Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

27 de junho de 2015

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Espaços topológicos

1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade. Uma maneira de dar uma noção de proximidade é de modo quantitativo, como no caso de espaços métricos:

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico**, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

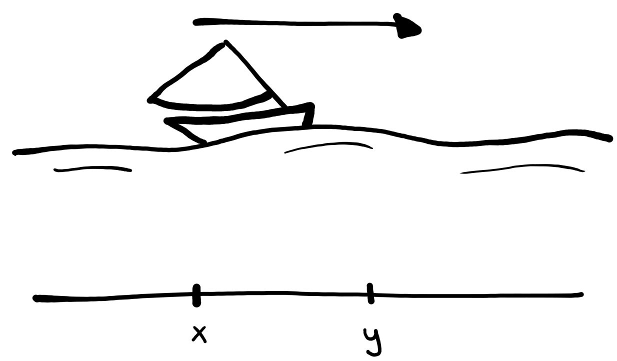
Desta maneira, temos que uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro - simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2. Uma métrica sobre o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

Para espaços de funções em geral não é possível definir métricas.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correntenza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correntenza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.



Veja também o Exercício 1.1.54.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo. Para isso, vamos precisar de um conceito diferente:

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é um **filtro** sobre X se:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

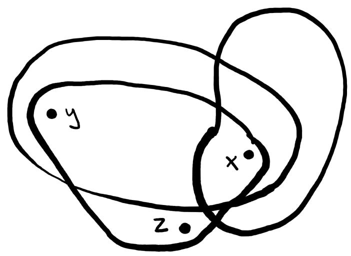
Agora, em vez de usarmos uma função distância, "atribuimos" a cada ponto um filtro:

Esta não será a definição "oficial" de vizinhança que teremos ao longo do texto. Mas a relação entre as duas é explicitada nos Alongamentos **??** e 1.1.42.

Definição 1.1.4. Seja X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é um **sistema de vizinhanças** para x se $\mathcal{V}$ é um filtro sobre X e cada elemento $V \in \mathcal{V}$ é tal que $x \in V$. Chamamos cada $V \in \mathcal{V}$ de **vizinhança** de x.

A intuição por trás desta definição é que cada elemento de $\mathcal{V}$ representa uma coleção de pontos "próximos" de x. Você pode pensar que um ponto y fixado está mais próximo de x quanto maior for o conjunto

$$\{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$$



Desta maneira, na situação representada pela figura, o ponto y está mais próximo de x que o ponto z está.

O próximo exemplo dá uma maneira de traduzirmos para a ideia de vizinhanças o conceito de proximidade dado pela métrica usual em $\mathbb{R}$.

Sim, parece estranho agora que isso seja realmente uma tradução. Mas veremos isso mais formalmente no Alongamento 1.1.43.

Exemplo 1.1.5. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existem $a < x < b$ tais que $]a, b[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças para x.

Ao mudarmos ele ligeiramente, obtemos a ideia do exemplo do rio:

Exemplo 1.1.6. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existe $a > x$ tal que $[x, a[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças de x. Ao conjunto dos reais munido com tal conceito de vizinhanças damos o nome de **reta de Sorgenfrey**.

Para tentarmos ver que algo da nossa intuição está sendo capturado neste exemplo, vamos analisar um caso específico. Considere as vizinhanças de 0 como definidas acima. Note que números positivos estão muito mais próximos de 0 do que os números negativos. Note também que isso não ocorre no caso mais simétrico do exemplo anterior.

Com todo esse material, podemos finalmente definir um espaço topológico. Intuitivamente, um espaço topológico nada mais é que um conjunto tal que todos os pontos possuem uma medida qualitativa de proximidade:

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto. Fixe, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ um sistema de vizinhanças para x. Chamamos de **espaço topológico** o conjunto X com tal família fixada de sistemas de vizinhanças.

Veja a definição "definitiva" em 1.1.12.

Esta não é a definição que iremos trabalhar. Optamos por apresentar esta versão por entendermos que a intuição por trás dela é mais aparente do que na definição "definitiva".

Um tipo bastante importante de vizinhança são os abertos, que nada mais são do que conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos:

Definição 1.1.8. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $A \subset X$ é um **aberto** se para todo $a \in A$, temos que A é vizinhança de a.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.9. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia usual (como no Exemplo 1.1.5) e $a < b$, temos que um intervalo $]a, b[$ é aberto. De fato, dado qualquer $x \in]a, b[$, o próprio conjunto $]a, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. Por outro lado, o conjunto $[a, b[$ não é aberto pois $[a, b[$ não é vizinhança de a.

Exemplo 1.1.10. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia da reta de Sorgenfrey (como no Exemplo 1.1.6 e $a < b$, temos que $]a, b[$ é aberto, pois, para cada $x \in]a, b[$, temos que $[x, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. De maneira análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ também é aberto.

Os abertos tem algumas propriedades a se destacar:

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço topológico. Temos:*

(a) $\emptyset$ e X são abertos;

(b) se A e B são abertos, então $A \cap B$ também é;

(c) se $\mathcal{A}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ é um aberto.

Demonstração. Veja o Alongamento 1.1.40. □

Essas propriedades da última proposição na verdade motivam a definição usual de espaço topológico:

Esta é a definição oficial para espaços topológicos. $\wp(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X.

Definição 1.1.12. Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ é uma família que satisfaz:

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(c) se $\mathcal{A} \subset \tau$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de **aberto** e a própria família τ é chamada de **topologia**.

Exemplo 1.1.13. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia caótica**).

Exemplo 1.1.14. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \wp(X)$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia discreta**).

Proposição 1.1.15. *Seja X um conjunto qualquer e σ uma topologia sobre X. Então, σ é a topologia discreta se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.*

Demonstração. Se σ é a topologia discreta, segue da definição que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.

Reciprocamente, dado um conjunto qualquer $A \subset X$, ele pode ser escrito da forma $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$. Logo, pela definição de topologia, $A \in \sigma$ e, portanto, σ é a topologia discreta. $\square$

Exemplo 1.1.16. O conjunto $\mathbb{R}$ é um espaço topológico, com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in A\}$. Esta é chamada de **topologia usual em** $\mathbb{R}$.

Veja o Alongamento 1.1.43 para notar que diversas maneiras definir a topologia nos reais chegam ao mesmo lugar.

Exemplo 1.1.17. Seja X um conjunto qualquer. Considere $\tau = \{A \subset X : X \setminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X (chamada **topologia cofinita** - veja também o Exercício 1.1.52).

De fato, $X, \emptyset \in \tau$. Seja $\mathcal{A}$ uma família de elementos de τ. Temos que

$$X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A)$$

Note que o lado direito da equação é finito pois é interseção de conjuntos finitos. Logo, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Note que

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

Novamente o lado direito é finito, pois é união finita de conjuntos finitos. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e τ é uma topologia sobre X.

