sobre Y . Mostre que a topologia induzida por tal métrica e a topologia induzida de subespaço de X coincidem.

Exercício 1.1.71. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F = F' \cap Y$.

Exercício 1.1.72. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço fechado. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, F é fechado em X .

Exercício 1.1.73. Encontre o análogo do Exercício 1.1.72 para abertos.

Exercício 1.1.74. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $A \subset X$ não vazio e $x \in X$, definimos $d(x, A)$ (**distância de ponto a conjunto**) como $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Mostre que $x \in \bar{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Exercício 1.1.75. Considere $\tau = \{A \subset \mathbb{Z} : \text{para todo } a \in A, \text{ existe } b \in \mathbb{N}_{>0} \text{ tal que } \{a + bz : z \in \mathbb{Z}\} \subset A\}$.

- (a) Mostre que τ é uma topologia sobre \mathbb{Z} .
- (b) Mostre que não existe um aberto não vazio que seja finito.
- (c) Mostre que, dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}_{>0}$, o conjunto $S(a, b) = \{a + bz : z \in \mathbb{Z}\}$ é aberto e fechado.
- (d) Mostre que $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ é primo}} S(0, p)$.

(e) Mostre que existem infinitos primos.

Exercício 1.1.76. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $A \subset X$, $x \in X$ e \mathcal{V} um sistema fundamental de vizinhanças para x . Mostre que $x \in \bar{A}$ se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Exercício 1.1.77. Seja X um conjunto e sejam τ e σ topologias sobre X . Sejam \mathcal{B} e \mathcal{C} bases para (X, τ) e (X, σ) respectivamente.

- (a) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B$ e $x \in C$ existam $C' \in \mathcal{C}$ e $B' \in \mathcal{B}$ tais que $x \in C' \subset B$ e $x \in B' \subset C$. Mostre que $\tau = \sigma$.
- (b) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ exista $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset B$. É verdade que $\sigma = \tau$? Se não for verdade, vale alguma das inclusões?

Exercício 1.1.78. Seja (X, τ) espaço topológico. Para cada $x \in X$, seja \mathcal{V}_x um sistema fundamental de vizinhanças para x . Mostre que, dado $A \subset X$, A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset A$.

Exercício 1.1.79. Dizemos que (X, τ) é um **espaço zero-dimensional** se ele possui uma base formada por abertos fechados.

- (a) Mostre que a reta de Sorgenfrey é zero-dimensional.

- (b) Mostre que tanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ quanto \mathbb{Q} são zero-dimensionais (considerados com a topologia de subsespaço).
- (c) Mostre que se Y é subespaço de um espaço zero-dimensional, então Y também é zero-dimensional.

Exercício 1.1.80. Sejam (X, τ) um espaço topológico e \mathcal{B} base para (X, τ) . Mostre que τ é a menor topologia que contém \mathcal{B} . Isto é, mostre que $\tau = \bigcap_{\sigma \in T} \sigma$ onde $T = \{\sigma : \sigma \text{ é uma topologia para } X \text{ tal que } \mathcal{B} \subset \sigma\}$.

Exercício 1.1.81. Dado um conjunto X e uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X , chamamos de **topologia gerada** por X o conjunto $[\mathcal{B}] = \bigcap_{\tau \in T} \tau$, onde $T = \{\tau \subset \wp(X) : \tau \text{ é topologia sobre } X \text{ e } \mathcal{B} \subset \tau\}$.

- (a) Mostre que T definido acima é não vazio (e, portanto, podemos tomar a intersecção).
- (b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é uma topologia sobre X .
- (c) Mostre que, se \mathcal{B} satisfaz:
- (i) $\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;
 - (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}, \forall x \in A \cap B, \exists C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.
- então \mathcal{B} é uma base para $(X, [\mathcal{B}])$.

1.2 Axiomas de Separação

Muitas vezes, só a definição de topologia é muito simples para que possamos trabalhar. Nesta seção veremos algumas hipóteses adicionais que podemos pedir num espaço topológico. As hipóteses desta seção tem como objetivo, por exemplo, exigir que a topologia sobre o espaço seja rica o suficiente para diferenciar os pontos do espaço, ou separar os pontos entre si ou até mesmo separar fechados. Apresentaremos as propriedades em ordem de “força” (veja o Exercício 1.2.27).

Num espaço T_0 , pelo menos um dos abertos da Figura 1.4 existe.

Num espaço T_0 , os abertos **Definição 1.2.1.** Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_0 se para “diferenciam” pontos, isto quaisquer $x, y \in X$ distintos existir um aberto A tal que $(x \in A \text{ e } y \notin A)$ ou é, dados dois pontos dis- $(x \notin A \text{ e } y \in A)$. tintos, existe ao menos um aberto que os distingue.

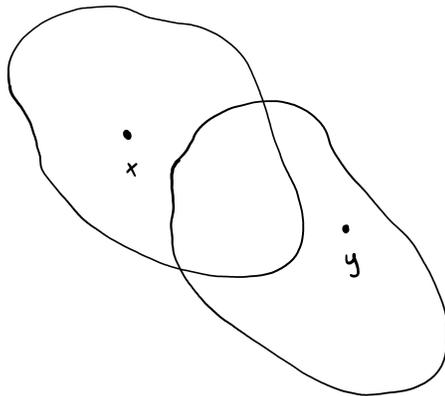


Figura 1.4: Abertos diferentes para pontos diferentes

Vejamos alguns exemplos de espaços que não são T_0 . Exemplos que satisfazem tal propriedade serão dados no decorrer do texto (veja também o Exercício 1.2.24).

Exemplo 1.2.2. Qualquer conjunto X com mais de dois pontos, munido da topologia caótica não é T_0 .

Exemplo 1.2.3. Seja X um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos. Fixe $x, y \in X$ distintos e defina $\tau = \{A \subset X : x, y \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$. É fácil ver que (X, τ) é um espaço topológico. Contudo, não existe aberto em X tal que $x \in A$ e $y \notin A$ ou $y \in A$ e $x \notin A$. Logo (X, τ) não é T_0 .

Proposição 1.2.4. Um espaço topológico (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ para x e y respectivamente, tivermos que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Demonstração. Suponha (X, τ) T_0 . Tomemos $x, y \in X$ pontos distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases locais arbitrárias para x e y respectivamente. Por X ser T_0 , existe um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$, ou $x \notin A$ e $y \in A$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro caso. Por \mathcal{B}_x ser base, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset A$. Como $y \notin A$, segue que $y \notin B$ e, por tanto, $B \notin \mathcal{B}_y$, mostrando que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x, y \in X$ distintos, toda base local de x seja distinta de qualquer base local de y . Em particular,

Esse resultado deixa claro que os pontos próximos de um ponto são diferentes dos próximos a outro num espaço T_0 .

$\mathcal{B}_x = \{A \in \tau : x \in A\}$ e $\mathcal{B}_y = \{A \in \tau : y \in A\}$ são bases locais de x e y respectivamente. Logo, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ pela hipótese. Assim, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \notin \mathcal{B}_y$ ou existe $B \in \mathcal{B}_y$ tal que $B \notin \mathcal{B}_x$. \square

Já nos espaços T_1 , exigimos que ambos os abertos da Figura 1.4 existam.

Note que ser T_1 é “mais forte” do que ser T_0 , pois enquanto o último exige a existência de um aberto que satisfaça ao menos um dentre dois casos, ser T_1 exige a existência de abertos que satisfaçam ambos os casos.

Definição 1.2.5. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Provavelmente a caracterização mais importante de T_1 é a seguinte:

Proposição 1.2.6. (X, τ) é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

Demonstração. Suponha (X, τ) um espaço T_1 . Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como (X, τ) é T_1 , existe um aberto A tal que $y \in A$ e $x \notin A$, isto é, $A \cap \{x\} = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{\{x\}}$. Assim, o único ponto que pode pertencer a $\overline{\{x\}}$ é o próprio x . Ou seja $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Reciprocamente, sejam $x, y \in X$ distintos. Como $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in X$, então $X \setminus \{x\}$ é um conjunto aberto. Assim, $X \setminus \{x\}$ é um aberto tal que $y \in X \setminus \{x\}$ e $x \notin X \setminus \{x\}$. \square

Exemplo 1.2.7. Um conjunto X com a topologia cofinita é sempre T_1 . De fato, dados $x, y \in X$ distintos, o complementar de $\{x\}$ é um aberto que não contém x mas contém y .

Para espaços de Hausdorff, já exigimos que os abertos em volta dos pontos sejam disjuntos.

Num espaço de Hausdorff, os abertos “separam” pontos.

Definição 1.2.8. Dizemos que (X, τ) é T_2 (**espaço de Hausdorff**) se, para todo $x, y \in X$ distintos, existem A, B abertos tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 1.2.9. X munido da topologia cofinita é T_1 , mas não é T_2 se X for infinito. De fato, sejam $x, y \in X$ distintos e abertos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Temos que $A = X \setminus F_1$ e $B = X \setminus F_2$, com F_1, F_2 finitos. Logo, $A \cap B = X \setminus (F_1 \cup F_2)$ e, como X é infinito, $A \cap B$ é necessariamente não vazio.

Proposição 1.2.10. Considere (X, d) um espaço métrico. Então tal espaço é de Hausdorff (com a topologia induzida pela métrica).

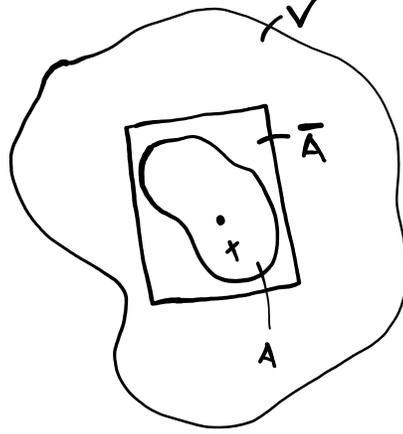


Figura 1.5: Comportamento de vizinhanças em espaços T_3

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Seja $r = d(x, y) > 0$. Vamos mostrar que $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$. Suponha que não. Seja $a \in B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y)$. Então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

absurdo, pois $d(x, y) = r$. □

Definição 1.2.11. Dizemos que (X, τ) é T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e Num espaço topológico regular, os abertos “separados” $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$ existirem A, B abertos tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Se, além disso, (X, τ) é T_1 , dizemos que (X, τ) é um **espaço regular**¹.

O próximo resultado é provavelmente a principal caracterização de espaços T_3 :

Proposição 1.2.12. *Seja (X, τ) um espaço topológico. (X, τ) é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para todo aberto V tal que $x \in V$, existe um aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.* Veja a Figura 1.5.

Demonstração. Suponha (X, τ) espaço T_3 . Sejam $x \in X$ e $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Note que $X \setminus V$ é um fechado e $x \notin X \setminus V$. Então existem A, B

¹Essa nomenclatura não é padrão - às vezes se supõe T_1 para regulares, às vezes não.

abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $X \setminus V \subset B$. Assim, $A \subset X \setminus B$ que é fechado. Logo, $\overline{A} \subset X \setminus B \subset V$.

Reciprocamente, mostremos que (X, τ) é T_3 . Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $X \setminus F$ é aberto e contém x . Logo, existe A aberto tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset X \setminus F$. Note que $x \in A$, $F \subset X \setminus \overline{A}$ e $A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$. \square

Corolário 1.2.13. *Um espaço topológico (X, τ) é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x .*

Demonstração. Veja o Alongamento 1.2.22. \square

Neste e no próximo exemplo já estamos supondo claro que os espaços em questão são T_1 .

Exemplo 1.2.14. \mathbb{R} é regular. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] : n \in \mathbb{N} \right\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x .

Exemplo 1.2.15. A reta de Sorgenfrey é regular (veja o Exemplo 1.1.48, e considere o Corolário 1.2.13).

Veja o Exercício 1.2.30 para um exemplo de um espaço de Hausdorff que não seja regular.

Num espaço normal, os abertos separam os fechados disjuntos.

Definição 1.2.16. Dizemos que (X, τ) é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$, $G \subset B$. Se, além disso, (X, τ) é T_1 , dizemos que (X, τ) é **espaço normal**².

Exemplo 1.2.17. Vamos mostrar mais para frente que todo métrico é normal (Corolário 2.2.4).

Exemplo 1.2.18. A reta de Sorgenfrey é normal. Vamos provar tal afirmação. Primeiramente, note que ela é T_1 .

Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, sejam $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)[\cap G = \emptyset \text{ e } [b, y(b)[\cap F = \emptyset.$$

Podemos fazer isso pois os complementares de F e G são abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)[\text{ e } B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)[.$$

²Novamente, tal nomenclatura não é completamente padrão. Às vezes se supõe T_1 , às vezes não.

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$, os quais são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que $c \in [a, x(a)[\cap]b, y(b)[$.

Caso $a < b$: então $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a)[$, logo $[a, x(a)[\cap]b, y(b)[= \emptyset$, absurdo. Se $b < a$, obtém-se uma contradição de maneira análoga. É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Exemplo 1.2.19. Veremos mais para frente que o quadrado da reta de Sorgenfrey é regular mas não é normal (Proposição ??).

Veremos que até regularidade, as propriedades desta seção são “bem comportadas” e muitas vezes a verificação de se um espaço tem ou não a propriedade é elementar. Mas com a normalidade, a situação muda. Desta forma, um tipo de resultado bastante útil é quando podemos “subir” alguma propriedade até a normalidade. O próximo resultado vai nesta direção: veremos que para um espaço enumerável ser normal basta ele ser regular. A ideia para a demonstração será usada outras vezes no decorrer do texto:

Proposição 1.2.20. *Todo espaço enumerável e regular é normal.*

Note que na verdade estamos provando que todo espaço T_3 enumerável é T_4 .

Demonstração. Sejam F e G fechados disjuntos. Faça $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $G = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como o espaço é regular, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe A_m aberto tal que $x_m \in A_m$ e $\overline{A_m} \cap G = \emptyset$ (pela Proposição 1.2.12), bem como B_m aberto tal que $y_m \in B_m$ e $\overline{B_m} \cap F = \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k} \text{ e } B_n^* = B_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{A_k}.$$

Note que A_n^* e B_n^* são abertos (pois $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ para $A, B \subset X$).

Sejam $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^*$ e $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^*$. Note que $F \subset A$ e $G \subset B$ (em particular, observe que $A_n^* \cap F = A_n \cap F$). Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $z \in A \cap B$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $z \in A_n^*$ e $z \in B_m^*$.

Vamos fazer o caso $n \leq m$, o outro é análogo. Então $z \in A_n^* = A_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k}$ e $z \in B_m^* = B_m \setminus \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k}$. Note que, como $m \geq n$, $z \notin \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k} \supset \overline{A_n} \supset A_n \supset A_n^*$, contradição, pois supomos $z \in A_n^*$. \square

Alongamentos

Alongamento 1.2.21. Mostre que um espaço finito é T_1 se, e somente se, tem a topologia discreta.

Alongamento 1.2.22. Demonstre o Corolário 1.2.13.

Alongamento 1.2.23. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que T_4 é equivalente à seguinte propriedade: “Para todo F fechado e todo V aberto tal que $F \subset V$, existe um aberto U tal que $F \subset U \subset \bar{U} \subset V$ ”.

Exercícios

Exercício 1.2.24. Dê um exemplo de um espaço T_0 que não seja T_1 .

Exercício 1.2.25. (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos tivermos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Exercício 1.2.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:

- (a) (X, τ) é T_1 ;
- (b) $\forall x \in X$, existe \mathcal{A} uma coleção de abertos tal que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x\}$;
- (c) $\forall x \in X$ existe \mathcal{V}_x um sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} V = \{x\}$;

Exercício 1.2.27. Prove a cadeia de implicações: (X, τ) é normal $\Rightarrow (X, \tau)$ é regular $\Rightarrow (X, \tau)$ é $T_2 \Rightarrow (X, \tau)$ é $T_1 \Rightarrow (X, \tau)$ é T_0 .

Exercício 1.2.28. Sejam (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que se (X, τ) é T_i para $i = 0, \dots, 3$, então Y também é.

Exercício 1.2.29. Mostre que se Y é subespaço fechado de um espaço normal, então Y também é normal.

Exercício 1.2.30. Considere \mathbb{R} com a topologia gerada pelos conjuntos da forma

$$]a, b[\setminus C$$

onde $a < b \in \mathbb{Q}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de **reta esburacada**.

- (a) Mostre que isso é uma base para tal topologia;
- (b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff;
- (c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado;
- (d) Mostre que tal espaço não é regular.

Exercício 1.2.31. Mostre que \mathbb{Q} com a topologia induzida pela reta de Sorgenfrey é normal.

1.3 Axiomas de Enumerabilidade

Nesta seção vamos começar a investigar quando a existência de determinados conjuntos enumeráveis nos dão propriedades importantes sobre o espaço. Tais propriedades serão muito usadas no decorrer do texto.

Definição 1.3.1. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** (*1st countable*) se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Neste caso, também dizemos que (X, τ) tem **bases locais enumeráveis**.

Veja o Alongamento 1.3.24 para ver que um ponto ter um sistema fundamental de vizinhanças enumerável é equivalente a ter uma base local enumerável.

Exemplo 1.3.2. Todo espaço métrico (X, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para isso, basta notar que $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

Exemplo 1.3.3. A reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, já que $\{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

O primeiro axioma de enumerabilidade tem bastante em comum com o conceito de sequência convergente:

Definição 1.3.4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** para $x \in X$ se, para toda vizinhança V de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V$. Notação: $x_n \rightarrow x$.

Note que esta definição permanece equivalente se trocarmos vizinhança por aberto contendo o ponto (veja o Alongamento 1.3.25).

Proposição 1.3.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x_n \rightarrow x$. Então, $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Demonstração. Seja V vizinhança de x . Seja n_0 da definição de convergência. Note que $x_{n_0} \in V \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Corolário 1.3.6. *Seja (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$. Sejam $x \in X$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de Y . Se $y_n \rightarrow x$, então $x \in \overline{Y}$.*

Para espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade, ser ponto aderente pode ser caracterizado por limite de sequências:

Proposição 1.3.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico com bases locais enumeráveis. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Então, $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de Y tal que $y_n \rightarrow x$.*

A hipótese sobre as bases locais é necessária. Veja o Exemplo 1.3.9.

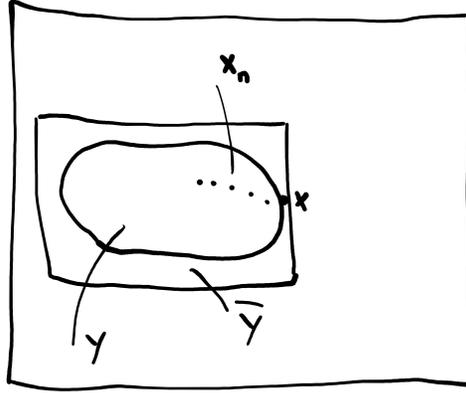


Figura 1.6: Aderência em termos de convergência

Demonstração. Um lado já está feito (vale mesmo sem a hipótese sobre as bases).