Também podemos definir um espaço "menor" que um já fixado:

Definição 1.1.18. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. A **topologia de subespaço** sobre Y induzida por (X, τ) é dada por $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

Veja Alongamento 1.1.45.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos $Y \subset X$, onde (X, τ) é um espaço topológico, Y será considerado com a topologia de subespaço.

Com uma métrica, é fácil definir uma topologia:

Proposição 1.1.19. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Então,* $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, *onde* $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, *é uma topologia sobre* X, *chamada* **topologia induzida pela métrica** d.

Demonstração. Note que $X \in \tau$ trivialmente e que $\emptyset \in \tau$ por vacuidade. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente, seja $\mathcal{A} \subset \tau$. Novamente, podemos supor que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ pois caso contrário nada há a provar. Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e, portanto, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. $\square$

Agora podemos apresentar a ideia de vizinhança, se começamos com o conceito de abertos:

Esta é a definição oficial de vizinhança. A relação entre as duas definições está explicitada nos Alogamentos 1.1.42 e 1.1.41.

Definição 1.1.20. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que V é uma **vizinhança** de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

Um importante conceito é o de conjunto fechado:

Definição 1.1.21. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um **conjunto fechado** se $X \smallsetminus F$ é aberto.

Exemplo 1.1.22. Em qualquer espaço topológico (X, τ), X e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e $\emptyset$ são abertos e fechados).

Exemplo 1.1.23. Em $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \smallsetminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exemplo 1.1.24. Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\wp(X)$ e, portanto, é aberto.

Exemplo 1.1.25. Na reta de Sorgenfrey, $[a, b[$ é fechado, onde $a < b$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$, então há dois casos a considerar:

- $x \geq b$: basta tomar o aberto $[x, x + 1[$, cuja interseção com $[a, b[$ é vazia;

- $x < a$: podemos considerar o aberto $[x, a[$, que também está contido no complementar de $[a, b[$.

Portanto, o complementar de $[a, b[$ é aberto, como queríamos.

Algo muito comum de se fazer é tomar o menor fechado contendo um determinado conjunto:

Definição 1.1.26. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$ (**fecho** de A, também denotado por $\mathrm{Cl}(A)$).

Definimos $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{V \subset X : V \text{ é aberto e } V \subset A\}$ (**interior** de A, também denotado por $\mathrm{Int}(A)$).

Proposição 1.1.27. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é fechado e $\overset{\circ}{A}$ é aberto.*

Demonstração. Decorre diretamente da definição e das propriedades de conjuntos abertos e fechados. □

Pensando que os abertos que contém um ponto são as possíveis noções de "perto do ponto", podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para "perto do ponto", interceptamos o conjunto:

Definição 1.1.28. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto aderente** a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.

Note que esta definição difere da definição que daremos para ponto de acumulação.

Vamos mostrar que o fecho de um conjunto basicamente é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto:

Proposição 1.1.29. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } A\}$.*

Demonstração. Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A. Vamos provar que $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \smallsetminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de $\overline{A}$, segue que $\overline{A} \subset X \smallsetminus V$, contradição com o fato que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \overline{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \overline{A}$. Logo, $x \in X \smallsetminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \overline{A}$. □

Proposição 1.1.30. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A, B \subset X$. Temos*

Vale um resultado análogo para o interior de um conjunto A. Em particular, A é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{A} = A$ (ver Alongamento 1.1.49).

(a) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(c) $\overline{A} = A$ se, e somente se, A é fechado.

Demonstração. Dado $x \in \overline{A}$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U que contém x. Como $A \subset B$, segue em particular que $U \cap B \neq \emptyset$. Isto prova (a).

Provemos (c). Naturalmente se $\overline{A} = A$, obtemos que A é fechado, pois seu fecho é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, segue que $A = \bigcap\{F \subset X : F$ é fechado e $A \subset F\} = \overline{A}$. O item (b) segue então diretamente de (b), por $\overline{A}$ ser fechado. □

Exemplo 1.1.31. Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\overline{A} = A$ (e também que $\mathring{A} = A$).

Exemplo 1.1.32. Em $\mathbb{R}$, $\overline{[a,b[} = [a,b]$. De fato, b é o único ponto fora de $[a,b[$ que é aderente a $[a,b[$.

Exemplo 1.1.33. Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a,b[} = [a,b[$. Para isso, basta lembrar que $[a,b[$ é fechado.

Exemplo 1.1.34. Em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Ambas as igualdades se devem ao fato de que dado qualquer ponto $q \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém pontos de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. O mesmo vale na reta de Sorgenfrey.

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar:

Definição 1.1.35. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de fronteira** de A se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Notação 1.1.36. $\partial A = \{x \in X : x$ é ponto de fronteira de $A\}$.

Exemplo 1.1.37. Em $\mathbb{R}$, $\partial[a,b[= \{a,b\}$. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que $\partial[a,b[= \emptyset$.

Observação 1.1.38. A igualdade acima vale de modo geral. Se A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico (X, τ), então $\partial A = \emptyset$.

Exemplo 1.1.39. Em $\mathbb{R}$ (ou na reta de Sorgenfrey), $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.40. Mostre a Proposição 1.1.11.

Alongamento 1.1.41. Mostre que, se começamos com abertos, definimos vizinhanças e depois abertos novamente (usando essas vizinhanças), chegamos à mesma topologia.

Alongamento 1.1.42. Seja X um conjunto e fixe $\mathcal{F}_x$ sistema de vizinhanças para cada ponto. Defina aberto como fizemos a partir destas vizinhanças. Agora, para cada ponto x, seja $\mathcal{V}_x$ a coleção de vizinhanças como definimos a partir dos abertos.

(a) Mostre que, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}_x$.

(b) Considere $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_0 = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ e } \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ é enumerável}\}$ e, para cada $x \neq 0$, $\mathcal{F}_x = \{\mathbb{R}\}$. Note que, de fato, cada $\mathcal{F}_y$ é um filtro e, se fizermos o procedimento acima, temos que $\mathcal{V}_0 \subsetneq \mathcal{F}_0$.

Alongamento 1.1.43. Vejamos que os abertos em $\mathbb{R}$ podem ser obtidos de várias maneiras. Mostre que os abertos são os mesmos se:

(a) fizermos como no Exemplo 1.1.16;

(b) usamos as vizinhanças como em 1.1.5

(c) usamos a métrica de 1.1.2 e depois a Proposição 1.1.19.

Alongamento 1.1.44. Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Alongamento 1.1.45. Mostre que, de fato, a topologia de subespaço é uma topologia.