Suponha que $x \in \bar{Y}$ e seja $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema fundamental de vizinhanças para x . Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $y_n \in \left(\bigcap_{k \leq n} V_k\right) \cap Y$. Mostremos que $y_n \rightarrow x$. Seja V vizinhança de x . Como \mathcal{V} é sistema fundamental de vizinhanças de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset V$. Seja $n \geq n_0$. Note que $y_n \in \bigcap_{k \leq n} V_k \subset V_{n_0} \subset V$. \square

Espaços de Hausdorff tem a propriedade da unicidade de limites:

Proposição 1.3.8. *Seja (X, τ) um espaço topológico de Hausdorff. Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então $x = y$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $x \neq y$. Sejam U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Então, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n \geq n_1$, $x_n \in U$ e para todo $n \geq n_2$, $x_n \in V$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $x_{n_0} \in U \cap V$, que é uma contradição. \square

Exemplo 1.3.9. Na reta esburacada, se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_n \rightarrow x$ para algum x , então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$. De fato, temos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é fechado por ser enumerável (veja o Exercício 1.2.30). Em particular, note que $0 \in]0, 1[$ mas não existe sequência em $]0, 1[$ que

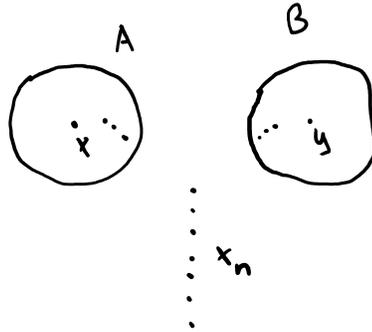


Figura 1.7: A unicidade de limites de seqüências

converge para 0. Com isso, temos que a reta esburacada não tem bases locais enumeráveis.

Definição 1.3.10. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de X é uma **seqüência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 1.3.11. *Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de pontos de X tal que $x_n \rightarrow x$. Então, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Seja n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados $n, m \geq n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

□

Definição 1.3.12. Seja (X, d) um espaço métrico. (X, d) é dito **espaço métrico completo** se toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy é convergente.

O segundo axioma de enumerabilidade é uma versão global do primeiro:

Definição 1.3.13. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** (*2nd countable*) se admite uma base enumerável.

Exemplo 1.3.14. A reta real satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, já que $\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base.

Proposição 1.3.15. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. Seja \mathcal{B} uma base para (X, τ) . Então, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base local para x . \square

Exemplo 1.3.16. A reta de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, suponha, por contradição, que satisfaça. Seja \mathcal{B} uma base enumerável. Para cada $x \in X$, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x + 1[$. Note que se $x \neq y$, então $B_x \neq B_y$. De fato, sem perda de generalidade, suponha que $x < y$ e note que $x \notin B_y$, pois $B_y \subset [y, y + 1[$. Logo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ definida por $f(x) = B_x$ é injetora, o que é uma contradição, pois \mathcal{B} é enumerável e \mathbb{R} não.

Definição 1.3.17. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $D \subset X$ é denso em X se $\overline{D} = X$.

Definição 1.3.18. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **terceiro axioma de enumerabilidade** (*3rd countable*) se admite um subconjunto denso enumerável. Neste caso, dizemos também que (X, τ) é um **espaço separável**.

Exemplo 1.3.19. Temos que a reta real e a reta de Sorgenfrey são separáveis pois em ambos os casos \mathbb{Q} é denso.

O segundo axioma de enumerabilidade implica no terceiro (e já vimos que ele implica no primeiro também):

Proposição 1.3.20. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então ele é separável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base para (X, τ) . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_n$ (podemos supor sem perda de generalidade que $B_n \neq \emptyset$). Vamos mostrar que $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso. Sejam $x \in X$ e V vizinhança de x . Como \mathcal{B} é base, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Note que $x_n \in B_n$. Portanto, $x_n \in V \cap D$. \square

No caso de métricos, vale a volta:

Note que a reta de Sorgenfrey nos dá que a hipótese de metrizabilidade é necessária. **Proposição 1.3.21.** *Se (X, d) é um espaço métrico e separável, então (X, d) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X . Considere

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x_n) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Vamos mostrar que \mathcal{B} é base. Sejam A aberto e $x \in A$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X , existe $x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$. Vamos mostrar que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$. Primeiramente, note que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, pois $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$. Temos também que $B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$, pois, dado $a \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, temos

$$d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definição 1.3.22. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço metrizável** se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ .

Com o que temos até o momento, já conseguimos dizer em alguns casos quando um espaço não é metrizável:

Exemplo 1.3.23. A reta de Sorgenfrey não é um espaço metrizável. De fato, temos que este é um espaço separável mas que não admite uma base enumerável. Assim, pela Proposição 1.3.21, que ele não é metrizável.

Veremos outros critérios ao longo do texto.

Alongamentos

Alongamento 1.3.24. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Mostre que são equivalentes:

- (i) x admite um sistema fundamental de vizinhanças enumerável;
- (ii) x admite uma base local enumerável.

Alongamento 1.3.25. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X . Mostre que são equivalentes:

- (i) $x_n \rightarrow x$.
- (ii) para todo V aberto tal que $x \in V$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

(iii) dado \mathcal{V} sistema fundamental de vizinhanças para x , para todo $V \in \mathcal{V}$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

Alongamento 1.3.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que $D \subset X$ é denso se, e somente se, para todo aberto não vazio A , $A \cap D \neq \emptyset$.

Alongamento 1.3.27. Mostre que se (X, τ) é um espaço topológico enumerável que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então (X, τ) também satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.3.28. Mostre que todo subespaço de um espaço que satisfaça o primeiro axioma de enumerabilidade também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.3.29. Mostre que todo subespaço de um espaço com base enumerável tem base enumerável.

Alongamento 1.3.30. Mostre que se (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas enumerável e decrescente, isto é, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $V_{n+1} \subset V_n$.

Exercícios

Exercício 1.3.31. Mostre que a reta esburacada não é metrizável.

Exercício 1.3.32. Mostre que na reta esburacada as únicas sequências convergentes são as quase constantes. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita uma **sequência quase constante** se existem x e n_0 tais que $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$.

Exercício 1.3.33. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $D \subset X$ denso. Considerando D como subespaço, mostre que se $E \subset D$ é denso em D , então E é denso em X .

Exercício 1.3.34. Mostre que todo subespaço de um espaço que tenha base enumerável é separável.

Exercício 1.3.35. O exemplo deste exercício é chamado de **plano de Niemytski**.

Considere $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ com a topologia de forma que:

- (i) se (x, y) é tal que $y > 0$, então uma vizinhança básica de (x, y) é da forma de uma bola aberta centrada em (x, y) que não intercepta o eixo x , isto é $B_\varepsilon((x, y))$ com $0 < \varepsilon < y$;

- (ii) Para os pontos da forma $(x, 0)$, uma vizinhança de tal ponto é da forma de uma bola aberta contida em $\{(a, b) : b > 0\}$ e que tangencie o eixo x no ponto $(x, 0)$ (inclua o ponto em tal vizinhança). Ou seja, $B_y((x, y)) \cup \{(x, 0)\}$.

onde $B_r((x, y))$ é a bola com a métrica usual do \mathbb{R}^2 .

- (a) Mostre que isso define uma topologia.
(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.
(c) Mostre que tal espaço é regular.
(d) Mostre que tal espaço é separável.
(e) Mostre que o eixo x ($\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$) com a topologia de subespaço tem a topologia discreta.
(f) Mostre que tal espaço não tem base enumerável.
(g) Mostre que tal espaço não é metrizável.
(h) Mostre que não é verdade que todo subespaço de um espaço separável é separável (compare com o Exercício 1.3.34).

Exercício 1.3.36. Mostre que a reta esburacada não é separável.

Exercício 1.3.37. Mostre que, se (X, τ) é um espaço regular que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então (X, τ) é um espaço normal.

Exercício 1.3.38. Sejam (X, τ) um espaço topológico, \mathcal{B} uma base enumerável para (X, τ) e seja \mathcal{C} uma base qualquer para (X, τ) . Então, existe uma família enumerável $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ que é base para (X, τ) .

Capítulo 2

Funções

2.1 Funções contínuas

Uma maneira de entender a definição de função contínua é a seguinte: imagine que f seja uma máquina de transformar algo em outra coisa. Para exemplificar, imaginemos que f transforma farinha em pizza. Assim, se queremos obter “ y m^2 de pizza”, precisamos fornecer x kg de farinha, de forma que $f(x) = y$. Mas, como toda medição acarreta em erros, este processo não tem precisão absoluta. Desta forma, para obtermos “ y m^2 de pizza” dentro de uma margem de erro T (tolerância), precisamos fornecer x kg dentro de uma precisão P (exigida pela f). Vamos dizer que f é contínua se dada uma tolerância qualquer, sempre podemos encontrar uma precisão que satisfaça o processo.

O que não seria nada ruim. Mas não sei de onde viria o molho.

Traduzindo para a nossa linguagem, dados (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, f será contínua no ponto x se para toda tolerância T em torno de $f(x)$, existe uma precisão P em torno de x de forma que $f[P] \subset T$. Note que essa última condição simplesmente quer dizer que todo os pontos que satisfazem a preciação tem imagem dentro da tolerância. Finalmente, note que estar dentro de uma precisão ou de uma tolerância é simplesmente estar “próximo” de um determinado ponto. Ou seja, basta trabalharmos com estes dois conceitos como sendo vizinhanças:

Definição 2.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. Seja também $x \in X$. Dizemos que f é uma função **função contínua no ponto** x se, para toda vizinhança A de $f(x)$ existe uma vizinhança B de x tal que $f[B] \subset A$.

Veja o Alongamento 2.1.17 para ver que esse conceito de fato generaliza aquele normalmente visto em cursos de Cálculo.

Da mesma forma que obtemos uma definição mais simples (e menos intuitiva) quando abandonamos vizinhanças e definimos abertos diretamente

de uma forma global para o espaço, também temos uma definição para funções contínuas (de maneira global):

Definição 2.1.2. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é uma **função contínua** se, para todo aberto A de Y , temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X (i.e., $\forall A \in \rho \ f^{-1}[A] \in \tau$).

De fato, os conceitos apresentados são versões globais e locais de uma mesma coisa:

Proposição 2.1.3. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$, f é contínua no ponto x .*

Demonstração. Suponha f contínua e $x \in X$. Seja A vizinhança de $f(x)$ e A' aberto tal que $f(x) \in A' \subset A$. Assim, $f^{-1}[A']$ é aberto, com $x \in f^{-1}[A']$ (portanto, vizinhança de x) e $f[f^{-1}[A']] \subset A' \subset A$.

Agora, suponha que para todo $x \in X$, f é contínua em x . Seja A aberto em Y . Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in A$, seja B_x vizinhança de x tal que $f[B_x] \subset A$. Como B_x é vizinhança de x , existe B'_x aberto tal que $x \in B'_x \subset B_x$. Assim, $f^{-1}[A] = \bigcup_{x \in f^{-1}[A]} B'_x$ é aberto. \square

Exemplo 2.1.4. Considere (X, τ) um espaço topológico. Então a função $I : X \rightarrow X$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in X$ (**função identidade**) é contínua (a verificação é imediata).

Exemplo 2.1.5. Qualquer função constante é contínua. De fato, sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e considere uma função constante $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = k$. Seja A um aberto de (Y, σ) . Então,

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset, & k \notin A \\ X, & k \in A \end{cases}$$

Ou seja, em ambos os casos $f^{-1}[A]$ é um aberto de (X, τ) .

Com a definição global de continuidade, prova-se o seguinte resultado facilmente:

Este resultado é lido como **Proposição 2.1.6.** *Sejam (X_1, τ_1) , (X_2, τ_2) e (X_3, τ_3) espaços topológicos e sejam $g : X_1 \rightarrow X_2$ e $f : X_2 \rightarrow X_3$ funções contínuas. Então, $f \circ g : X_1 \rightarrow X_3$ é contínua.* O que era de se esperar.

Demonstração. Seja A um aberto em X_3 . Como f é contínua, temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X_2 . Agora, como g é contínua, $g^{-1}[f^{-1}[A]]$ é aberto em X_1 . Mas, como $g^{-1}[f^{-1}[A]] = (f \circ g)^{-1}[A]$, a proposição está provada. \square

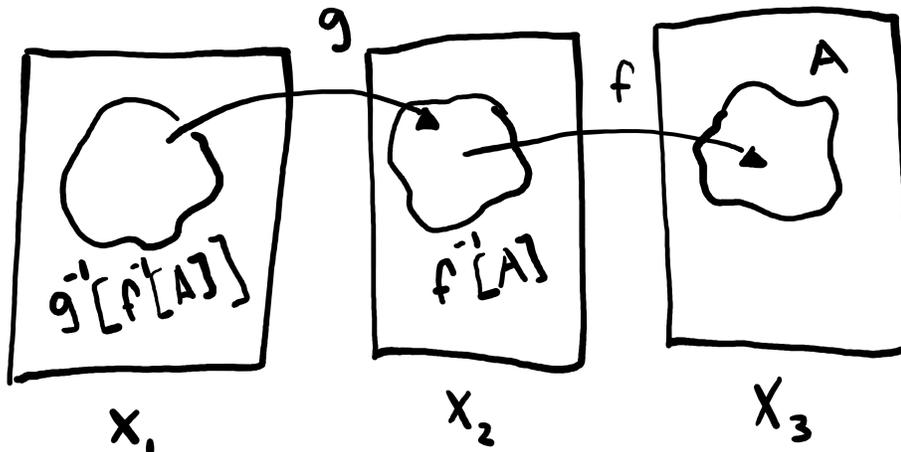


Figura 2.1: Composta de contínuas é contínua (vá da direita para a esquerda)

Densos são “empurrados” por funções contínuas:

Proposição 2.1.7. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua sobrejetora. Se $D \subset X$ é denso em X , então, $f[D]$ é denso em Y .*

Demonstração. Seja $A \subset Y$ aberto não vazio. Note que $f^{-1}[A]$ é aberto em X . Como f é sobrejetor, $f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Logo, existe $d \in D$ tal que $d \in f^{-1}[A]$, ou seja, $f(d) \in A$. Portanto, $f[D] \cap A \neq \emptyset$. \square

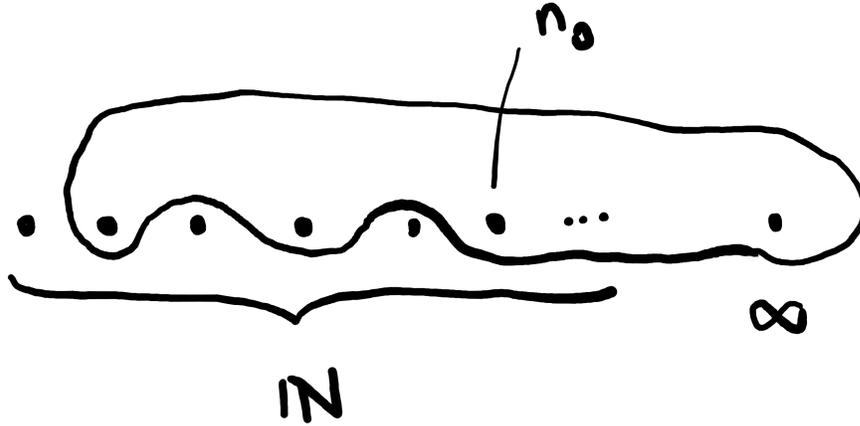
Corolário 2.1.8. *Imagem contínua de um espaço separável é separável.*

O seguinte exemplo será útil no estudo de sequências convergentes:

Exemplo 2.1.9. Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos

- (a) $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $\{\infty\} \cup A$, em que $A \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

Note que, desta forma, um conjunto contendo ∞ é aberto se, e somente se, apenas uma quantidade finita de elementos de \mathbb{N} não pertence a ele. Chamamos este espaço de **espaço da sequência convergente**.

Figura 2.2: Típica vizinhança de ∞

Proposição 2.1.10. *Seja (X, τ) espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$ uma função $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ com a topologia do exemplo anterior). Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \rightarrow f(\infty)$ (i.e., a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$).*

Demonstração. Suponha f contínua. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é aberto. Logo, $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]$ é finito, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $n \in f^{-1}[A]$. Logo, para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$.

Agora, suponha que $f(n) \rightarrow f(\infty)$. É imediato que f é contínua em todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que f é contínua em ∞ . Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como $f(n) \rightarrow f(\infty)$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$. Logo, $\{n : n \geq n_0\} \subset f^{-1}[A]$ e $\infty \in \{n : n \geq n_0\} \cup \{\infty\} \subset f^{-1}[A]$. \square

Funções contínuas também “empurram” sequências convergentes:

Proposição 2.1.11. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ função contínua e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Então, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Demonstração. Considere a função $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow X$, com $h(n) = x_n$ e $h(\infty) = x$. Note que h é contínua pela proposição anterior. Note também que $f \circ h$ é contínua, pois é composta de contínuas. Note que $(f \circ h)(n) =$

$f(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e que $(f \circ h)(\infty) = f(\infty)$. Logo, pela proposição anterior, aplicada a $f \circ h$, temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$. \square

No caso de espaços “ricos” em sequências convergentes, também temos a volta do resultado anterior:

Proposição 2.1.12. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (X, τ) possui bases locais enumeráveis. Dada $f : X \rightarrow Y$ uma função, temos que f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \rightarrow x$, temos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.* Veja também o Exercício 2.1.22.

Demonstração. Já está feito supondo f contínua.

Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x . Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}[A]$. Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subset f^{-1}[A]$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \rightarrow x$. De fato, seja $V \ni x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$. Note, também, que $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, que é contradição. \square

Corolário 2.1.13. *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \rightarrow x$, temos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Alongamentos

Alongamento 2.1.14. Mostre que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[F]$ é fechado (em X) para todo $F \subset Y$ fechado.

Alongamento 2.1.15. Mostre que na definição de função contínua poderíamos supor os abertos da imagem como sendo básicos (isto é, os abertos em Y serem elementos de uma base \mathcal{B} fixada previamente).

Alongamento 2.1.16. Mostre o análogo do alongamento anterior para a definição de continuidade num ponto, trocando vizinhança por “elemento de uma base local” fixada.

Alongamento 2.1.17. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \rightarrow X_2$ uma função. Mostre que, para cada $x \in X_1$, são equivalentes: Para aqueles que gostam de ε 's e δ 's.

- (a) f contínua em x (com as topologia induzidas pelas métricas);
- (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d_1(x, y) < \delta \rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Alongamento 2.1.18. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $Z \subset X$ subespaço de X . Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Mostre que $(f \upharpoonright Z) : Z \rightarrow Y$ é contínua.

Exercícios

Exercício 2.1.19. Seja (X, τ) espaço topológico. Seja A um aberto fechado em X . Mostre que a **função característica** de A é contínua. Isto é, que a função $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua (considere em $\{0, 1\}$ a topologia discreta (ou a induzida por \mathbb{R} , que dá na mesma)).

Exercício 2.1.20. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Sejam $F_1, \dots, F_n \subset X$ fechados tais que $\bigcup_{i=1}^n F_i = X$. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- Mostre que se $f \upharpoonright F_i$ é contínua para todo $i = 1, \dots, n$, então f é contínua;
- Note que a volta é imediata (mesmo que cada F_i não seja fechado).
- Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de que cada F_i ser fechado é necessária no item (a).

Exercício 2.1.21. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Seja $(A_i)_{i \in I}$ família de abertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Seja $f : X \rightarrow Y$.

- Mostre que se $f \upharpoonright A_i$ é contínua para todo $i \in I$, então f é contínua.
- Note que a volta é imediata (mesmo que cada A_i não seja aberto).

Exercício 2.1.22. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, sendo que (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Mostre que podemos melhorar a Proposição 2.1.12 para $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em X , temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Exercício 2.1.23. Considere (X, τ) como sendo a reta esburacada e seja (Y, ρ) um espaço qualquer. Seja $f : X \rightarrow Y$. Mostre que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X , então $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y . Conclua que a hipótese sobre o primeiro axioma de enumerabilidade é essencial no exercício anterior (e na Proposição 2.1.12).

2.2 Lema de Urysohn

Nesta seção veremos uma equivalência entre a normalidade e a existência de determinadas funções contínuas. Começemos com o “lado fácil”:

Proposição 2.2.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico de modo que, para todos $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que, para todo $x \in F$, $f(x) = 0$ e, para todo $y \in G$, $f(y) = 1$. Então, (X, τ) é T_4 .*

Demonstração. Note que $F \subset f^{-1}[[0, \frac{1}{2}[$ e $G \subset f^{-1}][\frac{1}{2}, 1]$ e, por f ser uma função contínua, tais conjuntos são abertos e disjuntos. \square

Com este resultado, podemos mostrar facilmente a normalidade de espaços métricos:

Definição 2.2.2. Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ conjuntos não vazios. Definimos $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso $A = \{a\}$, denotamos $d(A, B) = d(a, B)$ (analogamente para $B = \{b\}$).

Exemplo 2.2.3. Sejam (X, d) espaço métrico e $A \subset X$ um conjunto não vazio. Então, a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, A)$ é contínua.

Demonstração. Seja $a \in A$ e sejam $x, y \in X$. Temos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Assim,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Analogamente, temos

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x).$$

Portanto, $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Com isso, temos que, dado $\varepsilon > 0$, para $x, y \in X$, temos que $d(x, y) < \varepsilon$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. O que mostra que tal função é contínua (ver Alongamento 2.1.17 e lembre que a métrica usual em \mathbb{R} é dada por $d(x, y) = |x - y|$). \square

Corolário 2.2.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, (X, d) é normal.*

Demonstração. T_1 é imediato (já feito).

Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Considere a função $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, F)(1 - d(x, G))}{d(x, F) + d(x, G)}.$$

Note que f satisfaz as hipóteses da Proposição 2.2.1 e portanto segue o resultado. \square

A continuidade segue da continuidade de operações básicas (exercício) e de que composta de funções contínuas é contínua.

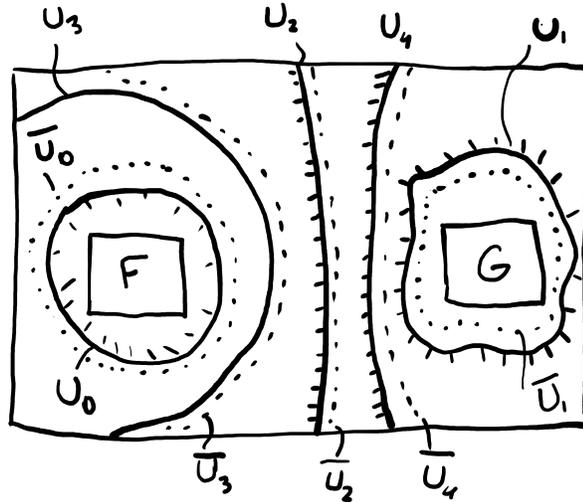


Figura 2.3: Abertos intercalados

Agora vamos provar o “lado difícil” da equivalência. Nesta demonstração usaremos muitas vezes o seguinte fato: Se (X, τ) é T_4 e F é um fechado contido num aberto A , então existe um aberto B tal que $F \subset B \subset \overline{B} \subset A$ (note que isto é, na verdade, equivalente a ser T_4 , vide o Alongamento 1.2.23).

Teorema 2.2.5 (Lema de Urysohn). *Seja (X, τ) um espaço topológico T_4 . Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que, para todo $x \in F$, $f(x) = 0$ e, para todo $x \in G$, $f(x) = 1$.*

Demonstração. Seja $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, de forma que $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ e $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$. Vamos definir por indução uma família $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos de X , de forma que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$:

- (a) $F \subset U_n \subset \overline{U_n} \subset X \setminus G$;
- (b) se $q_n < q_m$, então $\overline{U_n} \subset U_m$.

Atenção com a ordem aqui: não estamos usando a ordem dos naturais, mas sim a ordem dos racionais. Por exemplo, suponha que

$q_0 = 0$; $q_1 = 1$; $q_2 = \frac{1}{2}$,
 $q_3 = \frac{1}{3}$ e $q_4 = \frac{2}{3}$. Então teríamos que $U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_3 \subset \overline{U_3} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_4 \subset \overline{U_4} \subset U_1$

Mostremos que existe tal família.

Seja U_0 aberto tal que $F \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset X \setminus G$ (note que U_0 existe por (X, τ) ser T_4). Seja U_1 aberto tal que $\overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset X \setminus G$ (novamente, tal U_1 existe por (X, τ) ser T_4). Note que as condições (a) e (b) impostas acima estão satisfeitas.

Seja U_2 aberto tal que $\overline{U_0} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1$. Vale lembrar que o índice 2 em U_2 faz referência ao racional q_2 e que este é tal que $0 < q_2 < 1$. Em particular, U_2 satisfaz (a) e (b).

Suponha U_j definido para todo $j \leq k$, com $k \geq 2$, de forma que estejam satisfeitas as condições (a) e (b) (vamos chamar isso de “hipótese de indução” (HI)).

Seja $i \leq k$ de forma que

$$q_i = \max\{q_n : n \leq k, q_n < q_{k+1}\}.$$

Note que q_i está bem definido, devido a $q_0 = 0$. Seja $j \leq k$ de forma que

$$q_j = \min\{q_n : n \leq k, q_{k+1} < q_n\}.$$

Novamente, tal número está bem definido, devido a $q_1 = 1$.

Por HI, temos $\overline{U_i} \subset U_j$; por (X, τ) ser T_4 , podemos tomar U_{k+1} aberto tal que $\overline{U_i} \subset U_{k+1} \subset \overline{U_{k+1}} \subset U_j$. Vamos mostrar U_{k+1} satisfaz (a) e (b).

De fato, temos (a) pois

$$F \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset U_{k+1} \subset \overline{U_{k+1}} \subset U_j \subset \overline{U_j} \subset X \setminus G$$

Note que tanto a primeira quanto a última inclusão decorrem de HI.

Para a condição (b), seja $m \leq k$. Temos dois casos: $q_m < q_{k+1}$ e $q_{k+1} < q_m$. Vamos fazer o caso em que $q_{k+1} < q_m$ (o outro caso é análogo e é o Alongamento 2.2.9). Note que $q_m \geq q_j$. Temos dois subcasos aqui: se $q_m = q_j$, segue trivialmente de nossas hipóteses, já que

$$\overline{U_{k+1}} \subset U_j$$

Agora, se $q_j < q_m$, segue de (HI) que

$$\overline{U_{k+1}} \subset U_j \subset \overline{U_j} \subset U_m.$$

Agora vamos construir a função do enunciado. Seja $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \inf(\{q_n : x \in U_n\} \cup \{1\}),$$

para todo $x \in X$. Claramente, $f(x) \in [0, 1]$ para qualquer $x \in X$. Suponha que $x \in F$. Neste caso, temos por construção que $x \in U_0$ e, portanto, $f(x) = 0$. Se tivermos $x \in G$, então $x \notin U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f(x) = 1$ (note que, em ambos os casos, utilizamos a condição (a)). Resta apenas mostrar que f é contínua. Considere as seguintes afirmações sobre $\alpha \in]0, 1[$:

Fazendo o mesmo exemplo que apresentamos antes, quando $k + 1 = 2$, teríamos que $q_i = 0$ e $q_j = 1$. Já quando $k + 1 = 3$, teríamos $q_i = q_0$ e $q_j = q_2$. Os números q_i e q_j indicam o “lugar” onde U_{k+1} deve ser encaixado.

Boa parte do argumento aqui segue diretamente do fato dos U_n 's estarem encaixados na mesma ordem que os respectivos q_n 's.

- (i) $f^{-1}[[0, \alpha[$ é aberto: Seja $x \in X$ tal que $0 \leq f(x) < \alpha$. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < q_n < \alpha$. Vamos mostrar que

$$x \in U_n \subset f^{-1}[[0, \alpha[.$$

Primeiramente, note que $x \in U_n$ pois, caso contrário, teríamos que $f(x) \geq q_n$, contrariando nossa hipótese. Agora seja $y \in U_n$. Assim, $f(y) \leq q_n$ e, portanto, $f(y) \in [0, \alpha[$ como queríamos.

- (ii) $f^{-1}]]\alpha, 1]]$ é aberto: Seja $x \in X$ tal que $\alpha < f(x) \leq 1$. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < q_n < f(x) < 1$. Vamos mostrar que

$$x \in X \setminus \overline{U_n} \subset f^{-1}]]\alpha, 1]].$$

Primeiramente, note que $x \in X \setminus \overline{U_n}$. Pois, caso contrário, teríamos que $x \in \overline{U_n} \subset U_m$ para todo m tal que $q_m > q_n$. Logo, $f(x) \leq q_n$ contrariando nossa hipótese. Agora seja $y \in X \setminus \overline{U_n}$. Note que $f(y) \geq q_n$ e, portanto, $f(y) \in]q_n, 1]$ como queríamos.

Note que abertos da forma $] \alpha, \beta[$, $[0, \alpha[$, $] \beta, 1]$ formam uma base para $[0, 1]$ e que $] \alpha, \beta[= [0, \beta[\cap] \alpha, 1]$. Como $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ em geral, concluímos que a imagem inversa de um aberto de uma base fixada é aberta. Logo, f é contínua (veja o Alongamento 2.1.15). \square

Corolário 2.2.6. *Um espaço topológico (X, τ) é T_4 se, e somente se, para quaisquer fechados $F, G \subset X$ disjuntos existir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.*

Corolário 2.2.7. *Um espaço topológico (X, τ) T_1 é normal se, e somente se, para quaisquer fechados $F, G \subset X$ disjuntos existir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.*

Podemos pensar que espaços normais são aqueles em que funções contínuas separam fechados disjuntos. Ao tentarmos fazer o análogo para separação entre pontos e fechados, obtemos um novo axioma de separação:

Alguns lugares chamam um espaço completamente regular de um **espaço de Tychonoff**.

Definição 2.2.8. Dizemos que (X, τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existir $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. No caso que (X, τ) também é T_1 , dizemos que (X, τ) é um espaço **completamente regular**.

Alongamentos

Alongamento 2.2.9. Complete a demonstração do Lema de Urysohn, para o caso em que $m \leq k$ e $q_m < q_{k+1}$.

Alongamento 2.2.10. Mostre que todo espaço completamente regular é um espaço regular.

Exercícios

Exercício 2.2.11. Seja (X, d) espaço métrico. Sejam $F \subset X$ fechado. Mostre que, dado $x \in X$, $d(x, F) = 0$ se, e somente se, $x \in F$.

Exercício 2.2.12. Mostre que subespaços de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ são $T_{3\frac{1}{2}}$.

Exercício 2.2.13. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que \preceq é uma **ordem parcial** sobre X se, dados $a, b, c \in X$ temos:

- (i) $a \preceq a$;
- (ii) se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então $a = b$;
- (iii) se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então $a \preceq c$.

Mostre que a seguinte relação é uma ordem parcial sobre subconjuntos de um espaço topológico: $A \preceq B$ se, e somente se, $\overline{A} \subset B$ ou $A = B$.

Exercício 2.2.14. Considere $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ como na demonstração do Teorema 2.2.5 e \preceq como definida no exercício anterior.

- (a) Mostre que \preceq é uma **ordem total** (isto é, dados a, b , temos que $a \preceq b$ ou $b \preceq a$) sobre $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$;
- (b) Mostre que existe um **isomorfismo de ordem**¹ entre $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ com a ordem \preceq e $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ com a ordem usual.

2.3 Extensões de funções

Definição 2.3.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos. Seja $A \subset X$. Dadas $f : A \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ funções contínuas, dizemos que g é uma **extensão contínua** de f se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

¹ (X, \preceq) é isomorfo a (Y, \leq) se existe $f : X \rightarrow Y$ bijetora tal que, para todo $a, b \in X$, $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \preceq b$.

Os valores num denso determinam, no máximo, uma função contínua:

Proposição 2.3.2. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (Y, ρ) é de Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são duas funções contínuas tais que $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$, então $f = g$.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $x \in X$ tal $f(x) \neq g(x)$. Sejam A e B abertos disjuntos tais que $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Note que $f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$ é um aberto contendo x . Logo, existe $d \in f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$. Note que $f(d) = g(d) \in A \cap B$, contradição. \square

Na verdade, dada qualquer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, existe um denso $D \subset \mathbb{R}$ tal que f é contínua em tal denso [1].

Dissemos “no máximo” pois existem casos que uma função contínua num denso não admite qualquer extensão contínua:

Exemplo 2.3.3. Considere $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Note que f é contínua, \mathbb{N} é denso em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (espaço da sequência convergente) e não existe $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$ contínua que estenda f .

Note que no mesmo exemplo, temos que f está definida num aberto e não pode ser estendida continuamente ao espaço todo. Vamos agora apresentar um resultado sobre quando podemos estender uma função definida num fechado:

Teorema 2.3.4 (Teorema da Extensão de Tietze). *Seja (X, τ) um espaço T_4 . Sejam $M \subset X$ fechado e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão contínua de f .*

Note que vale a volta, isto é, se (X, τ) for um espaço topológico tal que para qualquer função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, com $M \subset X$ fechado, existir uma extensão contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, então (X, τ) é T_4 . De fato, dados $F, G \subset X$ fechados disjuntos, a função $f : F \cup G \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in F$ e $f(x) = 0$ caso $x \in G$; é contínua, donde segue que existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $g(x) = 1$ se $x \in F$ e $g(x) = 0$ caso $x \in G$; note que $g^{-1} \left] 0, \frac{1}{2} \right[\supset G$ e $g^{-1} \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\supset F$ são abertos disjuntos.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos provar alguns lemas auxiliares.

Lema 2.3.5. *Sejam (X, τ) T_4 , $M \subset X$ fechado e $f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f_0(x)| \leq c$, para todo $x \in M$ (com $c \in \mathbb{R}_{>0}$ fixado). Então existe $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que*

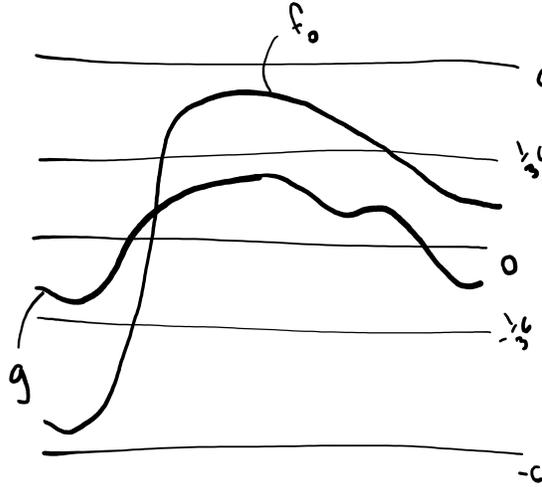


Figura 2.4: A ideia para o Lema 2.3.5

(a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$, para todo $x \in X$;

(b) $|f_0(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$, para todo $x \in M$.

Demonstração. Sejam $A = f_0^{-1} [[-c, -\frac{1}{3}c]]$ e $B = f_0^{-1} [[\frac{1}{3}c, c]]$. Note que A e B são disjuntos e fechados de M , pois são imagens inversas de fechados via função contínua. Como M é fechado em X , temos A e B são disjuntos e fechados em X .

Pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $h[A] = \{0\}$ e $h[B] = \{1\}$. Note que a função $g(x) = \frac{2}{3}c \cdot (h(x) - \frac{1}{2})$ satisfaz as condições (a) e (b) desejadas (ver Alongamento 2.3.8). \square

Lema 2.3.6. *Sejam (X, τ) T_4 , $M \subset X$ fechado e $f : M \rightarrow [-1, 1]$ contínua. Então existe $g : X \rightarrow [-1, 1]$ uma extensão contínua de f .*

Demonstração. Vamos definir $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funções contínuas de X em $[-1, 1]$ satisfazendo

(a) $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^i$, para todo $x \in X$;

(b) $\left| f(x) - \sum_{j=0}^i g_j(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i$, para todo $x \in M$.

Para definir g_0 , aplicamos o Lema 2.3.5 para f e $c = 1$ (note que tal valor de c se deve ao fato de f ser limitada por 1 pela hipótese deste lema). Suponha definidas g_0, \dots, g_i , de modo a valer (a) e (b). Vamos definir g_{i+1} .

Aplique o lema anterior para $f - \sum_{j=0}^i (g_j \upharpoonright M)$ e $c = (\frac{2}{3})^i$. Note que $f - \sum_{j=0}^i (g_j \upharpoonright M)$ é contínua (por ser soma de funções contínuas) e limitada pela constante c escolhida (pois g_0, \dots, g_i satisfazem b). É imediato verificar que g_{i+1} satisfaz (a) e (b).