Alongamento 1.1.46. Considere $[0, 1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que $[0, \frac{1}{2}[$ é aberto em $[0, 1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

Alongamento 1.1.47. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são verdadeiras:

(a) $X, \emptyset$ são fechados;

(b) Se $F, G \subset X$ são fechados, então $F \cup G$ é fechado;

(c) Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de fechados, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ é um fechado.

Alongamento 1.1.48. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto interior** de A se existe V aberto tal que $x \in V \subset A$. Mostre que $\mathring{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } A\}$.

Alongamento 1.1.49. Mostre o análogo à Proposição 1.1.30 para o interior.

Alongamento 1.1.50. Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Mostre as seguintes afirmações:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

(b) $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$

(c) $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

(d) $\overline{A} = A \cup \partial A$

Alongamento 1.1.51. Mostre que a fronteira de um conjunto sempre é fechada.

Exercícios

Exercício 1.1.52. Na definição da topologia cofinita (Exemplo 1.1.17), poderíamos pedir, em vez que os abertos tivessem complementar finito, que os abertos simplesmente fossem infinitos?

Exercício 1.1.53. Dizemos que duas métricas sobre um mesmo espaço X são **métricas equivalentes** se elas induzem a mesma topologia. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico qualquer, então existe uma outra métrica d' sobre X equivalente a d e que é limitada (isto é, existe $L > 0$ tal que $d'(x, y) \leq L$ para todo $x, y \in X$).

Exercício 1.1.54. Seja X um conjunto. Chamamos de **assimétrica** (na maioria dos livros, **quasi-métrica**), uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(a) Mostre que $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ é uma topologia sobre X (como fizemos com uma métrica);

(b) Considere seguinte função sobre $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que d é uma assimétrica sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a topologia induzida por ela é a mesma da reta de Sorgenfrey.

Exercício 1.1.55. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Note que a restrição de d a Y induz uma métrica sobre Y. Mostre que a topologia induzida por tal métrica e a topologia induzida de subespaço de X coincidem.

Exercício 1.1.56. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F = F' \cap Y$.

Exercício 1.1.57. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço fechado. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, F é fechado em X.

Exercício 1.1.58. Encontre o análogo do Exercício 1.1.57 para abertos.

Exercício 1.1.59. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $A \subset X$ não vazio e $x \in X$, definimos $d(x, A)$ (**distância de ponto a conjunto**) como $d(x, A) = \inf(d(x, a) : a \in A\}$. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Exercício 1.1.60. Considere $\tau = \{A \subset \mathbb{Z} :$ para todo $a \in A$, existe $b \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\{a + bz : z \in \mathbb{Z}\} \subset A\}$.

(a) Mostre que τ é uma topologia sobre $\mathbb{Z}$.

(b) Mostre que não existe um aberto não vazio que seja finito.

(c) Mostre que, dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}_{>0}$, o conjunto $S(a, b) = \{a + bz : z \in \mathbb{Z}\}$ é aberto e fechado.

(d) Mostre que $\mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ é primo}} S(0, p)$.

(e) Mostre que existem infinitos primos.

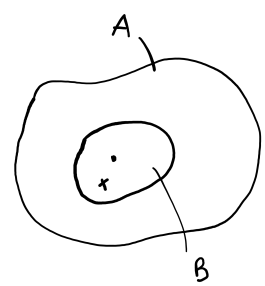


Figura 1.1: O desenho básico de uma base

1.2 Bases

Uma base nada mais é que uma subfamília de abertos que é suficiente para recuperarmos todos os abertos por meio de uniões:

Definição 1.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma **base** para (X, τ) se para todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Uma importante caracterização para bases é o seguinte resultado:

Veja a figura 1.1.

Proposição 1.2.2. *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de τ é uma base para (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}$ seja uma família como no enunciado e seja $A \in \tau$. Para cada elemento $x \in A$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Segue, então, que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $A \in \tau$. Como podemos escrever $A = \bigcup \mathcal{B}'$ com $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, tomamos $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$. Além disso, temos que $B \subset A$. $\square$

Exemplo 1.2.3. $\mathcal{B} = \{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \tau$. Pela definição de τ, existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. Note que existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$$

Logo, $B =]a, b[\in \mathcal{B}$ e $x \in B \subset A$.

Exemplo 1.2.4. Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então, $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é uma base para (X, d) (ver Alongamento 1.2.12).

Exemplo 1.2.5. Seja X um conjunto qualquer. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para a topologia discreta sobre X (ver Alongamento 1.2.12).

Exemplo 1.2.6. A família $\mathcal{B} = \{[x, y[: x < y\}$ é uma base para a reta de Sorgenfrey (ver Alongamento 1.2.12).

Em algum sentido, uma base é um conjunto suficiente para determinar todos os abertos. Podemos fazer o análogo para vizinhanças:

Definição 1.2.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um **sistema fundamental de vizinhanças** de x se

Veja o Exercício 1.2.17

(a) Para todo $V \in \mathcal{V}$, V é vizinhança de x;

(b) Para todo aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset A$.

No caso em que os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos, chamamos $\mathcal{V}$ de **base local** para x.

Exemplo 1.2.8. Em $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}_1 = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x (mais que isso, como todos os membros de $\mathcal{V}_1$ são abertos, $\mathcal{V}_1$ é uma base local de x).

$\mathcal{V}_2 = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.2.9. Na reta de Sorgenfrey, $\mathcal{V} = \{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.2.10. Considere X com a topologia discreta. $\mathcal{V}_1 = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x, bem como $\mathcal{V}_2 = \{A \subset X : x \in A\}$.

O próximo resultado mostra como bases do espaço original se relacionam com as de um subespaço:

Proposição 1.2.11. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ), então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.*

Podemos fazer o análogo com sistemas fundamentais de vizinhanças.

Demonstração. Sejam $A' \in \tau_Y$ e $x \in A'$. Pela definição de topologia de subespaço, existe $A \in \tau$ tal que $A' = A \cap Y$ e, assim, $x \in A$. Logo, pelo fato de $\mathcal{B}$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, $x \in B \cap Y \subset A \cap Y$ e, portanto, $\mathcal{B}'$ é uma base para (Y, τ_Y). $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.2.12. Mostre as afirmações dos Exemplos 1.2.4, 1.2.5 e 1.2.6.

Alongamento 1.2.13. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$. Mostre que $\{A \in \tau : x \in A \subset V\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para x.

Alongamento 1.2.14. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$, $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças de x e $W \subset X$ vizinhança de x. Mostre que $\{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exercícios

Exercício 1.2.15. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $A \subset X$, $x \in X$ e $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Exercício 1.2.16. Seja X um conjunto e sejam τ e σ topologias sobre X. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para (X, τ) e (X, σ) respectivamente.

(a) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B$ e $x \in C$ existam $C' \in \mathcal{C}$ e $B' \in \mathcal{B}$ tais que $x \in C' \subset B$ e $x \in B' \subset C$. Mostre que $\tau = \sigma$.