Defina $g : X \rightarrow [-1, 1]$ como $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x)$, para todo $x \in X$ (note que tal definição faz sentido devido à condição (a)). Pela condição (b), temos que g estende f . Resta apenas mostrar que g é contínua.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in X$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{i+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como cada g_i é contínua, existe A_i vizinhança de x tal que para todo $y \in A_i$, $|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)}$. Seja $A = \bigcap_{i=0}^{n_0} A_i$ (note que A é vizinhança de x). Seja $y \in A$. Temos

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |g_i(x) - g_i(y)| \\
&= \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |g_i(x) - g_i(y)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (|g_i(x)| + |g_i(y)|) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^i + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^i \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^i \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{i+1} \\
&< (n_0 + 1) \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos passar à demonstração do Teorema:

Demonstração do Teorema da Extensão de Tietze (2.3.4). Note que basta mostrarmos o resultado para $f : M \rightarrow]-1, 1[$ (pois existe $\varphi :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ bijetora contínua com inversa contínua e, portanto, o argumento segue via composições adequadas - veremos mais sobre isso em 2.4.14).

Pelo Lema 2.3.6, existe $g : X \rightarrow [-1, 1]$ contínua que estende f . Seja $M' = g^{-1}[\{-1, 1\}]$. Note que M e M' são fechados disjuntos. Pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $h[M] = \{1\}$ e $h[M'] = \{0\}$. Finalmente, note que a função desejada é $F : X \rightarrow]-1, 1[$ dada por $F(x) = g(x)h(x)$. □

Exemplo 2.3.7. Considere (X, τ) como o plano de Niemytski (ver Exercício 1.3.35). Vamos mostrar que tal espaço não é normal. Faremos isso de duas maneiras (ambas usam um argumento de cardinalidade - escolha a que deixar você mais confortável).

Por ser T_1 , afirmar que X não é normal equivale a afirmar que X não é T_4 . Suponha, por absurdo, que X seja T_4 . Note primeiramente que $R = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em X e, como R é discreto, qualquer subconjunto $F \subset R$ é fechado em R e, portanto, também é fechado em X . Note que F e $R \setminus F$ são disjuntos e fechados em X . Vamos agora terminar de duas maneiras diferente:

- Aplicando o Teorema de Tietze, temos que, para cada $F \subset R$, existe $f_F : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f_F[F] = \{0\}$ e $f_F[R \setminus F] = \{1\}$. Note que, se $F \neq G$, então $f_F \neq f_G$. Logo, temos uma quantidade maior igual que $|\wp(R)|$ de funções contínuas saindo de X e chegando em \mathbb{R} . Por outro lado, seja $D \subset X$ denso enumerável. Então existem $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ funções (contínuas ou não) saindo de D e chegando em \mathbb{R} . Logo, pela Proposição 2.3.2, existem, no máximo $|\mathbb{R}|$ funções contínuas saindo de X e chegando em \mathbb{R} . Como $|\wp(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$, temos uma contradição.
- Aplicando diretamente o definição de T_4 , para cada $F \subset R$, existem abertos (em X) $A(F)$ e $B(F)$ disjuntos tais que $F \subset A(F)$ e $R \setminus F \subset B(F)$.

Isso é um fato que poder ser facilmente provado usando-se um pouco de teoria dos conjuntos.

Vamos mostrar que, se $F \neq G$, então $A(F) \neq A(G)$. Sejam $F, G \subset R$ com $F \neq G$. Sem perda de generalidade, suponha $F \setminus G \neq \emptyset$. Como $F \setminus G = F \cap (R \setminus G)$, segue que $B(G) \cap A(F) \neq \emptyset$, mas como $A(G) \cap B(G) = \emptyset$, temos necessariamente $A(F) \neq A(G)$.

Seja D denso enumerável em X . Defina $A'(F) = A(F) \cap D$ e $B'(F) = B(F) \cap D$. Por argumentação análoga à anterior, vemos que se $F \neq G$, então $A'(F) \neq A'(G)$. Assim, obtemos $\varphi : \wp(R) \rightarrow \wp(D)$ dada por $\varphi(F) = A'(F)$, uma função injetora, o que é absurdo, uma vez que $|\wp(R)| > |\wp(D)|$.

Estas duas demonstrações apresentadas aqui podem ser generalizadas pelo Lema de Jones (ver Exercício 2.3.11).

Alongamentos

Alongamento 2.3.8. Prove que a função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada na demonstração do Lema 2.3.5 satisfaz as condições (a) e (b).

Alongamento 2.3.9. Mostre o Lema de Urysohn a partir do Teorema de Tietze.

Exercícios

Exercício 2.3.10. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de \mathbb{R} tal que $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ e $x_n \neq x$ para todo n . Seja também $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de \mathbb{R} tal que $y_n \rightarrow y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$ e $f(x_n) = f(y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 2.3.11. Prove o seguinte caso particular do **Lema de Jones**: Seja (X, τ) espaço topológico separável. Se existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $|D| = \mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo), então (X, τ) não é T_4 .

2.4 Homeomorfismos

Nesta seção vamos apresentar como formalizar a ideia que dois espaços são o mesmo do ponto de vista topológico.

Definição 2.4.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo**, se f é bijetora, contínua e f^{-1} é contínua. Neste caso, dizemos que (X, τ) e (Y, σ) são **homeomorfos**.

Intuitivamente, mostrar que dois espaços dados são homeomorfos é “fácil”: É lógico que às vezes é difícil de encontrar um homeomorfismo, mas isso é outra história.

Por causa desse tipo de truque, na prática muitas vezes a situação é o inverso do que a intuição pode dizer num primeiro momento, já que em geral é muito mais fácil verificar invariantes do que construir homeomorfismos no braço.

basta exibir um homeomorfismo. Por outro lado, mostrar que dois espaços não são homeomorfos costuma ser uma tarefa mais “difícil”: precisamos mostrar que não existe um homeomorfismo. Nesse sentido, encontrar invariantes topológicos é bastante útil, já que se um dos espaços satisfaz algum invariante enquanto o outro não, já temos automaticamente a não existência de homeomorfismos.

Definição 2.4.2. Chamamos uma propriedade P de um **invariante topológico**, se ela é preservada por homeomorfismos (isto é, se (X, τ) e (Y, σ) são espaços homeomorfos, então (X, τ) tem a propriedade P se, e somente se, (Y, σ) tem).

Exemplo 2.4.3. Todos os axiomas de separação e de enumerabilidade que apresentamos são invariantes topológicos. Por exemplo, provamos no Corolário 2.1.8 que se X é separável e $f : X \rightarrow Y$ é contínua e sobrejetora, então Y também é separável. Assim, se f é um homeomorfismo entre X e Y , temos que o fato de X ser separável implica Y ser separável. Já a função

f^{-1} nos dá que Y ser separável implica que X também é. Veja também o Exercício 2.4.25.

Nem tudo que é discutido no âmbito de espaços métricos é topológico, como o próximo exemplo ilustra:

Exemplo 2.4.4. Seja o conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Sobre este conjunto podemos ter a métrica d_1 , herdada da métrica usual em \mathbb{R} e, também, podemos ter a métrica discreta d_2 , dada por

$$d_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

O espaço (X, d_1) não é completo, pois $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em (X, d_1) . Por outro lado, (X, d_2) é completo, pois com a métrica discreta, qualquer espaço é completo.

A métrica d_1 induz a topologia τ sobre X que é a topologia induzida de \mathbb{R} sobre X . Por outro lado, a métrica d_2 induz a topologia discreta σ sobre X . Note que, neste caso, $\tau = \sigma$. Portanto, a função $f : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$, dada por $f(x) = x$ é um homeomorfismo.

Logo, apesar da propriedade “ser sequência convergente” ser um invariante topológico, a propriedade “ser sequência de Cauchy” não é. Veja o Alongamento 2.4.16

Vamos terminar esta seção mostrando alguns resultados envolvendo a topologia da ordem e dando uma caracterização para o reais (a menos de homeomorfismos).

Definição 2.4.5. Seja (X, \leq) um conjunto ordenado. Dizemos que \leq é uma **ordem total** se, para todo $x, y \in X$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 2.4.6. Seja (X, \leq) um conjunto totalmente ordenado. Chamamos de **topologia da ordem** sobre (X, \leq) a topologia gerada pelos seguintes conjuntos (para todo $a, b \in X$):

- (a) $]a, b[= \{x \in X : a < x < b\}$;
- (b) $[a, b[= \{x \in X : a \leq x < b\}$, caso $a = \min X$;
- (c) $]a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$, caso $b = \max X$.

Exemplo 2.4.7. As topologias usuais sobre \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{N} e $[0, 1]$ são as topologias induzidas pelas ordens usuais dos respectivos conjuntos.

Definição 2.4.8. Sejam (X, \leq) e (Y, \preceq) espaços ordenados. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e, para todo $a, b \in X$, temos $a \leq b$ se, e somente se, $f(a) \preceq f(b)$.

Definição 2.4.9. Seja (X, \leq) um conjunto totalmente ordenado. Dizemos que \leq é uma **ordem densa** se para todo $x, y \in X$, com $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Exemplo 2.4.10. Os conjuntos \mathbb{R} , \mathbb{Q} e $[0, 1]$ têm as ordens usuais densas enquanto \mathbb{N} não tem.

Vamos apresentar uma maneira de caracterizar os reais com esta linguagem. Para isso, vamos apresentar antes outra caracterização interessante, mas esta sobre os racionais. O seguinte lema será bem útil na demonstração:

Lema 2.4.11. *Seja $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ conjunto totalmente ordenado e seja Y um conjunto totalmente ordenado com ordem densa e sem maior nem menor elemento. Dada $f : \{a_0, \dots, a_n\} \rightarrow Y$ função injetora que preserva ordem, existe $\tilde{f} : \{a_0, \dots, a_{n+1}\} \rightarrow Y$ extensão de f que é injetora e que preserva a ordem.*

Demonstração. Note que só precisamos definir $\tilde{f}(a_{n+1})$ de forma a preservar a ordem. Temos três casos. Caso 1, $a_{n+1} < a_k$ para todo $k \leq n$; caso 2, $a_{n+1} > a_k$ para todo $k \leq n$; caso 3, existem $i, j \leq n$ tais que $a_i < a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_j$. Vamos resolver o caso 3, os outros são análogos. Sja $E = \max\{a_i : a_i < a_{n+1}, i \leq n\}$ e $D = \min\{a_j : a_{n+1} < a_j, j \leq n\}$. Note que, como a ordem de Y é densa, existe $y \in]f(E), f(D)[$. Defina $\tilde{f}(a_{n+1}) = y$. \square

Note que no caso 3 usamos que Y tem ordem densa. Faça um rascunho para perceber que a não existência de máximo e mínimo são usados nos outros dois casos.

Veja o Exercício 2.4.19

Teorema 2.4.12. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo (e, portanto, homeomorfo) a \mathbb{Q} .*

Demonstração. Seja (X, \leq) como no enunciado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para X . Seja, também, $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para \mathbb{Q} . Vamos definir indutivamente $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem. Primeiramente, definimos $f(x_0) = q_0$.

Agora aplique o lema anterior para os conjuntos $\{x_0, x_1\}$ e $\mathbb{Q} \setminus \{q_0\}$. Desta forma, agora temos definidos $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Agora invertemos um pouco o papel e estendemos f^{-1} da seguinte forma: aplicamos o lema para $Im(f) \cup \{q_k\}$ e $X \setminus dom(f)$ onde $k = \min\{n : q_n \notin Im(f)\}$. Daí estendemos f^{-1} para q_k . No passo seguinte, invertemos novamente e aplicamos o lema para $dom(f) \cup \{x_k\}$ e $\mathbb{Q} \setminus Im(f)$, onde $k = \min\{n : x_n \notin dom(f)\}$ e

estendemos f para x_k . Continuamos esse processo, sempre alternando a extensão (entre f e f^{-1}).

Note que, no final, temos que a f obtida preserva ordem e é injetora. Note que ela está definida para todo x_n , já que sempre tomamos o menor índice na hora de estender f e, da mesma forma, temos que f é sobrejetora pois sempre tomamos q_n de menor índice na hora de estender f^{-1} . \square

Finalmente, a caracterização para os reais:

Teorema 2.4.13. *Todo espaço totalmente ordenado, com ordem densa, sem maior nem menor elementos, completo e separável é homeomorfo a \mathbb{R} .*

Demonstração. Seja (X, \leq) como no enunciado. Seja $D \subset X$ denso e enumerável. Vamos mostrar que D satisfaz as hipóteses do teorema anterior (Teorema 2.4.12).

Suponha por contradição que D possua maior elemento m . Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $m < x_1 < x_2$ (tais elementos existem pois X não possui maior elemento). Note que $]m, x_2[\neq \emptyset$ e $]m, x_2[\cap D = \emptyset$. Mas isso é uma contradição pois D é denso em X . Analogamente, D não tem menor elemento.

Suponha que a ordem de D não seja densa. Então, existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $d_1 < d_2$ e $]d_1, d_2[\cap D = \emptyset$. Mas, como a ordem em X é densa, $]d_1, d_2[\neq \emptyset$, o que é, novamente, uma contradição com o fato de D ser denso em X .

Desta forma, podemos tomar $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$ o isomorfismo dado pelo teorema anterior. Vamos estender f para X da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D, d \leq x\}$$

Note que, pela densidade de D , \tilde{f} preserva a ordem. Pela completude de X , temos que \tilde{f} é bijetora (veja o Exercício 2.4.18). \square

Corolário 2.4.14. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então, $]a, b[$ é homeomorfo a \mathbb{R} .*

Alongamentos

Alongamento 2.4.15. Mostre que composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.

Alongamento 2.4.16. Mostre que “ser uma sequência convergente” é um invariante topológico.

Alongamento 2.4.17. Seja $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{0\}$ com a topologia induzida por \mathbb{R} . Mostre que tal espaço e o espaço da sequência convergente (Exemplo 2.1.9) são homeomorfos.

Exercícios

Exercício 2.4.18. Mostre que a função \tilde{f} construída na demonstração de 2.4.13 é bijetora.

Exercício 2.4.19. Se X e Y são conjuntos totalmente ordenados e com a topologia da ordem, mostre que se $f : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo de ordem, então f é um homeomorfismo (quando X e Y são considerados com as topologias da ordem).

Exercício 2.4.20. Mostre que todo espaço com uma topologia da ordem sempre é de Hausdorff.

Exercício 2.4.21. Seja (X, \leq) conjunto totalmente ordenado e com a topologia da ordem. Mostre que se X tem um **ponto isolado** (x é isolado se $\{x\}$ é aberto) então \leq não é uma ordem densa. Dê um exemplo de que não vale a volta.

Exercício 2.4.22. Mostre que \mathbb{Q} e $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ são homeomorfos.

Exercício 2.4.23. Dizemos que (X, τ) é um **espaço homogêneo** se para todo $x, y \in X$, existe $f : X \rightarrow X$ homomorfismo de forma que $f(x) = y$.

- (a) Mostre que \mathbb{R} é homogêneo.
- (b) Mostre que $]a, b[$ é homogêneo.
- (c) Mostre que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como no espaço da sequência convergente (Exemplo 2.1.9) não é homogêneo.

Exercício 2.4.24. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma **função aberta** se $f[A]$ é aberto para todo A aberto em X (definimos uma **função fechada** de maneira análoga). Mostre que, se f é um homeomorfismo, então f é aberta.

Exercício 2.4.25. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, injetora e aberta. Mostre que, se \mathcal{B} é uma base em Y , então $\{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base em X .

Capítulo 3

Produto

3.1 Definição e conceitos básicos

Nesta seção, vamos apresentar como fazer o produto entre espaços topológicos. Vamos começar com o produto finito e provar algumas propriedades básicas. Depois, quando fizermos o produto geral, veremos que esses resultados são casos particulares. Mas optamos por esta ordem para acostumar o leitor com algumas notações e ideias.

Definição 3.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Definimos a **topologia produto** sobre $X \times Y$ como a topologia gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.

Observação 3.1.2. Se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bases para (X, τ) e (Y, σ) respectivamente, então $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é base para $X \times Y$ (veja o Alongamento 3.1.10).

Proposição 3.1.3. *Se (X, τ) e (Y, σ) são espaços de Hausdorff, então $X \times Y$ também é.*

Demonstração. Sejam $(a, b), (x, y) \in X \times Y$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, $x \neq a$. Então, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U$ e $a \in V$. Note que $(x, y) \in U \times Y$, $(a, b) \in V \times Y$ e tanto $U \times Y$, quanto $V \times Y$, são abertos disjuntos. \square

Proposição 3.1.4. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo (Y, σ) espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então, o gráfico de f ($G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$) é fechado em $X \times Y$.*

Demonstração. Seja $(x, y) \notin G$. Então, $y \neq f(x)$. Sejam $A, B \in \sigma$ disjuntos tais que $y \in A$ e $f(x) \in B$. Como f é contínua, seja V aberto de X tal que $x \in V$ e $f[V] \subset B$. Note que $(x, y) \in V \times A$ e $(V \times A) \cap G = \emptyset$. De fato, se $z \in V$, então $f(z) \in B$. Portanto, $f(z) \notin A$ e $(z, f(z)) \notin V \times A$. \square

Considere a função $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ dada por $\pi_X(x, y) = x$. Note que π_X é contínua ($\pi_X^{-1}[A] = A \times Y$). Esta função é chamada de **função projeção** em X . O fato de querermos que este tipo de função seja contínua motiva a definição da topologia produto em geral: faremos a “menor” topologia que faz com que estas funções sejam contínuas.

Definição 3.1.5. Seja \mathcal{F} uma família de funções da forma $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in A$, em que X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia fraca** induzida por \mathcal{F} a topologia sobre X gerada pelos conjuntos da forma $f_\alpha^{-1}[V]$, onde $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$. Note que, desta forma, cada f_α é contínua (veja o Alongamento 3.1.13).

Agora temos todo o material para definir o produto no caso geral:

Definição 3.1.6. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Defina o **produto** dos $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ como

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha\}$$

com a topologia fraca induzida pelas funções $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde cada $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ é dada por $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\alpha$ (chamamos x_α de α -ésima **coordenada** de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$).

Esta topologia é chamada de **topologia produto** sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (ou **topologia de Tychonoff**).

Observação 3.1.7. Note que tal topologia é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

onde V é um aberto de X_α . Isso é verdade pois $\pi_\alpha^{-1}[V] = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Fechando tal família por interseções finitas, temos uma base para a topologia. Ou seja, uma base para tal espaço é formada por conjuntos da forma:

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

onde $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito e cada V_α é aberto em X_α . Chamaremos tais abertos de **abertos básicos** do produto. Neste caso, também se costuma chamar de **suporte** do aberto o conjunto finito $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$.