(b) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ exista $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset B$. É verdade que $\sigma = \tau$? Se não for verdade, vale alguma das inclusões?

Exercício 1.2.17. Seja (X, τ) espaço topológico. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que, dado $A \subset X$, A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset A$.

Exercício 1.2.18. Dizemos que (X, τ) é um **espaço zero-dimensional** se ele possui uma base formada por abertos fechados.

(a) Mostre que a reta de Sorgenfrey é zero-dimensional.

(b) Mostre que tanto $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{Q}$ são zero-dimensionais (considerados com a topologia de subsespaço).

(c) Mostre que se Y é subsepaço de um espaço zero-dimensional, então Y também é zero-dimensional.

Exercício 1.2.19. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}$ base para (X, τ). Mostre que τ é a menor topologia que contém $\mathcal{B}$. Isto é, mostre que $\tau = \bigcap_{\sigma \in T} \sigma$ onde $T = \{\sigma : \sigma \text{ é uma topologia para } X \text{ tal que } \mathcal{B} \subset \sigma\}$.

Exercício 1.2.20. Dado um conjunto X e uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, chamamos de **topologia gerada** por X o conjunto $[\mathcal{B}] = \bigcap_{\tau \in T} \tau$, onde $T = \{\tau \subset \wp(X) : \tau \text{ é topologia sobre } X \text{ e } \mathcal{B} \subset \tau\}$.

(a) Mostre que T definido acima é não vazio (e, portanto, podemos tomar a intersecção).

(b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é uma topologia sobre X.

(c) Mostre que, se $\mathcal{B}$ satisfaz:

  (i) $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;

  (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in A \cap B$, $\exists C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

  então $\mathcal{B}$ é uma base para $(X, [\mathcal{B}])$.

1.3 Axiomas de Separação

Muitas vezes, só a definição de topologia é muito simples para que possamos trabalhar. Nesta seção veremos algumas hipóteses adicionais que podemos pedir num espaço topológico. As hipóteses desta seção tem como objetivo, por exemplo, exigir que a topologia sobre o espaço seja rica o suficiente para diferenciar os pontos do espaço, ou separar os pontos entre si ou até mesmo separar fechados. Apresentaremos as propriedades em ordem de "força" (veja o Exercício 1.3.27).

Num espaço T_0, pelo menos um dos abertos da Figura 1.2 existe.

Definição 1.3.1. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_0 se para quaisquer $x, y \in X$ distintos existir um aberto A tal que ($x \in A$ e $y \notin A$) ou ($x \notin A$ e $y \in A$).

Num espaço T_0, os abertos "diferenciam" pontos, isto é, dados dois pontos distintos, existe ao menos um aberto que os distingue.

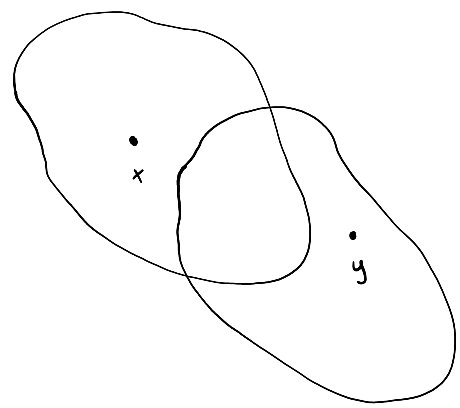


Figura 1.2: Abertos diferentes para pontos diferentes

Vejamos alguns exemplos de espaços que não são T_0. Exemplos que satisfazem tal propriedade serão dados no decorrer do texto (veja também o Exercicio 1.3.24).

Exemplo 1.3.2. Qualquer conjunto X com mais de dois pontos, munido da topologia caótica não é T_0.

Exemplo 1.3.3. Seja X um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos. Fixe $x, y \in X$ distintos e defina $\tau = \{A \subset X : x, y \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$. É fácil ver que (X, τ) é um espaço topológico. Contudo, não existe aberto em X tal que $x \in A$ e $y \notin A$ ou $y \in A$ e $x \notin A$. Logo (X, τ) não é T_0.

Esse resultado deixa claro que os pontos próximos de um ponto são diferentes dos próximos a outro num espaço T_0.

Proposição 1.3.4. *Um espaço topológico (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ para x e y respectivamente, tivermos que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.*

Demonstração. Suponha (X, τ) T_0. Tomemos $x, y \in X$ pontos distintos e $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$ bases locais arbitrárias para x e y respectivamente. Por X ser T_0, existe um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$, ou $x \notin A$ e $y \in A$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro caso. Por $\mathcal{B}_x$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset A$. Como $y \notin A$, segue que $y \notin B$ e, por tanto, $B \notin \mathcal{B}_y$, mostrando que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer $x, y \in X$ distintos, toda base local de x seja distinta de qualquer base local de y. Em particular,

$\mathcal{B}_x = \{A \in \tau : x \in A\}$ e $\mathcal{B}_y = \{A \in \tau : y \in A\}$ são bases locais de x e y respectivamente. Logo, $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$ pela hipótese. Assim, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \notin \mathcal{B}_y$ ou existe $B \in \mathcal{B}_y$ tal que $B \notin \mathcal{B}_x$. $\square$

Já nos espaços T_1, exigimos que ambos os abertos da Figura 1.2 existam.

Definição 1.3.5. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Note que ser T_1 é "mais forte" do que ser T_0, pois enquanto o último exige a existência de um aberto que satisfaça ao menos um dentre dois casos, ser T_1 exige a existência de abertos que satisfaçam ambos os casos.

Provavelmente a caracterização mais importante de T_1 é a seguinte:

Proposição 1.3.6. *(X, τ) é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.*

Demonstração. Suponha (X, τ) um espaço T_1. Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Como (X, τ) é T_1, existe um aberto A tal que $y \in A$ e $x \notin A$, isto é, $A \cap \{x\} = \emptyset$. Logo, $y \notin \overline{\{x\}}$. Assim, o único ponto que pode pertencer a $\overline{\{x\}}$ é o próprio x. Ou seja $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

Reciprocamente, sejam $x, y \in X$ distintos. Como $\{x\}$ é fechado para qualquer $x \in X$, então $X \smallsetminus \{x\}$ é um conjunto aberto. Assim, $X \smallsetminus \{x\}$ é um aberto tal que $y \in X \smallsetminus \{x\}$ e $x \notin X \smallsetminus \{x\}$. $\square$

Exemplo 1.3.7. Um conjunto X com a topologia cofinita é sempre T_1. De fato, dados $x, y \in X$ distintos, o complementar de $\{x\}$ é um aberto que não contém x mas contém y.

Para espaços de Hausdorff, já exigimos que os abertos em volta dos pontos sejam disjuntos.