Em geral, produto de abertos não é aberto: por exemplo, o produto $A = \prod_{n \in \mathbb{N}}]0, 1 + n[$ não é um aberto em $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. De fato, o ponto $x = (\frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}} \in A$, mas não existe um aberto básico contendo x e contido em A . Para ver isso, suponha que V seja um aberto básico tal que $x \in V \subset A$. Seja n fora do suporte de V . Note que o ponto $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ onde

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k \neq n \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é tal que $y \in V$ mas $y \notin A$.

Apesar de produto de abertos nem sempre ser aberto, o produto de fechados sempre é fechado:

Proposição 3.1.8. *Se $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família tal que cada F_α é um fechado em X_α , então $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha$. Logo, existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \notin F_\alpha$. Note que $V = \prod_{\beta \in A} V_\beta$ onde

$$V_\beta = \begin{cases} X_\alpha \setminus F_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

é um aberto tal que $x \in V$ e $V \cap \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. □

Vamos terminar esta seção mostrando como algumas propriedades de separação se comportam no produto:

Proposição 3.1.9. *Se cada X_α é T_i , então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é T_i , para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.* Discutiremos as propriedades $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_4 na próxima seção.

Demonstração. T_0 Exercício.

T_1 Pela proposição anterior e pela caracterização dos unitários serem fechados.

T_2 Sejam $x \neq y$ e $\alpha \in A$ tais que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Sejam U e V abertos disjuntos de X_α tais que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$. Note que $\prod_{\beta \in A} U_\beta$ e $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$U_\beta = \begin{cases} U & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são abertos que separam x e y .

Um dos erros mais comuns aqui é simplesmente tomar uma vizinhança fechada em cada coordenada e tomar o produto de todas elas. O problema é que, apesar disso ser fechado, não é vizinhança (lembrando que produto infinito de abertos não necessariamente é aberto).

T_3 Seja $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e seja $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ aberto básico (i.e., cada V_α é aberto em X_α e $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito). Para cada α tal que $V_\alpha \neq X_\alpha$ seja W_α aberto em X_α tal que $x_\alpha \in W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$ (usando T_3). Note que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^*$ é uma vizinhança fechada de x onde

$$W_\alpha^* = \begin{cases} \overline{W_\alpha}, & V_\alpha \neq X_\alpha \\ X_\alpha, & V_\alpha = X_\alpha \end{cases}$$

Note, também, que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^* \subset \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$.

□

Alongamentos

Alongamento 3.1.10. Sejam (X_1, τ_1) , (X_2, τ_2) espaços topológicos e sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases para eles respectivamente. Mostre que $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é uma base para $X_1 \times X_2$.

Alongamento 3.1.11. Mostre que um espaço (X, τ) é de Hausdorff se, e somente se, $D = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.

Alongamento 3.1.12. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos não vazios. Seja $y \in Y$.

(a) Mostre que (X, τ) é homeomorfo a $X \times \{y\}$;

(b) Se (Y, σ) é T_1 , mostre que $X \times \{y\}$ é fechado (em $X \times Y$).

Alongamento 3.1.13. Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de funções da forma $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$. Mostre que a topologia fraca em X induzida por tal família é a menor topologia sobre X tal que cada f_α é contínua.

Exercícios

Exercício 3.1.14. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ família de espaços topológicos. Para cada $\alpha \in A$, seja $B_\alpha \subset X_\alpha$. Mostre que $\overline{\prod_{\alpha \in A} B_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha}$.

Exercício 3.1.15. Sejam (X_1, d_1) e (Y_1, d_1) espaços métricos.

- (a) Mostre que $d_E : (X_1 \times X_2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica euclidiana**). O melhor para fazer esse exercício é olhar os exercícios extras abaixo.
- (b) Mostre que $d_T : (X_1 \times X_2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do taxista**).
- (c) Mostre que $d_M : (X_1 \times X_2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do máximo**).
- (d) Mostre que todas as métricas dos itens anteriores induzem a topologia do produto entre $X_1 \times X_2$ (e, portanto, são todas equivalentes).

Exercícios extras

Definição 3.1.16. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Chamos uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de um **produto interno** se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

Vamos apresentar aqui o conceito de norma que, em particular, ajuda a provar que a métrica euclidiana é de fato uma métrica.

- (a) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$;
- (b) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$;
- (c) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$;
- (d) $\langle a, a \rangle > 0$ se $a \neq 0$

Exercício 3.1.17. Mostre que $\langle (a, b), (x, y) \rangle = ax + by$ é um produto interno em \mathbb{R}^2 . Este é o produto interno usual de \mathbb{R}^2 .

Exercício 3.1.18. Seja V espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $a, b \in V$.

- (a) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle a, b - \lambda a \rangle = 0$, onde $\lambda = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle}$.
- (b) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b \rangle = \langle b - \lambda a, b - \lambda a \rangle + \lambda^2 \langle a, a \rangle$, onde λ é o mesmo acima.

- (c) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b \rangle \geq \frac{\langle a, b \rangle^2}{\langle a, a \rangle}$.
- (d) Mostre que $\langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$. Esta é a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Definição 3.1.19. Dado um espaço vetorial V sobre \mathbb{R} , dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$;
- (b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;
- (c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercício 3.1.20. Seja V espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que a função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ é uma norma sobre V . Chamamos tal norma de norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercício 3.1.21. Dada uma $\|\cdot\|$, mostre que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica. Esta é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exercício 3.1.22. Mostre que a métrica euclidiana em \mathbb{R}^2 é a métrica induzida pela norma induzida pelo produto interno usual de \mathbb{R}^2 .

3.2 Algumas propriedades sobre produtos

Vamos começar esta seção provando que os axiomas de enumerabilidade são preservados por produtos enumeráveis. Alguns destes resultados podem ser melhorados - veja a seção de exercícios extras abaixo.

Proposição 3.2.1. *Seja $((X_n, \tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ família de espaços que satisfazem o i -ésimo axioma de enumerabilidade. Então, $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ também satisfaz o i -ésimo axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. • Primeiro axioma de enumerabilidade (base locais enumeráveis): seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Seja, também, \mathcal{V}_n base local enumerável para cada x_n . Sem perda de generalidade, suponha que $X_n \in \mathcal{V}_n$. Note que

$$\left\{ \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n : V_n \in \mathcal{V}_n, \{m \in \mathbb{N} : V_m \neq X_m\} \text{ é finito} \right\}$$

é enumerável¹ e é uma base local para x . De fato, seja $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ aberto básico tal que $x \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \neq X_n$, seja $V_n \in \mathcal{V}_n$ de forma que $x_n \in V_n \subset A_n$ (existe pois \mathcal{V}_n é base local para x_n). Para n tal que $A_n = X_n$, defina $V_n = X_n$. Note que

$$x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

- Segundo axioma de enumerabilidade (base enumerável): análogo (veja Alongamento 3.2.15).
- Terceiro axioma de enumerabilidade (separabilidade): para cada $n \in \mathbb{N}$, seja D_n denso enumerável em X_n . Fixe $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Defina

$$D = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists F \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que, para todo } n \in F, y_n \in D_n \text{ e, para todo } n \notin F, y_n = x_n\}.$$

Note que D é enumerável. Seja $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$ aberto básico não vazio. Seja $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que, para $n \notin F$, $V_n = X_n$. Para cada $n \in F$, seja $y_n \in V_n \cap D_n$. Note que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D \cap \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$, onde $y_n = x_n$, para $n \notin F$. □

O próximo resultado é um bom teste para verificação de continuidade de uma função:

Teorema 3.2.2. *Seja $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $\alpha \in A$, $\pi_\alpha \circ f$ é contínua.*

Um bom teste para ver se você está entendendo é ver quem são o domínio e o

Demonstração. Se f é contínua, então $\pi_\alpha \circ f$ é contínua (composta de contínuas). Por outro lado, seja $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ um aberto básico e $F = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ (note que F é finito). Temos assim

contra domínio de cada $\pi_\alpha \circ f$.

$$\begin{aligned} f^{-1}[V] &= f^{-1} \left[\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \right] \\ &= \bigcap_{\alpha \in F} (\pi_\alpha \circ f)^{-1}[V_\alpha]. \end{aligned}$$

Note que o último termo é aberto pois é interseção finita de abertos. □

¹Note que a quantidade de conjuntos finitos de \mathbb{N} é enumerável e que, para cada F finito fixado, só existe uma quantidade enumerável de possibilidades de abertos.

Observação 3.2.3. Note que o uso do resultado anterior muitas vezes se dá nesta forma:

$f(x)$ dada por $(f_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ é contínua se, e somente se, cada f_α é contínua.

Vejam agora o comportamento dos últimos axiomas de separação com relação ao produto, começando com a propriedade $T_{3\frac{1}{2}}$, que é preservada:

Proposição 3.2.4. *Se cada (X_α, τ_α) é $T_{3\frac{1}{2}}$, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e $F \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ fechado tal que $x \notin F$. Seja $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ um aberto básico tal que $x \in V$ e $V \cap F = \emptyset$. Seja $G = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in G$, seja $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ e $f_\alpha[X_\alpha \setminus V_\alpha] = \{1\}$ (estamos usando $T_{3\frac{1}{2}}$ nas coordenadas).

Considere $f : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(y) = \max\{f_\alpha(y_\alpha) : \alpha \in G\}$. Note que $f(x) = 0$. Além disso, $f[F] = \{1\}$, pois se $y \in F$, então existe α tal que $y_\alpha \notin V_\alpha$, com $\alpha \in G$ (caso contrário, teríamos $V \cap F \neq \emptyset$) e, portanto, $f_\alpha(y_\alpha) = 1$. Resta provar que f é contínua. De fato, para cada $\alpha \in G$, defina $g_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. Note que cada g_α é contínua (pois é composta de contínuas) e também que $f(x) = \max\{g_\alpha(x) : \alpha \in G\}$. Assim, f é contínua (ver Alongamento 3.2.13). \square

Agora veremos que a propriedade T_4 não é preservada:

Proposição 3.2.5. $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é um espaço normal, onde \mathbb{R}_S é a reta de Sorgenfrey. Em particular, produto de espaços normais não é necessariamente normal.

Demonstração. Considere \mathbb{R}_S . Como já vimos, \mathbb{R}_S é normal. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Considere $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$. Note que D é discreto e fechado: os conjuntos da forma $[x, x+1[\cap [-x, -x+1[\cap D = \{(x, -x)\}$ são abertos, donde segue que D é discreto; para verificar que é fechado, basta notar que seu complementar é aberto (Exercício 3.2.14).

Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é separável. Logo, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um denso enumerável e um discreto fechado de tamanho contínuo. Logo, pelo Lema de Jones (Exercício 2.3.11), $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. \square

Vamos agora caminhar para um teorema que iremos usar diversas vezes no texto: o Teorema da Imersão.

Definição 3.2.6. Sejam $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos, (X, τ) um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$. Chamamos de **função diagonal** a função

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : X &\rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \\ x &\mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha \in A} \end{aligned}$$

Observação 3.2.7. Se cada f_α é contínua, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é contínua (por 3.2.2).

Veremos agora condições para que exista uma cópia de X dentro de um produto. Depois, veremos que tal produto tem boas propriedades, sendo algumas hereditárias - o que vai permitir concluir novas propriedades sobre o próprio X .

Definição 3.2.8. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é uma **imersão** se $f : X \rightarrow f[X]$ é um homeomorfismo. Dizemos neste caso que Y contém uma **cópia** de X (como subespaço).

Definição 3.2.9. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dizemos que \mathcal{F} **separa pontos** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Dizemos que \mathcal{F} **separa pontos de fechados** se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f[F]}$.

Teorema 3.2.10 (Teorema da imersão). *Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ família de funções contínuas. Se \mathcal{F} separa pontos, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é injetora. Se, além disso, \mathcal{F} separa pontos de fechados, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é uma imersão.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$, distintos. Então existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$. Então

$$(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x))_\beta \neq (\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(y))_\beta$$

pois $(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x))_\beta = f_\beta(x)$ e $(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(y))_\beta = f_\beta(y)$.

Já temos que a aplicação é contínua pela Observação 3.2.7. Do parágrafo acima, $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é injetora. Resta mostrar que $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F]$ é fechado (na imagem) para todo $F \subset X$ fechado (pois disso segue que sua “inversa” é contínua).

Sejam $z \in \overline{\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F]} \cap \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[X]$ e $x \in X$ tais que $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = z$. Vamos mostrar que $x \in F$ (e, portanto, que $z \in \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F]$). Suponha que não. Logo existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \notin \overline{f_\beta[F]}$ (pois tal família separa pontos de fechados). Seja $V_\beta \subset X_\beta$ aberto tal que $f_\beta(x) \in V_\beta$ e $V_\beta \cap \overline{f_\beta[F]} = \emptyset$.

Para todo $\alpha \in A$, com $\alpha \neq \beta$, denote $V_\alpha = X_\alpha$. Seja $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$. Note que $z \in V$, pois $z_\beta = f_\beta(x) \in V_\beta$. Note que $V \cap \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F] = \emptyset$, pois $V_\beta \cap f_\beta[F] = \emptyset$. Logo $z \notin \overline{\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F]}$, contradição. \square

Já vamos mostrar uma aplicação importante (e um pouco surpreendente) de tal teorema:

Proposição 3.2.11. *Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Então $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ é contínua}\}$ separa pontos de fechados.*

Demonstração. Decorre diretamente da forma como construímos \mathcal{F} e do fato de X ser completamente regular. \square

O fato de podermos “colocar” X dentro de um espaço desta forma terá muitas consequências interessantes.

Corolário 3.2.12. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe A tal que (X, τ) é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A} [0, 1]$.*

Demonstração. Como $[0, 1]$ é completamente regular, $\prod_{\alpha \in A} [0, 1]$ é completamente regular e, portanto, qualquer um de seus subespaços também é. Reciprocamente, se (X, τ) for completamente regular, basta indexar $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ é contínua}\}$. Assim, o resultado segue pelo Teorema da Imersão. \square

Alongamentos

Alongamento 3.2.13. Mostre que, se $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $g(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ é contínua (isso termina a demonstração da Proposição 3.2.4).

Alongamento 3.2.14. Mostre que o conjunto D construído na demonstração da Proposição 3.2.5 é fechado.

Alongamento 3.2.15. Mostre que, se cada $(X_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem base enumerável, então $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ também tem base enumerável.

Alongamento 3.2.16. Mostre diretamente que se (X, τ) e (Y, σ) são separáveis, então $X \times Y$ é separável.

Exercícios

Exercício 3.2.17. Considere $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ espaços métricos. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada d_n é limitada por 1 (ver o Exercício 1.1.68).

- (a) Mostre que $d : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sup\{d_n(x(n), y(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma métrica sobre $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Esta é chamada de **métrica produto**.
- (b) Mostre que não necessariamente a topologia induzida pela métrica produto é a mesma que a topologia produto (induzida pela topologia de cada uma das coordenadas). Uma delas tem mais abertos que a outra. Qual?
- (c) Mostre que se o produto tiver apenas finitas coordenadas, ambas topologias coincidem.

Exercício 3.2.18. O objetivo deste exercício é mostrar que \mathbb{R}_S (reta de Sorgenfrey) não tem base enumerável de uma maneira alternativa.

- (a) Suponha que \mathbb{R}_S tem base enumerável. Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ também tem.
- (b) Considere D o conjunto determinado em 3.2.5. Note que tal conjunto não tem base enumerável.
- (c) Lembre que subespaço de conjunto com base enumerável também tem base enumerável. Chegue numa contradição.

Exercício 3.2.19. Mostre que se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família não enumerável tal que cada X_i tem pelo menos dois pontos, então todo G_δ não vazio em $\prod_{i \in I} X_i$ tem pelo menos dois pontos.

3.3 Exercícios extras

Exercício 3.3.1. O objetivo deste exercício é mostrar que $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$ é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$ (\mathbb{N} com a topologia usual).

- (a) Note que podemos supor sem perda de generalidade que $A \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{]p, q[\cap A : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Note que \mathcal{B}_0 é enumerável.
- (b) Para cada $n > 0$, defina \mathcal{B}_n o conjunto de todos os subconjuntos de \mathcal{B}_0 com exatamente n elementos e que sejam 2-2 disjuntos. Note que cada \mathcal{B}_n é enumerável (use o fato que a quantidade de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável).
- (c) Fixe $n \geq 1$. Para cada $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ e cada $\{J_1, \dots, J_n\} \in \mathcal{B}_n$ (vamos supor que $J_i < J_j$ se $i < j$ Isto é, todo elemento de J_i é menor que todo

Aqui vamos apresentar o resultado que mostra que a separabilidade ainda é preservada, mesmo com produtos de comprimento contínuo. Nestes exercícios, vamos usar um pouco mais de argumentos de teoria dos conjuntos do que o usual neste texto.

elemento de J_j). Defina $f_{(a_1, \dots, a_n), \{J_1, \dots, J_n\}} : A \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$f_{(a_1, \dots, a_n), \{J_1, \dots, J_n\}}(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{se } \alpha \in J_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que o conjunto de todas estas funções é enumerável (com n fixado). Seja D o conjunto de todas essas funções (com n variando). Note que D também é enumerável.

- (d) Note que $D \subset \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.
 (e) Mostre que D é denso em $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

Exercício 3.3.2. O objetivo deste exercício é mostrar que se cada (X_α, τ_α) é separável, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ também é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$.

- (a) Fixe $D_\alpha \subset X_\alpha$ denso enumerável em cada X_α . Mostre que $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$;
 (b) Para cada $\alpha \in A$, seja $\varphi_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow D_\alpha$ bijetora. Note que cada φ_α é contínua.
 (c) Defina $f : \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N} \rightarrow \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$. Mostre que f é contínua.
 (d) Conclua que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é separável.

Capítulo 4

Compactos

4.1 Definição e propriedades básicas

Uma das propriedades topológicas mais importantes é a compacidade:

Definição 4.1.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que \mathcal{A} é uma **cobertura** (ou **recobrimento**) de X se $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Neste caso, chamamos \mathcal{A} de **cobertura aberta** se os elementos de \mathcal{A} são abertos.

Definição 4.1.2. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço compacto** se para toda cobertura aberta \mathcal{A} de X existe uma **subcobertura** \mathcal{A}' (i.e., $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X$) finita.

Exemplo 4.1.3. Qualquer espaço finito é compacto.

Antes de darmos exemplos mais interessantes, vamos provar o fato bastante útil que para testar compacidade, é suficiente testar coberturas por abertos básicos:

Na verdade, veremos na próxima seção que é suficiente testar ainda menos coberturas.

Proposição 4.1.4. *É equivalente a ser compacto: “toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita”.*

Demonstração. Que compacto implica tal propriedade é imediato.