Definição 1.3.8. Dizemos que (X, τ) é T_2 (**espaço de Hausdorff**) se para todo $x, y \in X$ distintos, existem A, B abertos tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Num espaço de Hausdorff, os abertos "separam" pontos.

Exemplo 1.3.9. X munido da topologia cofinita é T_1, mas não é T_2 se X for infinito. De fato, sejam $x, y \in X$ distintos e abertos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$. Temos que $A = X \smallsetminus F_1$ e $B = X \smallsetminus F_2$, com F_1, F_2 finitos. Logo, $A \cap B = X \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ e, como X é infinito, $A \cap B$ é necessariamente não vazio.

Proposição 1.3.10. *Considere (X, d) um espaço métrico. Então tal espaço é de Hausdorff (com a topologia induzida pela métrica).*

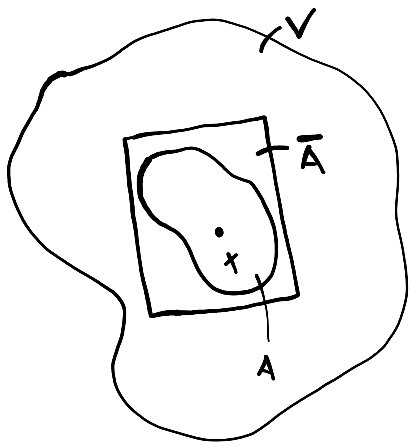


Figura 1.3: Comportamento de vizinhanças em espaços T_3

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Seja $r = d(x, y) > 0$. Vamos mostrar que $B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y) = \emptyset$. Suponha que não. Seja $a \in B_{\frac{r}{2}}(x) \cap B_{\frac{r}{2}}(y)$. Então

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

absurdo, pois $d(x, y) = r$. $\square$

Num espaço topológico regular, os abertos "separam" pontos de fechados.

Definição 1.3.11. Dizemos que (X, τ) é T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$ existirem A, B abertos tais que $x \in A$, $F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Se, além disso, (X, τ) é T_1, dizemos que (X, τ) é um **espaço regular**[1].

O próximo resultado é provavelmente a principal caracterização de espaços T_3:

Veja a Figura 1.3.

Proposição 1.3.12. *Seja (X, τ) um espaço topológico. (X, τ) é T_3 se, e somente se, para todo $x \in X$ e para todo aberto V tal que $x \in V$, existe um aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.*

Demonstração. Suponha (X, τ) espaço T_3. Sejam $x \in X$ e $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Note que $X \smallsetminus V$ é um fechado e $x \notin X \smallsetminus V$. Então existem A, B

[1] essa nomenclatura não é padrão - às vezes se supõe T_1 para regulares, às vezes não

abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $X \smallsetminus V \subset B$. Assim, $A \subset X \smallsetminus B$ que é fechado. Logo, $\overline{A} \subset X \smallsetminus B \subset V$.

Reciprocamente, mostremos que (X, τ) é T_3. Sejam $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então $X \smallsetminus F$ é aberto e contém x. Logo, existe A aberto tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset X \smallsetminus F$. Note que $x \in A$, $F \subset X \smallsetminus \overline{A}$ e $A \cap (X \smallsetminus \overline{A}) = \emptyset$. □

Corolário 1.3.13. *Um espaço topológico (X, τ) é T_3 se, somente se, para todo $x \in X$ existe um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x.*

Demonstração. Veja o Alongamento 1.3.22. □

Exemplo 1.3.14. $\mathbb{R}$ é regular. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$,

Neste e no próximo exemplo já estamos supondo claro que os espaços em questão são T_1.

$$\{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x.

Exemplo 1.3.15. A reta de Sorgenfrey é regular (veja o Exemplo 1.2.9, e considere o Corolário 1.3.13).

Veja o Exercício 1.3.30 para um exemplo de um espaço de Hausdorff que não seja regular.

Definição 1.3.16. Dizemos que (X, τ) é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$, $G \subset B$. Se, além disso, (X, τ) é T_1, dizemos que (X, τ) é **espaço normal**[2].

Num espaço normal, os abertos separam os fechados disjuntos.

Exemplo 1.3.17. Vamos mostrar mais para frente que todo métrico é normal (Corolário 2.2.4).

Exemplo 1.3.18. A reta de Sorgenfrey é normal. Vamos provar tal afirmação. Primeiramente, note que ela é T_1.

Sejam F, G fechados disjuntos. Para cada $a \in F$ e cada $b \in G$, sejam $x(a)$ e $y(b)$ de forma que

$$[a, x(a)[\cap G = \emptyset \text{ e } [b, y(b)[\cap F = \emptyset.$$

Podemos fazer isso pois os complementares de F e G são abertos. Sejam

$$A = \bigcup_{a \in F} [a, x(a)[\text{ e } B = \bigcup_{b \in G} [b, y(b)[.$$

[2]novamente, tal nomenclatura não é completamente padrão. Às vezes se supõe T_1, às vezes não.

Note que $F \subset A$ e $G \subset B$, os quais são abertos. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $c \in A \cap B$. Para tanto, existem $a \in F$ e $b \in G$ tais que $c \in [a, x(a)[\cap[b, y(b)[$.

Caso $a < b$: então $x(a) < b$, pois $b \notin [a, x(a)[$, logo $[a, x(a)[\cap[b, y(b)[= \emptyset$, absurdo. Se $b < a$, obtém-se uma contradição de maneira análoga. É claro que $a = b$ não pode ocorrer por estarmos supondo $F \cap G = \emptyset$.

Exemplo 1.3.19. Veremos mais para frente que o quadrado da reta de Sorgenfrey é regular mas não é normal (Proposicao **??**).

Veremos que até regularidade, as propriedades desta seção são "bem comportadas" e muitas vezes a verificação de se um espaço tem ou não a propriedade é elementar. Mas com a normalidade, a situação muda. Desta forma, um tipo de resultado bastante útil é quando podemos "subir" alguma propriedade até a normalidade. O próximo resultado vai nesta direção: veremos que para um espaço enumerável ser normal basta ele ser regular. A ideia para a demonstração será usada outras vezes no decorrer do texto:

Note que na verdade estamos provando que todo espaço T_3 enumerável é T_4.

Proposição 1.3.20. *Todo espaço enumerável e regular é normal.*

Demonstração. Sejam F e G fechados disjuntos. Faça $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $G = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como o espaço é regular, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe A_m aberto tal que $x_m \in A_m$ e $\overline{A_m} \cap G = \emptyset$ (pela Proposição 1.3.12), bem como B_m aberto tal que $y_m \in B_m$ e $\overline{B_m} \cap F = \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n^* = A_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k} \text{ e } B_n^* = B_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{A_k}.$$

Note que A_n^* e B_n^* são abertos (pois $A \smallsetminus B = A \cap (X \smallsetminus B)$ para $A, B \subset X$).

Sejam $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^*$ e $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^*$. Note que $F \subset A$ e $G \subset B$ (em particular, observe que $A_n^* \cap F = A_n \cap F$). Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que não. Então existe $z \in A \cap B$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $z \in A_n^*$ e $z \in B_m^*$.

Vamos fazer o caso $n \leq m$, o outro é análogo. Então $z \in A_n^* = A_n \smallsetminus \bigcup_{k \leq n} \overline{B_k}$ e $z \in B_m^* = B_m \smallsetminus \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k}$. Note que, como $m \geq n$, $z \notin \bigcup_{k \leq m} \overline{A_k} \supset \overline{A_n} \supset A_n \supset A_n^*$, contradição, pois supomos $z \in A_n^*$. □

Alongamentos

Alongamento 1.3.21. Mostre que um espaço finito é T_1 se, e somente se, tem a topologia discreta.

Alongamento 1.3.22. Demonstre o Corolário 1.3.13.

Alongamento 1.3.23. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que T_4 é equivalente à seguinte propriedade: "Para todo F fechado e todo V aberto tal que $F \subset V$, existe um aberto U tal que $F \subset U \subset \overline{U} \subset V$".

Exercícios

Exercício 1.3.24. Dê um exemplo de um espaço T_0 que não seja T_1.

Exercício 1.3.25. (X, τ) é T_0 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos tivermos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Exercício 1.3.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:

(a) (X, τ) é T_1;

(b) $\forall x \in X$, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de abertos tal que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x\}$;

(c) $\forall x \in X$ existe $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} V = \{x\}$;

Exercício 1.3.27. Prove a cadeia de implicações: (X, τ) é normal $\Rightarrow (X, \tau)$ é regular $\Rightarrow (X, \tau)$ é $T_2 \Rightarrow (X, \tau)$ é $T_1 \Rightarrow (X, \tau)$ é T_0.

Exercício 1.3.28. Sejam (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que se (X, τ) é T_i para $i = 0, ..., 3$, então Y também é.

Exercício 1.3.29. Mostre que se Y é subespaço fechado de um espaço normal, então Y também é normal.

Exercício 1.3.30. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma

$$]a, b[\smallsetminus C$$

onde $a < b \in \mathbb{Q}$ e $C \subset \mathbb{R}$ é enumerável. Vamos chamar tal espaço de **reta esburacada**.

(a) Mostre que isso é uma base para tal topologia;

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff;

(c) Mostre que todo subconjunto enumerável é fechado;

(d) Mostre que tal espaço não é regular.

Exercício 1.3.31. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida pela reta de Sorgenfrey é normal.

1.4 Axiomas de Enumerabilidade

Nesta seção vamos começar a investigar quando a existência de determinados conjuntos enumeráveis nos dão propriedades importantes sobre o espaço. Tais propriedades serão muito usadas no decorrer do texto.

Veja o Alongamento 1.4.24 para ver que um ponto ter um sistema fundamental de vizinhanças enumerável é equivalente a ter uma base local enumerável.

Definição 1.4.1. Dizemos que um espaço topológico (X, τ) satisfaz o **primeiro axioma de enumerabilidade** (*1st countable*) se, para todo $x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Neste caso, também dizemos que (X, τ) tem **bases locais enumeráveis**.

Exemplo 1.4.2. Todo espaço métrico (X, d) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Para isso, basta notar que $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

Exemplo 1.4.3. A reta de Sorgenfrey satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, já que $\{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$.

O primeiro axioma de enumerabilidade tem bastante em comum com o conceito de sequência convergente:

Note que esta definição permanece equivalente se trocarmos vizinhança por aberto contendo o ponto (veja o Alongamento 1.4.25).

Definição 1.4.4. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** para $x \in X$ se, para toda vizinhança V de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in V$. Notação: $x_n \to x$.

Proposição 1.4.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $x_n \to x$. Então, $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Demonstração. Seja V vizinhança de x. Seja n_0 da definição de convergência. Note que $x_{n_0} \in V \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Corolário 1.4.6. *Seja (X, τ) espaço topológico e $Y \subset X$. Sejam $x \in X$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de Y. Se $y_n \to x$, então $x \in \overline{Y}$.*

Para espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade, ser ponto aderente pode ser caracterizado por limite de sequências:

A hipótese sobre as bases locais é necessária. Veja o Exemplo 1.4.9.

Proposição 1.4.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico com bases locais enumeráveis. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Então, $x \in \overline{Y}$ se, e somente se, existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de Y tal que $y_n \to x$.*

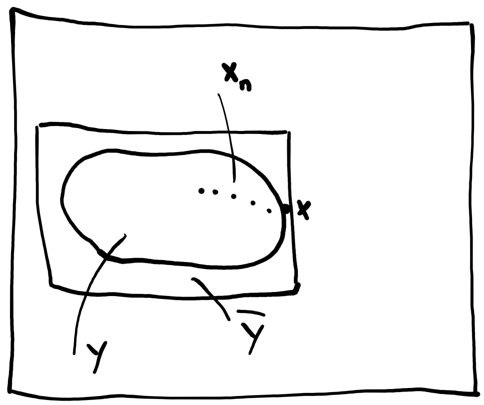


Figura 1.4: Aderência em termos de convergência

Demonstração. Um lado já está feito (vale mesmo sem a hipótese sobre as bases).

Suponha que $x \in \overline{Y}$ e seja $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ sistema fundamental de vizinhanças para x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $y_n \in \left(\bigcap_{k \leq n} V_k\right) \cap Y$. Mostremos que $y_n \to x$. Seja V vizinhança de x. Como $\mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset V$. Seja $n \geq n_0$. Note que $y_n \in \bigcap_{k \leq n} V_k \subset V_{n_0} \subset V$. □

Espaços de Hausdorff tem a propriedade da unicidade de limites:

Proposição 1.4.8. *Seja (X, τ) um espaço topológico de Hausdorff. Se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $x \neq y$. Sejam U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Então, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n \geq n_1$, $x_n \in U$ e para todo $n \geq n_2$, $x_n \in V$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $x_{n_0} \in U \cap V$, que é uma contradição. □

Exemplo 1.4.9. Na reta esburacada, se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_n \longrightarrow x$ para algum x, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$. De fato, temos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é fechado por ser enumerável (veja o Exercício 1.3.30). Em particular, note que $0 \in \overline{]0,1[}$ mas não existe sequência em $]0,1[$ que

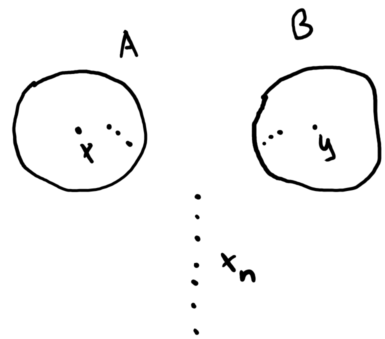


Figura 1.5: A unicidade de limites de sequências

converge para 0. Com isso, temos que a reta esburacada não tem bases locais enumeráveis.