Por outro lado, seja \mathcal{B} uma base para (X, τ) e seja \mathcal{A} cobertura aberta para X . Para cada $x \in X$, existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_x$. Para cada x , seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A_x$. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{x_i} = X$ (aqui, usamos o fato que $\{B_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos básicos). Note que $\bigcup_{i=1}^n A_{x_i} = X$ (pois cada $A_{x_i} \supset B_{x_i}$). \square

Um exemplo de um compacto bastante importante é o intervalo $[0, 1]$. Como consequência de que este espaço é compacto, obteremos diversos outros exemplos posteriormente.

Exemplo 4.1.5. Com a topologia usual, $[0, 1]$ é compacto.

De fato, seja \mathcal{A} uma cobertura aberta para $[0, 1]$ formada por abertos básicos (intervalos). Sejam

$$C = \{x \in [0, 1] : \exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ finito, com } \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset [0, x]\}$$

$$\alpha = \sup C$$

Tal supremo está bem definido já que $0 \in C$ e por C ser limitado por 1. Vamos mostrar que $\alpha = 1$. Suponha que não. Ou seja, $\alpha < 1$. Seja $]a, b[\subset A \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha \in]a, b[$. Como α é supremo, existe $\beta \in]a, b[\cap C$. Logo, existe uma subcobertura finita \mathcal{A}' para $[0, \beta]$. Note que $\mathcal{A}' \cup \{A\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, o que contraria a escolha de α , pois $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$. Logo, $\alpha = 1$.

Seja $]a, 1] \in \mathcal{A}$ (existe pois 1 é coberto por algum elemento de \mathcal{A}). Como $\alpha = \sup C$, existe $\beta \in]a, 1] \cap C$. Isto é, existe subcobertura finita \mathcal{A}' para $[0, \beta]$. Note que $\mathcal{A}' \cup \{A\}$ é subcobertura finita para $[0, 1]$.

Ao contrário do intervalo $[0, 1]$ ser compacto, a reta toda não é.

Exemplo 4.1.6. Com a topologia usual, \mathbb{R} não é compacto. Para ver isso, basta tomar a cobertura $\{]-n, n[: n \in \mathbb{N}\}$.

Como verificar a compacidade pela definição muitas vezes é trabalhoso, o seguinte resultado é bem prático:

Proposição 4.1.7. *Seja (X, τ) espaço compacto e seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta para F e, para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Seja $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Note que $\mathcal{A}^* \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta para X . Como X é compacto, tal cobertura admite subcobertura finita \mathcal{B} . Note, também, que $\mathcal{B} \setminus \{X \setminus F\}$ induz uma subcobertura finita de \mathcal{A} . \square

Se um espaço é de Hausdorff, ele separa pontos de compactos (vamos ver que dá para melhorar ainda mais esse resultado depois).

Lema 4.1.8. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subset X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem A e B abertos tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $y \in K$, sejam A_y e B_y abertos tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem $y_1, \dots, y_n \in K$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset K$. Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Note que ambos são abertos, $x \in A$ e $F \subset B$. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $z \in A \cap B$. Seja i tal que $z \in B_{y_i}$. Note que, assim, $z \in A_{y_i}$, que é contradição com o fato que $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$. \square

Uma implicação do resultado anterior é que em espaços de Hausdorff, os compactos são fechados:

Proposição 4.1.9. *Sejam (X, τ) espaço de Hausdorff e $F \subset X$ compacto. Então F é fechado.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se $x \notin F$, existe A aberto tal que $x \in A \subset X \setminus F$. \square

Juntamente com o que tínhamos antes, temos que em compactos de Hausdorff, os fechados são exatamente os compactos:

Corolário 4.1.10. *Sejam (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff e $F \subset X$ um conjunto. Então, F é fechado se, e somente se, F é compacto.*

Vamos ver que, na verdade, espaços Hausdorff separam compactos disjuntos.

Proposição 4.1.11. *Seja (X, τ) espaço Hausdorff. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.*

Demonstração. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Pelo Lema 4.1.8, para cada $y \in G$, existem A_y, B_y abertos tais que $A_y \supset F$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto, existem $y_1, y_2, \dots, y_n \in G$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset G$. Sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Note que A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. \square

Com isso, temos que em espaços compactos, basta a propriedade de Hausdorff para termos a normalidade:

Proposição 4.1.12. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar o resultado anterior. \square

Outro resultado importante sobre a compacidade é que ela é preservada pela continuidade:

Proposição 4.1.13. *Sejam (X, τ) , (Y, σ) espaços topológicos onde X é compacto e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora. Então Y é compacto.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma cobertura aberta para Y . Note que $\mathcal{B} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$ é uma cobertura aberta para X . Então, existe \mathcal{B}' subcobertura finita. Assim, se para cada $B \in \mathcal{B}'$ tomamos $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B = f^{-1}[A_B]$, temos que $\{A_B \in \mathcal{A} : B \in \mathcal{B}'\}$ é uma subcobertura finita para Y . \square

Corolário 4.1.14. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo Y espaço de Hausdorff, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se $F \subset X$ é compacto, então $f[F]$ é fechado.*

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior e da Proposição 4.1.9. \square

Corolário 4.1.15. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços de Hausdorff, sendo X compacto, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta usar o resultado que se imagem inversa de fechado é fechado, então a função é contínua (Alongamento 2.1.14). \square

Vamos agora olhar para uma versão local da compacidade:

Definição 4.1.16. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é **localmente compacto** se todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Para espaços de Hausdorff, a propriedade global implica na local:

Proposição 4.1.17. *Se (X, τ) é um espaço compacto de Hausdorff, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Note que X é regular. Portanto, todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, logo, compactas. \square

Já a propriedade local não implica na global:

Exemplo 4.1.18. Com a topologia usual, \mathbb{R} é localmente compacto, pois cada $[a, b]$ é compacto (ver Alongamento 4.1.27).

Vimos que, para espaços de Hausdorff, a compacidade implica na normalidade. Para espaços localmente compactos, conseguimos garantir a propriedade de ser completamente regular:

Proposição 4.1.19. *Seja (X, τ) um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então (X, τ) é completamente regular.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $x \in X \setminus F$, que é aberto. Logo, existe V vizinhança compacta de x , tal que $V \subset X \setminus F$. Seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $V \setminus A$ é fechado (em V). Como V é compacto, V é completamente regular (pois é normal). Então existe $g : V \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $g[V \setminus A] = \{1\}$. Defina $f : X \rightarrow [0, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in V \\ 1, & x \notin V \end{cases}$$

Note que f é a função desejada (veja Alongamento 4.1.25). \square

Alongamentos

Alongamento 4.1.20. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja \mathcal{B} uma base para (X, τ) . Mostre que \mathcal{B} é um recobrimento aberto para (X, τ) .

Alongamento 4.1.21. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é compacta.

Alongamento 4.1.22. Caracterize os compactos discretos.

Alongamento 4.1.23. Dizemos que uma família de subconjuntos \mathcal{F} satisfaz a **propriedade da intersecção finita (p.i.f.)** se, para todo $F \subset \mathcal{F}$ finito, temos que $\bigcap_{G \in F} G \neq \emptyset$. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que “ X ser compacto” é equivalente a “toda \mathcal{F} família de fechados de X com p.i.f., é tal que $\bigcap_{G \in \mathcal{F}} G \neq \emptyset$ ”.

Alongamento 4.1.24. Seja (X, τ) espaço compacto. Seja (Y, σ) espaço de Hausdorff tal que $Y \supset X$. Mostre que X é fechado em Y .

Alongamento 4.1.25. Mostre que a função f da Proposição 4.1.19 é a função desejada.

Alongamento 4.1.26. Mostre que compacidade é um invariante topológico (isto é, é preservada via homeomorfismos).

Alongamento 4.1.27. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $[a, b]$ é compacto (na topologia usual).

Alongamento 4.1.28. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Mostre que (X, τ) é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e \bar{V} é compacto.

Exercícios

Exercício 4.1.29. Mostre que $[0, 1]$ não é homeomorfo a \mathbb{R} .

Exercício 4.1.30. Seja (X, d) espaço métrico. Mostre que se $F \subset X$ é compacto, então F é fechado e limitado (um conjunto A é dito **limitado** se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $A \subset B_r(x)$ para algum $x \in X$).

Exercício 4.1.31. Seja (X, τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existe \mathcal{V} sistema fundamental de vizinhanças para x tal que \bar{V} é compacto para cada $V \in \mathcal{V}$.

Exercício 4.1.32. Seja (X, τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, para todo $x \in X$ existe K vizinhança compacta de x .

Exercício 4.1.33. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Dizemos que (Y, σ) espaço de Hausdorff é uma **compactificação** de X se X é um subespaço denso de Y e (Y, σ) é compacto. Dizemos que uma compactificação (Y, σ) é uma **compactificação de Alexandroff** se $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$.

- (a) Seja (X, τ) espaço topológico de Hausdorff que admite uma compactificação. Mostre que (X, τ) é completamente regular.
- (b) Considere (X, τ) espaço localmente compacto. Defina $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$. Defina σ topologia sobre Y de forma que $\tau \subset \sigma$ e todo $\{x\} \cup (X \setminus K) \in \sigma$ onde $K \subset X$ é compacto. Mostre que (Y, σ) é uma compactificação de Alexandroff de X .
- (c) Seja (X, τ) espaço de Hausdorff e suponha que exista (Y, σ) compactificação de Alexandroff para X . Mostre que (X, τ) é localmente compacto.
- (d) Conclua que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, admite uma compactificação de Alexandroff.

4.2 Teorema de Tychonoff

Nesta seção, vamos apresentar o resultado que diz que produto de compactos é compacto. Para isso, o conceito de sub-base será útil:

Definição 4.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que \mathcal{B} é uma **sub-base** para X se $\{B_1 \cap \dots \cap B_n : B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para X .

Uma sub-base é algo que, se fecharmos por intersecções finitas, vira uma base

Proposição 4.2.2 (Lema da sub-base de Alexander). *Sejam (X, τ) espaço topológico e \mathcal{B} uma sub-base para X . Se toda cobertura para X feita por elementos de \mathcal{B} admite subcobertura finita, então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que X não seja compacto. Considere \mathcal{C} a família de todas as coberturas abertas para X que não possuam subcobertura finita. Note que, se $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ é uma cadeia em \mathcal{C} , então $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S \in \mathcal{C}$ (ver Alongamento 4.2.7). Desta forma, pelo Lema de Zorn, podemos tomar $C \in \mathcal{C}$ elemento maximal. Vamos provar que $C \cap \mathcal{B}$ é uma cobertura para X . Note que isso é uma contradição, já que, desta forma, C admite subcobertura finita e portanto não pertence a \mathcal{C} .

Suponha que $C \cap \mathcal{B}$ não seja uma cobertura. Então existe $x \in X$ tal que $x \notin B$ para todo $B \in C \cap \mathcal{B}$. Mas, como C é cobertura, existe $A \in C$ tal que $x \in A$. Como \mathcal{B} é sub-base, existem $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ tais que

$$x \in B_1 \cap \dots \cap B_n \subset A.$$

Como x não é coberto por $C \cap \mathcal{B}$, temos que cada $B_i \notin C \cap \mathcal{B}$. Ou seja, cada $B_i \notin C$. Pela maximalidade de \mathcal{C} , temos que, para cada $i = 1, \dots, n$, $C \cup \{B_i\}$ admite subcobertura finita, digamos $\{B_i\} \cup C_i$, onde $C_i \subset C$ é finito. Vamos mostrar que $\{A\} \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ é uma cobertura para X (o que é uma contradição, já que tal família seria uma subcobertura finita de C). De fato, temos

$$\begin{aligned} A \cup \bigcup_{i=1}^n C_i &\supseteq \bigcap_{i=1}^n B_i \cup \bigcup_{i=1}^n C_i \\ &\supseteq \bigcap_{i=1}^n B_i \cup A \\ &= X \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.3 (de Tychonoff). *Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ família de espaços compactos. Então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é compacto.*

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que toda cobertura C para $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ feita por abertos da forma $\pi_\alpha^{-1}[V]$ onde V é aberto em X_α , admite subcobertura finita.

Para cada α , seja

$$C_\alpha = \{V \in \tau_\alpha : \pi_\alpha^{-1}[V] \in C\}.$$

Vamos mostrar que existe $\alpha \in A$ tal que C_α é uma cobertura para X_α . Suponha que não. Então para cada $\alpha \in A$, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup C_\alpha$. Note que $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \notin \bigcup C$, contradição.

Seja $\beta \in A$ tal que C_β é cobertura para X_β . Como X_β é compacto, existem $V_1, \dots, V_n \in C_\beta$ tais que $X_\beta = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Note que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{i=1}^n \pi_\beta^{-1}[V_i]$. Como cada $\pi_\beta^{-1}[V_i] \in C$, obtemos o resultado. \square

Com este resultado, podemos caracterizar a topologia produto de uma maneira um tanto quanto inesperada:

Proposição 4.2.4. *Seja (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre X . Então, (X, τ) não é compacto.*

Demonstração. Seja $A \in \sigma \setminus \tau$. Então, $X \setminus A$ não é fechado em (X, τ) . Logo, $X \setminus A$ não é compacto em (X, τ) . Seja \mathcal{C} cobertura (em τ) para $X \setminus A$ que não admite subcobertura finita.

Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em σ) sem subcobertura finita. Logo, (X, σ) não é compacto. \square

Teorema 4.2.5. *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

Demonstração. Seja τ a topologia produto e σ uma topologia satisfazendo o enunciado. Pela definição de τ , se σ é tal que as projeções são contínuas, então $\tau \subset \sigma$. Por outro lado, se $\tau \subsetneq \sigma$, pelo resultado anterior, o produto não é compacto. Logo, $\tau = \sigma$. \square

Também conseguimos uma caracterização para os espaços completamente regulares:

Proposição 4.2.6. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe (Y, σ) compacto de Hausdorff tal que $X \subset Y$.*

Demonstração. Se existe tal Y , então Y é normal e, portanto, X é completamente regular. Por outro lado, se X é completamente regular, temos que X é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha \in A} [0, 1]$ (ver Corolário 3.2.12) que é compacto. \square

Alongamentos

Alongamento 4.2.7. Mostre que se \mathcal{S} é uma cadeia de coberturas para um espaço, cada uma delas sem subcobertura finita, então $\bigcup \mathcal{S}$ também é uma cobertura sem subcobertura finita.

Alongamento 4.2.8. Mostre a volta do Teorema de Tychonoff: Se $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$ é compacto, então cada X_α é compacto.

Exercícios

Exercício 4.2.9. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Chamamos de **topologia da caixa** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ onde cada V_α é aberto em X_α .

Aqui deixamos de pedir que o suporte dos abertos básicos seja finito.

- (a) Mostre que a topologia da caixa contém a topologia produto.
- (b) Considere $\{0, 1\}$ com a topologia discreta. Note que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ é compacto com a topologia produto. Mostre que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ é discreto (e infinito) com a topologia da caixa (e, portanto, não é compacto).

Exercício 4.2.10. Considere \mathbb{R}_S a reta de Sorgenfrey.

- (a) Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é completamente regular mas não é normal.
- (b) Mostre que existe K compacto de Hausdorff tal que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S \subset K$.
- (c) Conclua que nem todo subespaço de espaço normal é normal.
- (d) Generalize o resultado anterior: Todo espaço completamente regular que não é normal gera um exemplo de espaço normal com um subespaço não normal.

Exercícios extras

Vamos apresentar uma demonstração alternativa para o Teorema de Tychonoff. O roteiro dela é o seguinte: caracterizamos a compacidade em termos de ultrafiltros e depois provamos a caracterização no produto, usando que ela vale em cada coordenada.

Definição 4.2.11. Seja X um conjunto. Dizemos que $F \subset \wp(X)$ é um **filtro** sobre X se

- (a) $\emptyset \notin F$ (condição de não trivialidade);

- (b) se $a, b \in F$, então $a \cap b \in F$;
 (c) se $a \in F$ e $b \supset a$, então $b \in F$.

Dizemos que F é um **ultrafiltro** se F é maximal (i.e., se $G \supset F$ é um filtro, então $G = F$).

Exercício 4.2.12.). Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : A \text{ é vizinhança de } x\}$ é um filtro sobre x .

Exercício 4.2.13. Seja X um conjunto e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro.

Exercício 4.2.14. Sejam $X \neq \emptyset$ e $F \subset \wp(X)$ com a propriedade da intersecção finita. Mostre que

$$F' = \{A \subset X : \exists B_1, \dots, B_n \in F, \bigcap_{i=1}^n B_i \subset A\}$$

é um filtro sobre X (o chamamos de **filtro gerado** por F).

Exercício 4.2.15. Seja F um ultrafiltro e seja $Y \notin F$. Mostre que existe $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.

Exercício 4.2.16. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X . Mostre que são equivalentes:

- (i) F é ultrafiltro;
 (ii) para todo $Y \subset X$, temos que $Y \in F$ ou $X \setminus Y \in F$.

Exercício 4.2.17. Seja (X, τ) infinito. Considere $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \setminus F \text{ é finito}\}$.

- (a) Mostre que \mathcal{F} satisfaz a p.i.f.
 (b) Mostre que qualquer $G \subset \mathcal{F}$ ultrafiltro não é da forma $\{A \subset X : x \in A\}$ para algum $x \in X$. Note que, de fato, existe algum $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercício 4.2.18. Sejam X um conjunto não vazio e \mathcal{F} uma cadeia de subconjuntos de X , cada um deles com a propriedade da intersecção finita. Então, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ tem a propriedade da intersecção finita. (\mathcal{F} é uma cadeia se para todo $A, B \in \mathcal{F}$ temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.)

Exercício 4.2.19. Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X . Então, existe $G \supset F$ que é ultrafiltro sobre X .

Definição 4.2.20. Sejam (X, τ) um espaço topológico e F um filtro sobre X . Dizemos que $x \in X$ é um **ponto aderente** a F se, para todo $A \in F$, temos $x \in \overline{A}$.

Dizemos que F **converge** para x se, para toda vizinhança de x , temos que $V \in F$. (Notação: $F \rightarrow x$.)

Exercício 4.2.21. Mostre que se (X, τ) é de Hausdorff, então cada ultrafiltro sobre X converge para, no máximo, um ponto.

Exercício 4.2.22. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são equivalentes:

- (i) (X, τ) é compacto;
- (ii) Todo filtro sobre X tem ponto aderente;
- (iii) Todo ultrafiltro sobre X converge.

Exercício 4.2.23. Seja \mathcal{F} um ultrafiltro sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

- (a) Mostre que, se $F \in \mathcal{F}$, então $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[F]] \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in A$.
- (b) Mostre que, para todo $\alpha \in A$, $\{\pi_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é ultrafiltro sobre X_α .

Exercício 4.2.24 (Teorema de Tychonoff). Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então, $X = \prod X_\alpha$ é compacto.

4.3 Algumas aplicações

Nesta seção vamos trabalhar com um conceito que é usado muitas vezes com a compacidade:

Definição 4.3.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A , então $x \in \overline{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (veja o Alongamento 4.3.14).

Proposição 4.3.2. *Seja (X, τ) espaço T_1 . Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.*

Demonstração. Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \setminus (V \cap (A \setminus \{x\}))$ um aberto tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A . \square

A compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos:

Proposição 4.3.3. *Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A . Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, \dots, x_n\}$, contradição com a infinitude de A . \square

No caso de espaços métricos, podemos caracterizar a compacidade em termos de seqüências. Isso é o que vamos provar nos próximos resultados. Cuidado que essa caracterização não vale em geral.

Proposição 4.3.4. *Seja (X, τ) com base locais enumeráveis, compacto e T_1 . Então toda seqüência admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência. Note que podemos supor que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito (caso contrário, teríamos uma subsequência constante convergente). Assim, seja $x \in X$ ponto de acumulação para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x decrescente. Seja $x_{n_0} \in V_0$. Para cada $k + 1 \in \mathbb{N}_{>0}$, escolha $x_{n_{k+1}} \in V_{n_{k+1}} \cap \{x_n : n > n_k\}$. Note que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x . \square

Para provarmos a volta do resultado acima no caso de espaços métricos, o seguinte resultado será útil:

Proposição 4.3.5. *Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda seqüência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada \mathcal{C} cobertura aberta para X , existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.*

Demonstração. Seja \mathcal{C} cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese. Suponha que $x_{n_k} \rightarrow x$ para algum x . Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto). Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} \\ &< \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Ou seja, $y \in B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ para todo $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ contrariando a escolha de x_{n_k} . \square

Proposição 4.3.6. *Seja (X, d) métrico tal que toda sequência admite subsequência convergente. Então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que não. Seja \mathcal{C} sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n > 0$, seja

$$x_n \in X \setminus (B_r(x_0) \cup \dots \cup B_r(x_{n-1}))$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, \dots, n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x_i) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^n C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de \mathcal{C} . Note que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente pois $d(x_n, x_m) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. \square

Juntando os resultados anteriores, temos:

Corolário 4.3.7. *Seja (X, d) espaço métrico. São equivalentes:*

- (a) (X, d) é compacto;
- (b) Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X ;
- (c) Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.

Corolário 4.3.8. *Todo métrico compacto é completo.*

No caso de \mathbb{R}^n , os compactos são exatamente os subespaços fechados e limitados (ver o Exercício 4.3.15). Para podermos fazer o resultado análogo para outros espaços métricos, precisamos de um outro conceito:

Definição 4.3.9. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 4.3.10. *Seja (X, d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, defina $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x 's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_\varepsilon(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_\varepsilon(y_x)$. \square

Proposição 4.3.11. *Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo. O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X . Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergente. Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é. Considere $\varepsilon_0 = 1$ e $F_0 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_0} B_{\varepsilon_0}(x)$. Note que, para algum $x_{n_0} \in F_0$, $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Continuamos este processo fazendo, para cada $k + 1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+2}$, escolhendo F_{k+1} finito de forma que $\{x_n : n > n_k\} \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$. Daí escolhemos $x_{n_{k+1}} \in F_{k+1}$ de forma que $B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \cap \{x_n : n > n_k\}$ seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente. \square

Corolário 4.3.12. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.*

O totalmente limitado é necessário de fato:

Exemplo 4.3.13. Considere \mathbb{N} com a métrica discreta. Note que, com tal métrica, \mathbb{N} é completo. Note também que \mathbb{N} é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola $B_2(0)$).

Basta notar que as únicas sequências de Cauchy são as quase constantes

Alongamentos

Alongamento 4.3.14. Mostre que \mathbb{N} como subespaço de \mathbb{R} tem pontos aderentes mas não pontos de acumulação.

Exercícios

Exercício 4.3.15. Mostre que em $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é um fechado limitado.

Exercício 4.3.16. Mostre que $D \subset X$ é fechado e discreto se, e somente se, D não admite pontos de acumulação.

Exercícios extras

Vamos apresentar nos próximos exercícios uma aplicação um tanto estranha do Teorema de Tychonoff.

Considere

$$S = \{(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} : \exists L > 0 \quad -L < x_z < L \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que S é um espaço vetorial. Vamos dizer que uma função linear $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **média** se, para todo $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$

$$\inf_{z \in \mathbb{Z}} x_z \leq \mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) \leq \sup_{z \in \mathbb{Z}} x_z.$$

Exercício 4.3.17. Note que as próprias funções inf e sup não são médias.

Exercício 4.3.18. Note que uma função constante não é uma média.

Exercício 4.3.19. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ finito e não vazio. Mostre que μ_F dada por

$$\mu_F = \frac{1}{|F|} \sum_{z \in F} x_z$$

é uma média.

Exercício 4.3.20. Seja $(a_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$ tal que $a_z \geq 0$ para cada z e $\sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z = 1$. Essa seria uma média com pesos. Mostre que μ dada por

$$\mu((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} a_z x_z$$

também é uma média.

S nada mais é que o conjunto das sequências limitadas reais, mas que estamos indexando em \mathbb{Z} .

O problema com os tipos de médias apresentados acima é que se “deslocamos” a sequência, sua média muda. Para formalizar, considere o seguinte operado *shift*: dado $(x_z)_{z \in \mathbb{Z}} \in S$, denotamos por $s((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = (x_{z+1})_{z \in \mathbb{Z}}$. Note que enquanto \inf e \sup são invariantes quanto a aplicações de s , os exemplos acima não são. Nosso trabalho agora se resume a provar que existe uma média invariante por s . Começamos com uma aproximação:

Exercício 4.3.21. Mostre que existe uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de médias tal que, para qualquer $x \in \mathbb{Z} \in S$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(s(x)) - \mu_n(x)| = 0$$

Podemos considerar o conjunto \mathcal{M} de todas as médias como um subconjunto de $\prod_{s \in S} \mathbb{R}$ simplesmente tomando μ como $(\mu(s))_{s \in S}$. Desta forma, podemos ainda melhorar e tomar o conjunto \mathcal{M} como sendo um subconjunto de

$$\prod_{s \in S} [m(s), M(s)]$$

onde $m(s)$ é o ínfimo de s e M é o supremo de s . Desta forma, pelo Teorema de Tychonoff, temos que \mathcal{M} é um subconjunto de um espaço compacto.

Exercício 4.3.22. Se convença das afirmações acima.

Exercício 4.3.23. Mostre que o conjunto \mathcal{M} de todas as médias é fechado no espaço descrito acima e, portanto, é compacto.

Exercício 4.3.24. Considere $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência como no Exercício 4.3.21.

- (a) Mostre que $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um ponto de acumulação em \mathcal{M} .
- (b) Mostre que tal ponto de acumulação é uma média invariante por *shifts*.

Capítulo 5

Conexos

5.1 Definição e propriedades básicas

Vamos apresentar agora outro importante invariante topológico:

Definição 5.1.1. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é **conexo** se, dados quaisquer abertos A e B de X disjuntos tais que $A \cup B = X$, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. A ideia aqui é que não dá para dividir o espaço em dois abertos não triviais.

Os intervalos são exatamente os subconjuntos conexos na reta real:

Definição 5.1.2. Seja (X, \leq) um conjunto ordenado. Chamamos $I \subset X$ de **intervalo** se, para quaisquer $a, b, c \in X$ tais que $a, b \in I$ e $a \leq c \leq b$ tivermos $c \in I$.

Proposição 5.1.3. $A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.

Demonstração. Suponha que A não seja um intervalo. Então existem $a, b \in A$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ e $x \notin A$. Então $A = (] - \infty, x[\cap A) \cup (]x, +\infty[\cap A)$, que são abertos disjuntos não vazios de A e, portanto, A não é conexo. Tais conjuntos são não vazios pois $a \in] - \infty, x[\cap A$ e $b \in]x, +\infty[\cap A$

Seja agora A um intervalo. Suponha que A não seja conexo. Então existem V, W abertos em A , disjuntos, tais que $A = V \cup W$. Sejam $v \in V$ e $w \in W$. Sem perda de generalidade, vamos supor $v < w$. Considere $\alpha = \sup\{x \in V : [v, x] \subset V\}$ (note que tal definição faz sentido pois $v \in \{x \in V : [v, x] \subset V\}$ e tal conjunto é limitado superiormente). Note que $\alpha \notin V$ pois, se $\alpha \in V$, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $] \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V$ e, portanto, $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \in V$ e $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < w$, o que contraria a definição de α . Logo $\alpha \notin V$, o que implica $\alpha \in W$ (pois $A = V \cup W$). Como W é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[\subset W$. Assim, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \in W$, contrariando a definição de α . \square

Já na topologia da reta de Sorgenfrey, os intervalos não são conexos:

Exemplo 5.1.4. A reta de Sorgenfrey não é conexa. Basta notar que $] - \infty, 0[\cup] 0, +\infty[= \mathbb{R}_S$, com $] - \infty, 0[$, $] 0, +\infty[$ abertos disjuntos e não vazios de \mathbb{R}_S .

Conexidade é uma propriedade preservada por funções contínuas:

Proposição 5.1.5. *Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ contínua e sobrejetora. Se X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Sejam $A, B \subset Y$ abertos disjuntos tais que $Y = A \cup B$. Note que $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ e $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$. Se A e B forem ambos não vazios, então $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ seriam abertos não vazios (pois f é sobrejetora), implicando em X não ser conexo. \square

Com isso, podemos provar facilmente um importante resultado de Cálculo:

Corolário 5.1.6 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam (X, τ) um espaço topológico conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sejam $f(a) < f(b)$, para $a, b \in X$. Se $y \in \mathbb{R}$ é tal que $f(a) < y < f(b)$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Note que esse resultado simplesmente está dizendo que a imagem de f é um intervalo.

Demonstração. Basta notar que o resultado anterior implica que $f[X]$ é conexo em \mathbb{R} e lembrar que os conexos em \mathbb{R} são os intervalos. \square

Também obtemos facilmente um resultado sobre a cardinalidade dos conexos completamente regulares:

Corolário 5.1.7. *Seja (X, τ) espaço topológico completamente regular, conexo e com mais de um ponto. Então $|X| \geq |\mathbb{R}|$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Por X ser completamente regular, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Como X é conexo, $f[X]$ é um intervalo em \mathbb{R} , mas $1, 0 \in f[X]$, logo $f[X] = [0, 1]$. \square

Um outro jeito de caracterizar conjuntos conexos é em termos de conjuntos mutuamente separados:

Definição 5.1.8. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $A, B \subset X$ são **mutuamente separados** se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$

Exemplo 5.1.9. $] - \infty, 0[$ e $] 0, +\infty[$ são mutuamente separados em \mathbb{R} .

Proposição 5.1.10. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, não existem $A, B \neq \emptyset$ mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$.*

Demonstração. Suponha que existam $A, B \subset X$ não vazios e mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$. Vamos mostrar que Y não é conexo. Sejam $U^* = X \setminus \bar{A}$, $V^* = X \setminus \bar{B}$. Considere $U = U^* \cap Y$, $V = V^* \cap Y$. Note que U e V são abertos em Y . Temos

- $U \cap V = \emptyset$: Suponha que não. Então existe y tal que $y \in U \cap V$. Note que $y \in Y$, $y \notin \bar{A}$ e $y \notin \bar{B}$ e, portanto, $y \notin A$ e $y \notin B$. Logo $y \notin Y$, contradição;
- $U \neq \emptyset$: Suponha $U = \emptyset$. Assim, $U^* \cap Y = \emptyset$. Logo, $Y \subset X \setminus U^* = \bar{A}$. Como $\bar{A} \cap B = \emptyset$, obtemos $B \cap Y = \emptyset$ o que é uma contradição já que teríamos que $B = \emptyset$;
- $V \neq \emptyset$: Análogo ao caso anterior.

Disso segue que $Y = U \cup V$, com U, V abertos disjuntos não vazios de Y , isto é, Y não é conexo.

Por outro lado, suponha Y não conexo. Então existem $U, V \subset Y$ abertos não vazios, disjuntos, tais que $U \cup V = Y$. Sejam U^* e V^* abertos de X tais que $U^* \cap Y = U$ e $V^* \cap Y = V$. Vamos mostrar que U e V são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que $x \in \bar{U} \cap V$. Assim $x \in \bar{U} \cap V^*$. Logo, pela definição de \bar{U} , existe $a \in U \cap V^*$. Note que $a \in Y$, donde $a \in V^* \cap Y = V$, e daí obtemos $a \in U \cap V$, contradição com $U \cap V = \emptyset$. Portanto, U e V são mutuamente separados. \square

Com isso, podemos mostrar que um conjunto conexo não pode ser dividido em dois subconjuntos mutuamente separados:

Corolário 5.1.11. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ conexo. Se $A, B \subset X$ são mutuamente separados e $Y \subset A \cup B$, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.*

Demonstração. Como $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, basta mostrarmos que $Y \cap A$ e $Y \cap B$ são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que exista $x \in \bar{Y \cap A} \cap (Y \cap B)$. Então $x \in B$ e $x \in \bar{Y \cap A} \subset \bar{A}$. Logo, $x \in \bar{A} \cap B$, contradição. \square

Vamos terminar esta seção com alguns resultados que implicam na conexidade de alguns subconjuntos:

Proposição 5.1.12. *Seja (X, τ) espaço topológico.*

- (a) Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.
- (b) Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.

Demonstração. (a) Suponha que X não seja conexo. Sejam $A, B \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = X$. Note que, para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \subset A$ ou $X_\alpha \subset B$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in I$ tais que $X_\alpha \subset A$ e $X_\beta \subset B$. Como $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, temos uma contradição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X_\alpha \subset A$, para todo $\alpha \in I$. Logo $X \subset A$ e daí $B = \emptyset$, contradição.

- (b) Fixe $x \in X$. Para cada $y \in X$, seja A_y conexo tal que $x, y \in A_y$. Por (a), concluímos que $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ é conexo. □

Proposição 5.1.13. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$ conexo. Então para todo $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, temos B conexo.*

Demonstração. Suponha que não. Sejam U e V mutuamente separados não vazios tais que $B = U \cup V$. Note que $A \subset U \cup V$, então, por A ser conexo, temos $A \subset U$ ou $A \subset V$. Suponha, sem perda de generalidade, que $A \subset U$, então $\overline{A} \subset \overline{U}$, logo $\overline{A} \cap V = \emptyset$ e assim $V = \emptyset$ (pois $V \subset \overline{A}$). □

Alongamentos

Alongamento 5.1.14. Mostre que “ser conexo” é um invariante topológico.

Alongamento 5.1.15. Mostre que (X, τ) é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são \emptyset e o próprio X .

Exercícios

Exercício 5.1.16. Mostre que se um espaço tem um subespaço denso conexo, então o espaço todo é conexo.

Exercício 5.1.17. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto finito de conexos é conexo.

- (a) Sejam (X, τ) , (Y, σ) conexos. Mostre que $X \times \{y\}$ é conexo para qualquer $y \in Y$. Use essa ideia e a Proposição 5.1.12 para mostrar que $X \times Y$ é conexo.

(b) Conclua que produto finito de conexos é conexo.

Exercício 5.1.18. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto qualquer de conexos é conexo (usa o anterior). Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços conexos. Seja $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(a) Seja $F \subset A$ finito. Mostre que $D_F : \{(b_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : b_\alpha = a_\alpha \text{ se } \alpha \notin F\}$ é homeomorfo a $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ (e, portanto, é conexo pelo exercício anterior).

(b) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset A : F \text{ é finito}\}$. Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(c) Mostre que $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in D_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

(d) Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é conexo.

(e) Mostre que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é conexo.

Exercício 5.1.19. Mostre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é conexo.

Dicas de alguns exercícios

1.1.62

d Para o lado $\bar{A} \subset A \cup \partial A$, considere $x \in \bar{A}$. Note que se $x \in A$, é trivial. No caso que $x \notin A$, mostre que $x \in \partial A$.

1.1.75

e Suponha que não e use os itens anteriores.

1.1.77

a Comece com $A \in \tau$ e $x \in A$. Use o fato que \mathcal{B} é base. Depois use a propriedade do enunciado. Mostre que $A \in \sigma$.

1.2.21 Veja a Proposição **1.1.16**.

1.2.30

a Mostre que tal conjunto é fechado por intersecções finitas.

d Considere o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Mostre que tal conjunto não pode ser separado do ponto 0.

1.2.31 Lembre que os racionais são enumeráveis.

1.3.27 Fixe uma base local enumerável para cada ponto, mostre que a união de todas elas forma uma base.

1.3.37 Veja a demonstração da proposição **1.2.20**. Use o fato da existência de uma base enumerável para construir o análogo das famílias $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.3.38 Considere $\mathcal{A} = \{(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2 : B_1 \subset B_2\}$. Fixe $C' \in \mathcal{C}$. Para cada $(B_1, B_2) \in \mathcal{A}$, se existir $C \in \mathcal{C}$ de forma que $B_1 \subset C \subset B_2$, então escolha C_{B_1, B_2} como um destes elementos. Se não existir, simplesmente faça $C_{B_1, B_2} = C'$. Note que $\mathcal{C}' = \{C_{B_1, B_2} : (B_1, B_2) \in \mathcal{A}\}$ é enumerável. Mostre que \mathcal{C}' é base.

2.1.20

a Use o Alongamento 2.1.14.

c Considere $X = [0, 1]$, $F_1 = \{0\}$ e $F_2 =]0, 1]$.

2.1.22 Suponha $x_n \rightarrow x$. Note que a sequência $y_{2n} = x_n$ e $y_{2n+1} = x$ também é convergente.

2.4.16 Mostre que se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X se, e somente se, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y . Lembre que funções contínuas levam sequências convergentes em sequências convergentes (Proposição 2.1.11).

2.4.18 Para mostrar que \tilde{f} é bijetora, considere $x \in \mathbb{R}$, mostre que $f(a) = x$, onde $a = \sup\{d \in D : f(d) \leq x\}$.

2.4.21 Considere $[0, 1] \cup [2, 0]$.

2.4.23

b Use o Corolário 2.4.14 e o item (a).

3.1.13 Mostre que em tal topologia, cada uma das f_α 's é contínua. Mostre que se um dos abertos da definição da topologia fraca não estiver na topologia, então alguma das f_α 's não é contínua.

3.2.14 Considere $(x, y) \notin D$. Mostre que existe uma vizinhança básica de (x, y) que não intercepta D . Faça um desenho e separe em casos que fica mais fácil.