Definição 1.4.10. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 1.4.11. *Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X tal que $x_n \to x$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Seja n_0 tal que, para todo $n \geq n$, $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados $n, m \geq n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

□

Definição 1.4.12. Seja (X, d) um espaço métrico. (X, d) é dito **espaço métrico completo** se toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy é convergente.

O segundo axioma de enumerabilidade é uma versão global do primeiro:

Definição 1.4.13. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **segundo axioma de enumerabilidade** *(2nd countable)* se admite uma base enumerável.

Exemplo 1.4.14. A reta real satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, já que $\{]a, b[\colon a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base.

Proposição 1.4.15. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ). Então, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base local para x. $\square$

Exemplo 1.4.16. A reta de Sorgenfrey não satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. De fato, suponha, por contradição, que satisfaça. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável. Para cada $x \in X$, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, x+1[$. Note que se $x \neq y$, então $B_x \neq B_y$. De fato, sem perda de generalidade, suponha que $x < y$ e note que $x \notin B_y$, pois $B_y \subset [y, y+1[$. Logo, $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ definida por $f(x) = B_x$ é injetora, o que é uma contradição, pois $\mathcal{B}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ não.

Definição 1.4.17. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $D \subset X$ é denso em X se $\overline{D} = X$.

Definição 1.4.18. Dizemos que (X, τ) satisfaz o **terceiro axioma de enumerabilidade** *(3rd countable)* se admite um subconjunto denso enumerável. Neste caso, dizemos também que (X, τ) é um **espaço separável**.

Exemplo 1.4.19. Temos que a reta real e a reta de Sorgenfrey são separáveis pois em ambos os casos $\mathbb{Q}$ é denso.

O segundo axioma de enumerabilidade implica no terceiro (e já vimos que ele implica no primeiro também):

Proposição 1.4.20. *Se um espaço topológico (X, τ) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então ele é separável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base para (X, τ). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_n$ (podemos supor sem perda de generalidade que $B_n \neq \emptyset$). Vamos mostrar que $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso. Sejam $x \in X$ e V vizinhança de x. Como $\mathcal{B}$ é base, existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Note que $x_n \in B_n$. Portanto, $x_n \in V \cap D$. $\square$

No caso de métricos, vale a volta:

Proposição 1.4.21. *Se (X, d) é um espaço métrico e separável, então (X, d) satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.*

Note que a reta de Sorgenfrey nos dá que a hipótese de metrizabilidade é necessária.

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Considere

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x_n) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Vamos mostrar que B é base. Sejam A aberto e $x \in A$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, existe $x_n \in B_{\frac{1}{m}}(x)$. Vamos mostrar que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$. Primeiramente, note que $x \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, pois $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$. Temos também que $B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$, pois, dado $a \in B_{\frac{1}{m}}(x_n)$, temos

$$d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Definição 1.4.22. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço metrizável** se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ.

Com o que temos até o momento, já conseguimos dizer em alguns casos quando um espaço não é metrizável:

Exemplo 1.4.23. A reta de Sorgenfrey não é um espaço metrizável. De fato, temos que este é um espaço separável mas que não admite uma base enumerável. Assim, pela Proposição 1.4.21, que ele não é metrizável.

Veremos outros critérios ao longo do texto.

Alongamentos

Alongamento 1.4.24. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Mostre que são equivalentes:

(i) x admite um sistema fundamental de vizinhanças enumerável;

(ii) x admite uma base local enumerável.

Alongamento 1.4.25. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de X. Mostre que são equivalentes:

(i) $x_n \longrightarrow x$.

(ii) para todo V aberto tal que $x \in V$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

(iii) dado $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças para x, para todo $V \in \mathcal{V}$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in V$.

Alongamento 1.4.26. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que $D \subset X$ é denso se, e somente se, para todo aberto não vazio A, $A \cap D \neq \emptyset$.

Alongamento 1.4.27. Mostre que se (X, τ) é um espaço topológico enumerável que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então (X, τ) também satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.4.28. Mostre que todo subespaço de um espaço que satisfaça o primeiro axioma de enumerabilidade também satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Alongamento 1.4.29. Mostre que todo subespaço de um espaço com base enumerável tem base enumerável.

Alongamento 1.4.30. Mostre que se (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas enumerável e decrescente, isto é, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $V_{n+1} \subset V_n$.

Exercícios

Exercício 1.4.31. Mostre que a reta esburacada não é metrizável.

Exercício 1.4.32. Mostre que na reta esburacada as únicas sequências convergentes são as quase constantes. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita uma **sequência quase constante** se existem x e n_0 tais que $x_n = x$ para todo $n \geq n_0$.

Exercício 1.4.33. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $D \subset X$ denso. Considerando D como subespaço, mostre que se $E \subset D$ é denso em D, então E é denso em X.

Exercício 1.4.34. Mostre que todo subespaço de um espaço que tenha base enumerável é separável.

Exercício 1.4.35. O exemplo deste exercício é chamado de **plano de Niemytski**.

Considere $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ com a topologia de forma que:

(i) se (x, y) é tal que $y > 0$, então uma vizinhança básica de (x, y) é da forma de uma bola aberta centrada em (x, y) que não intercepta o eixo x, isto é $B_\varepsilon((x, y))$ com $0 < \varepsilon < y$;

(ii) Para os pontos da forma $(x, 0)$, uma vizinhança de tal ponto é da forma de uma bola aberta contida em $\{(a, b) : b > 0\}$ e que tangencie o eixo x no ponto $(x, 0)$ (inclua o ponto em tal vizinhança). Ou seja, $B_y((x, y)) \cup \{(x, 0)\}$.

onde $B_r((x, y))$ é a bola com a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que isso define uma topologia.

(b) Mostre que tal espaço é de Hausdorff.

(c) Mostre que tal espaço é regular.

(d) Mostre que tal espaço é separável.

(e) Mostre que o eixo x ($\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$) com a topologia de subespaço tem a topologia discreta.

(f) Mostre que tal espaço não tem base enumerável.

(g) Mostre que tal espaço não é metrizável.

(h) Mostre que não é verdade que todo subespaço de um espaço separável é separável (compare com o Exercício 1.4.34).

Exercício 1.4.36. Mostre que a reta esburacada não é separável.

Exercício 1.4.37. Mostre que, se (X, τ) é um espaço regular que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então (X, τ) é um espaço normal.

Exercício 1.4.38. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $\mathcal{B}$ uma base enumerável para (X, τ) e seja $\mathcal{C}$ uma base qualquer para (X, τ). Então, existe uma família enumerável $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ que é base para (X, τ).