3.2.15 Considere conjuntos da forma $\prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ onde B_n é elemento de alguma base se $n < n_0$ e $B_n = X_n$ caso contrário.

b Primeiro tome o conjunto de todos os subconjuntos com n elementos. Tal conjunto é enumerável pelo resultado do enunciado. Depois tome o subconjunto deste cujo os elementos sejam 2-2 disjuntos.

c Elas são indexadas por coisas enumeráveis (com n fixado).

e Fixe um aberto básico. Olhe as coordenadas em que ele é diferente de \mathbb{N} . Escolha intervalos abertos disjuntos (de \mathbb{R}) em torno de tais coordenadas (que são finitas). Construa uma $f \in D$ com tais intervalos e que esteja no aberto básico.

3.3.2

b Basta notar que \mathbb{N} é discreto.

d Use o fato que imagem contínua de separável é separável e que denso em denso é denso.

4.1.29 Use o fato que $[0, 1]$ é compacto.

4.1.33

a Basta notar que é subespaço de um compacto Hausdorff.

c Escreva $Y = X \cup \{x\}$. Seja $a \in X$. Sejam A, B abertos (em Y) disjuntos tais que $a \in A$, $x \in B$. Note que $\bar{A} \subset X$ é compacto.

4.2.15 Caso contrário, $F \cup \{Y\}$ teria a p.i.f.

4.3.17 Não são lineares.

4.3.21 Defina $\mu_n((x_z)_{z \in \mathbb{Z}}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_z$.

4.3.22 Leia com calma e faça uns desenhos.

5.1.18

d Use o fato que cada D_F é conexo e a Proposição 5.1.12.

e Use o exercício 5.1.16.

Soluções de alguns exercícios

1.1.59

b Vamos mostrar que $X \setminus (F \cup G)$ é aberto. Se mostrarmos que $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, seguirá que o complementar de $F \cup G$ é aberto por ser a interseção (finita) de abertos, o que acarretará que $F \cup G$ é fechado. De fato, se $x \in X \setminus (F \cup G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, e daí decorre que $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$. Reciprocamente, se $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, ou equivalentemente, $x \in X$ e $x \notin F \cup G$, acarretando a igualdade desejada.

c Note que se \mathcal{A} é uma família não vazia de conjuntos, então

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} X \setminus A$$

Da igualdade acima, e do fato de que cada membro de \mathcal{F} possui o complementar aberto, o temos (c).

1.1.60 Por definição, $\overset{\circ}{A}$ é a reunião dos abertos contidos em A . Daí, se $x \in V$ para algum V aberto contido em A , temos $x \in \overset{\circ}{A}$. A recíproca é imediata.

1.1.71 Seja $F \subset Y$ fechado em Y . Então $Y \setminus F$ é aberto em Y . Logo, existe $A \subset X$ um aberto em X tal que $A \cap Y = Y \setminus F$. Vamos mostrar que $F' = X \setminus A$ satisfaz o que desejamos. Primeiramente, note que F' é fechado em X (pois é complementar de um aberto). Agora só precisamos mostrar que, de fato,

$$F = F' \cap Y$$

Seja $y \in F$. Então $y \notin Y \setminus F$ e, portanto, $y \notin A$. Assim, $y \in X \setminus A$ e, portanto, $y \in Y \cap (X \setminus A) = F'$. A outra inclusão segue de maneira análoga (é um bom alongamento para o leitor).

Agora precisamos mostrar que, dado F' fechado em X , $F' \cap Y$ é fechado em Y . Isso decorre imediatamente do fato que $Y \setminus (Y \cap F') = Y \cap (X \setminus F')$. Logo, $Y \setminus (Y \cap F')$ é aberto em Y e, portanto, $Y \cap F'$ é fechado em Y .

1.1.72 Suponha $F \subset Y$ fechado em Y . Então existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F' \cap Y = F$. Logo, F' é fechado em X (por ser interseção de fechados). Agora suponha $F \subset Y$ fechado em X . Note que $F = F \cap Y$ e, portanto, F é fechado em Y .

1.1.73 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço aberto. Então $A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, for aberto em X .

A demonstração é análoga a da Proposição **1.1.72**.

1.1.76 Suponha $x \in \bar{A}$. Seja $V \in \mathcal{V}$, então existe $U \subset V$ aberto tal que $x \in U$. Como $x \in \bar{A}$, obtemos $U \cap A \neq \emptyset$ e, portanto, $V \cap A \neq \emptyset$.

Suponha que para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$. Seja $U \subset X$ aberto tal que $x \in U$. Como \mathcal{V} é sistema fundamental de vizinhanças de x , existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset U$. Logo, como $V \cap A \neq \emptyset$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$.

1.2.22 Supondo $(X, \tau) T_3$ e fixando $x \in X$, a família $\mathcal{V}_x = \{\bar{A} : A \in \tau \text{ e } x \in A\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x . Reciprocamente, supondo a existência de um sistema fundamental de vizinhanças fechadas podemos concluir que (X, τ) é T_3 .

1.2.25 Procedamos pela contrapositiva.

Suponha $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, para quaisquer $x, y \in X$ distintos. Isso equivale a afirmar que a é ponto aderente de $\{x\}$ se, e somente se, a é ponto aderente de $\{y\}$ ou, equivalentemente, todo aberto que contém x também contém y , isto é, (X, τ) não é T_0 .

1.2.26 Supondo $(X, \tau) T_1$, provemos (b). Basta considerar $\mathcal{A} = \{A \in \tau : x \in A\}$. Por construção, vale que $\{x\} \subset \bigcap \mathcal{A}$. Por outro lado, se existisse $y \neq x$ tal que $y \in \bigcap \mathcal{A}$, então todo aberto de A que contém x também conteria y , o que contraria a hipótese de estarmos supondo $(X, \tau) T_1$.

Agora suponha que para todo $x \in X$, existe uma coleção \mathcal{A}_x de abertos tal que $\bigcap \mathcal{A}_x = \{x\}$. Defina $B_x = \{A \in \tau | x \in A\}$ e $\mathcal{V}_x = \{U \in \tau : (\exists A, B)(A \in \mathcal{A}_x \text{ e } B \in B_x)(U = A \cap B)\}$. Claramente, \mathcal{V}_x é sfv para x e $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

Finalmente, se para cada $x \in X$ existir um sfv \mathcal{V}_x para x tal que $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$, então para $x \neq y$, segue que existem sistemas de vizinhanças \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y para x e y , respectivamente, tais que $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x \neq \bigcap \mathcal{V}_y = \{y\}$, ou seja,

existem abertos $A_y \in \mathcal{V}_y$ e $A_x \in \mathcal{V}_x$ tais que $x \in A_x$ mas $y \notin A_x$ e $y \in A_y$ mas $x \notin A_y$, donde (X, τ) é T_1 .

1.2.27 Se (X, τ) é normal, então em particular $\{x\}$ é fechado. Assim, sejam F um fechado e $x \in X$ tais que $x \notin F$, isto é, $\{x\}$ e F são fechados disjuntos. Por X ser T_4 , existem abertos A e B disjuntos tais que $\{x\} \subset A$ e $F \subset B$, isto é, (X, τ) é T_3 e, por ser T_1 , X é regular.

Se (X, τ) for regular, novamente $\{x\}$ é fechado, para qualquer $x \in X$. Em particular, se $x \neq y$, $x \notin \{y\}$, logo existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $\{y\} \subset B$, logo (X, τ) é de Hausdorff.

Daí, se (X, τ) é Hausdorff, dados $x \neq y$ elementos de X , existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$, em particular, por serem disjuntos, $x \in A$ e $y \notin A$ e $y \in B$ e $x \notin B$, implicando em (X, τ) ser T_1 .

Se (X, τ) é T_1 , então claramente também é T_0 .

1.3.26 Suponha que exista um aberto não vazio A tal que $A \cap D = \emptyset$. Então, $X \setminus A$ é um fechado diferente de X de modo que $D \subset (X \setminus A)$. Então, como \overline{D} é a interseção de todos os fechados que contém D , segue que $\overline{D} \neq X$ e D não é denso.

Agora, suponha que para qualquer aberto não vazio A , temos que $A \cap D \neq \emptyset$. Seja F um fechado tal que $D \subset F$, segue que $X \setminus F$ é um aberto tal que $(X \setminus F) \cap D = \emptyset$. Logo $X \setminus F = \emptyset$ e, então, $F = X$. Portanto, X é o único fechado que contém D e $\overline{D} = X$.

2.1.18 Seja A um aberto em Y . Então, como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é um aberto em X , e portanto, $f^{-1}[A] \cap Z$ é um aberto de Z . Por outro lado, como $(f \upharpoonright Z)^{-1}[A] = f^{-1}[A] \cap Z$, temos que $f \upharpoonright Z$ é contínua.

2.4.20 Sejam (X, \leq) um conjunto totalmente ordenado e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Então, se $x \neq \min X$ e $y \neq \max X$, temos que existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ de modo que $\tilde{x} < x < y < \tilde{y}$. Primeiramente, vamos fazer o caso em que existe $c \in X$ tal que $x < c < y$. Neste caso, temos que $x \in]\tilde{x}, c[$, $y \in]c, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, c[\cap]c, \tilde{y}[= \emptyset$. Já no caso em que não existe tal c , temos $x \in]\tilde{x}, y[$, $y \in]x, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, y[\cap]x, \tilde{y}[= \emptyset$.

Para os casos $x = \min X$ ou $y = \max X$, basta tomar conjuntos como $[x, y[$ e $]x, y]$ e trabalhar como anteriormente.

3.1.11 Suponha que (X, τ) seja espaço de Hausdorff. Seja $(a, b) \in X \times X$, com $a \neq b$. Sejam, também, $A, B \in \tau$ disjuntos tais que $a \in A$ e $b \in B$. Note que $(A \times B) \cap D = \emptyset$ e $(a, b) \in A \times B$.

Suponha que D seja fechado. Sejam $a, b \in X$, com $a \neq b$. Logo, $(a, b) \notin D$ e existem $A, B \in \tau$ tais que $(a, b) \in A \times B$ e $(A \times B) \cap D = \emptyset$. Portanto, $A \cap B = \emptyset$.

3.2.13 Basta mostrar para $n = 2$. Seja $x \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Como cada f_i é contínua, existe V_i tal que $f_i[V_i] \subset]f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon[$. Seja $V = V_1 \cap V_2$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $f_1(x) \leq f_2(x)$ (e, portanto, $g(x) = f_2(x)$). Assim, dado $y \in V$, temos:

$$\begin{aligned} g(y) &= \max\{f_1(y), f_2(y)\} \\ &< \max\{f_1(x) + \varepsilon, f_2(x) + \varepsilon\} \\ &\leq f_2(x) + \varepsilon \\ &= g(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

Analogamente, provamos que $g(y) > g(x) - \varepsilon$ e, portanto, g é contínua no ponto x .

4.2.18 Suponha que não. Então, existem $A_1, \dots, A_n \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F}$ tais que $A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$. Sejam $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $A_i \in F_i$. Note que existe F_j tal que $F_j \supset F_i$, para $i = 1, \dots, n$. Logo, $A_1, \dots, A_n \in F_j$, portanto, $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$, que é uma contradição.

4.2.19 Considere $\mathcal{F} = \{G \subset \wp(X) : G \supset F \text{ e } G \text{ é filtro}\}$ ordenado pela inclusão. Pelo Lema de Zorn, existe $G \in \mathcal{F}$ maximal. G é um ultrafiltro que contém F .

4.2.22 ($i \Rightarrow ii$) Seja F filtro sobre X e considere $F' = \{\bar{A} : A \in F\}$. Note que F' tem p.i.f. (pois F também tem). Assim, pela compacidade (ver Alongamento 4.1.23), existe $x \in \bigcap_{\bar{A} \in F'} \bar{A}$. Note que tal x é aderente a F .

($ii \Rightarrow iii$) Sejam F ultrafiltro sobre X e x ponto aderente a F . Vamos mostrar que $F \rightarrow x$. Seja V vizinhança de x e suponha que $V \notin F$. Logo, $X \setminus V \in F$ mas, $x \notin \overline{X \setminus V}$ (de fato, seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $A \cap (X \setminus V) = \emptyset$). Portanto, x não é aderente.

($iii \Rightarrow i$) Seja \mathcal{F} uma família de fechados em X com p.i.f. Vamos mostrar que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Seja $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro. Sejam $x \in X$ tal que $G \rightarrow x$ e $H \in \mathcal{F}$. Veremos que $x \in H$. Suponha que não, assim, $x \in X \setminus H$. Como $G \rightarrow x$, temos que $X \setminus H \in G$ (pois $X \setminus H$ é aberto que contém x). Mas $H \in G$ e $(X \setminus H) \cap H \in G$, que é uma contradição.

4.2.24 Seja F um ultrafiltro sobre X . Para cada $\alpha \in A$, seja $F_\alpha = \{\pi_\alpha[B] : B \in F\}$. Note que F_α é um ultrafiltro sobre X_α (Veja o exercício 4.2.23).

Seja $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $F_\alpha \rightarrow x_\alpha$. Vamos mostrar que $F \rightarrow x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Note que é suficiente mostrar que todo aberto básico contendo x é elemento de F (exercício).

Sejam $V = \prod V_\alpha$ aberto básico tal que $x \in V$ e $\mathcal{F} = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{F}$, temos que $V_\alpha \in F_\alpha$ (pois $F_\alpha \rightarrow x_\alpha$). Logo, existe $B_\alpha \in F$ tal que $V_\alpha = \pi_\alpha[B_\alpha]$. Portanto, $\pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$ (pois $B_\alpha \subset \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$). Então, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$.

5.1.17

a Sejam $(x, y), (a, b) \in X \times Y$. Note que $X \times \{y\}$ e $\{a\} \times Y$ são conexos, pois são homeomorfos a X e Y , respectivamente (ver Alongamento **5.1.14**). Logo $A = (X \times \{y\}) \cup (\{a\} \times Y)$ é conexo, pois $(a, y) \in (X \times \{y\}) \cap (\{a\} \times Y)$ (pela Proposição 5.1.12). Assim, A é um conexo de $X \times Y$ tal que $(x, y), (a, b) \in A$. Logo, pela Proposição **5.1.12**, temos que $X \times Y$ é conexo.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Blumberg. New Properties of All Real Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 24:113–118, oct 1922.
- [2] S. Willard. *General topology*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004.

Notação

$B_r(x)$, 10

T_0 , 20

T_1 , 22, 41, 44

T_2 , 22

T_3 , 23

T_4 , 24, 41, 44, 49

$T_{3\frac{1}{2}}$, 44

χ_A , 40

\mathbb{R} , 8, 11, 13–16, 24

$\wp(X)$, 9

$d(x, A)$, 19

Índice Remissivo

- aberto, 9
- aberto*, 8
- aderente
 - ponto, 12
- assimétrica, 18

- base, 14
- base local, 15
- bases locais
 - enumeráveis, 27

- caótica
 - topologia, 9
- característica
 - função, 40
- Cauchy
 - sequência de, 29
- cofinita
 - topologia, 10, 22
- completamente
 - regular, 44
- completo
 - espaço métrico, 29
- conjunto
 - fechado, 11
- contínua
 - extensão, 45
 - função, 36
- converge, 27

- de
 - Urysohn, Lema, 42
- denso, 46
- discreta
 - topologia, 9, 11, 15
- distância
 - ponto a conjunto, de, 19

- enumeráveis
 - bases locais, 27
- enumerabilidade
 - primeiro axioma de, 27
 - segundo axioma de, 29
 - terceiro axioma de, 30
- equivalentes
 - métricas, 18
- esburacada
 - reta, 26, 28, 32, 33
- espaço
 - completo, métrico, 29
 - Hausdorff, de, 22
 - métrico, 5, 10, 22, 27, 29, 41
 - metrizável, 31
 - normal, 24
 - regular, 23
 - separável, 30
 - sequência convergente, da, 37, 46
 - topológico, 9
 - topológico*, 8
 - Tychonoff, de, 44
 - zero-dimensional, 19
- extensão
 - contínua, 45
- Extensão de Tietze
 - Teorema da, 46

- fechado
 - conjunto, 11
- fecho, 12
- filtro, 6
- fronteira
 - ponto de, 13
- função
 - característica, 40

- contínua, 36
 - identidade, 36
 - no ponto x , contínua, 35
- gerada
 - topologia, 20
- Hausdorff, 46
- Hausdorff
 - espaço de, 22
- identidade
 - função, 36
- induzida pela métrica
 - topologia, 10
- interior, 12
- interior
 - ponto, 17
- isomorfismo
 - ordem, de, 45
- Jones
 - Lema de, 50
- Lema
 - de Urysohn, 42
 - Jones, de, 50
- métricas
 - equivalentes, 18
- métrico
 - espaço, 5, 10, 22, 27, 29, 41
- metrizável, 32
- metrizável
 - espaço, 31
- Niemytski
 - plano de, 32
- no ponto x
 - função contínua, 35
- normal, 41, 44
- normal
 - espaço, 24
- ordem
 - isomorfismo de, 45
 - parcial, 45
 - total, 45
- parcial
 - ordem, 45
- plano
 - Niemytski, de, 32
- ponto
 - aderente, 12
 - fronteira, de, 13
 - interior, 17
- ponto a conjunto
 - distância de, 19
- primeiro axioma
 - enumerabilidade, de, 27
- quase constante
 - sequência, 32
- quasi-métrica, 18
- reais, 5, 16
- real
 - reta, 30
- regular
 - completamente, 44
 - espaço, 23
- reta
 - esburacada, 26, 28, 32, 33
 - real, 30
 - Sorgenfrey, de, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 24–27, 30, 31
- segundo axioma
 - enumerabilidade, de, 29
- separável
 - espaço, 30
- sequência

- Cauchy, de, 29
- quase constante, 32
- sequência convergente
 - espaço da, 37, 46
- sistema
 - vizinhanças*, de, 6
- sistema fundamental
 - vizinhanças, de, 15
- Sorgenfrey
 - reta de, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 24–27, 30, 31
- subespaço
 - topologia de, 10
- Teorema
 - Extensão de Tietze, da, 46
- terceiro axioma
 - enumerabilidade, de, 30
- topológico
 - espaço, 9
- topológico*
 - espaço, 8
- topologia, 9
- topologia
 - caótica, 9
 - cofinita, 10, 22
 - discreta, 9, 11, 15
 - gerada, 20
 - induzida pela métrica, 10
 - subespaço, de, 10
 - usual em \mathbb{R} , 10
- total
 - ordem, 45
- Tychonoff
 - espaço de, 44
- Urysohn
 - Lema de, 42
- usual em \mathbb{R}
 - topologia, 10
- vizinhança, 9
- vizinhança*, 6
- vizinhanças
 - sistema fundamental de, 15
- vizinhanças*
 - sistema de, 6
- zero-dimensional
 - espaço, 19