Capítulo 2

Funções

2.1 Funções contínuas

Uma maneira de entender a definição de função contínua é a seguinte: imagine que f seja uma máquina de transformar algo em outra coisa. Para exemplificar, imaginemos que f transforma farinha em pizza. Assim, se queremos obter "y m^2 de pizza", precisamos fornecer x kg de farinha, de forma que $f(x) = y$. Mas, como toda medição acarreta em erros, este processo não tem precisão absoluta. Desta forma, para obtermos "y m^2 de pizza" dentro de uma margem de erro T (tolerância), precisamos fornecer x kg dentro de uma precisão P (exigida pela f). Vamos dizer que f é contínua se dada uma tolerância qualquer, sempre podemos encontrar uma precisão que satisfaça o processo.

O que não seria nada ruim. Mas não sei de onde viria o molho.

Traduzindo para a nossa linguagem, dados (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, f será contínua no ponto x se para toda tolerância T em torno de $f(x)$, existe uma precisão P em torno de x de forma que $f[P] \subset T$. Note que essa última condição simplesmente quer dizer que todo os pontos que satisfazem a precição tem imagem dentro da tolerância. Finalmente, note que estar dentro de uma precisão ou de uma tolerância é simplesmente estar "próximo" de um determinado ponto. Ou seja, basta trabalharmos com estes dois conceitos como sendo vizinhanças:

Definição 2.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Seja também $x \in X$. Dizemos que f é uma função **função contínua no ponto** x se, para toda vizinhança A de $f(x)$ existe uma vizinhança B de x tal que $f[B] \subset A$.

Veja o Alongamento 2.1.17 para ver que esse conceito de fato generaliza aquele normalmente visto em cursos de Cálculo.

Da mesma forma que vizinhança tinha uma tradução mais simples quando vista globalmente, a continuidade também tem:

Definição 2.1.2. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é uma **função contínua** se, para todo aberto A de Y, temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X (i.e., $\forall A \in \rho\ f^{-1}[A] \in \tau$).

De fato, os conceitos apresentados são versões globais e locais de uma mesma coisa:

Proposição 2.1.3. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$, f é contínua no ponto x.*

Demonstração. Suponha f contínua e $x \in X$. Seja A vizinhança de $f(x)$ e A' aberto tal que $f(x) \in A' \subset A$. Assim, $f^{-1}[A']$ é aberto, com $x \in f^{-1}[A']$ (portanto, vizinhança de x) e $f[f^{-1}[A']] \subset A' \subset A$.

Agora, suponha que para todo $x \in X$, f é contínua em x. Seja A aberto em Y. Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in A$, seja B_x vizinhança de x tal que $f[B_x] \subset A$. Sem perda de generalidade, podemos supor B_x aberto[1]. Note que $f^{-1}[A] = \bigcup_{x \in f^{-1}[A]} B_x$ e, portanto, é aberto. $\square$

Exemplo 2.1.4. Considere (X, τ) um espaço topológico. Então a função $I : X \longrightarrow X$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in X$ (**função identidade**) é contínua (a verificação é imediata).

Exemplo 2.1.5. Qualquer função constante é contínua. De fato, sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e considere uma função constante $f : X \to Y$ dada por $f(x) = k$. Seja A um aberto de (Y, σ). Então,

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset, & k \notin A \\ X, & k \in A \end{cases}$$

Ou seja, em ambos os casos $f^{-1}[A]$ é um aberto de (X, τ).

Com a definição global de continuidade, prova-se o seguinte resultado facilmente:

Este resultado é lido como "composta de funções contínuas é contínua". O que era de se esperar.

Proposição 2.1.6. *Sejam (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) e (X_3, τ_3) espaços topológicos e sejam $g : X_1 \to X_2$ e $f : X_2 \to X_3$ funções contínuas. Então, $f \circ g : X_1 \to X_3$ é contínua.*

Demonstração. Seja A um aberto em X_3. Como f é contínua, temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X_2. Agora, como g é contínua, $g^{-1}[f^{-1}[A]]$ é aberto em X_1. Mas, como $g^{-1}[f^{-1}[A]] = (f \circ g)^{-1}[A]$, a proposição está provada. $\square$

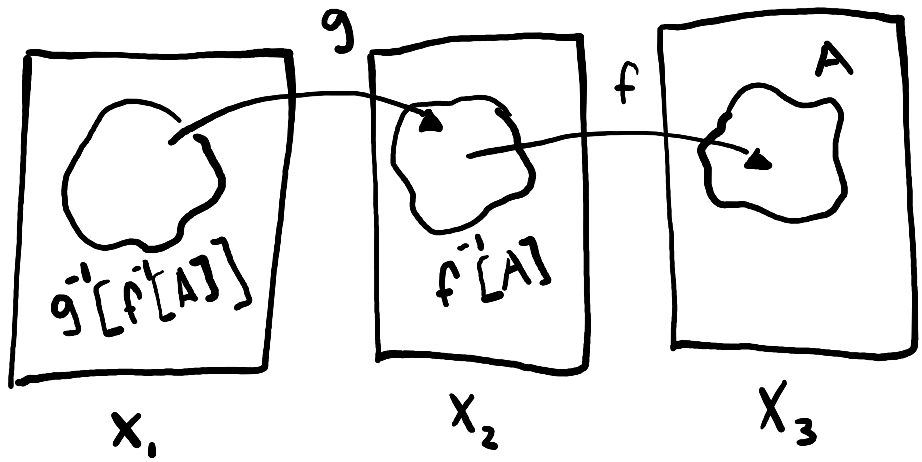


Figura 2.1: Composta de contínuas é contínua (vá da direita para a esqueda)

Densos são "empurrados" por funções contínuas:

Proposição 2.1.7. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função contínua sobrejetora. Se $D \subset X$ é denso em X, então, $f[D]$ é denso em Y.*

Demonstração. Seja $A \subset Y$ aberto não vazio. Note que $f^{-1}[A]$ é aberto em X. Como f é sobrejetor, $f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Logo, existe $d \in D$ tal que $d \in f^{-1}[A]$, ou seja, $f(d) \in A$. Portanto, $f[D] \cap A \neq \emptyset$. □

Corolário 2.1.8. *Imagem contínua de um espaço separável é separável.*

O seguinte exemplo será útil no estudo de sequências convergentes:

Exemplo 2.1.9. Considere o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia gerada pelos conjuntos

(a) $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\{\infty\} \cup A$, em que $A \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus A$ é finito.

Note que, desta forma, um conjunto contendo ∞ é aberto se, e somente se, apenas uma quantidade finita de elementos de $\mathbb{N}$ não pertence a ele. Chamamos este espaço de **espaço da sequência convergente**.

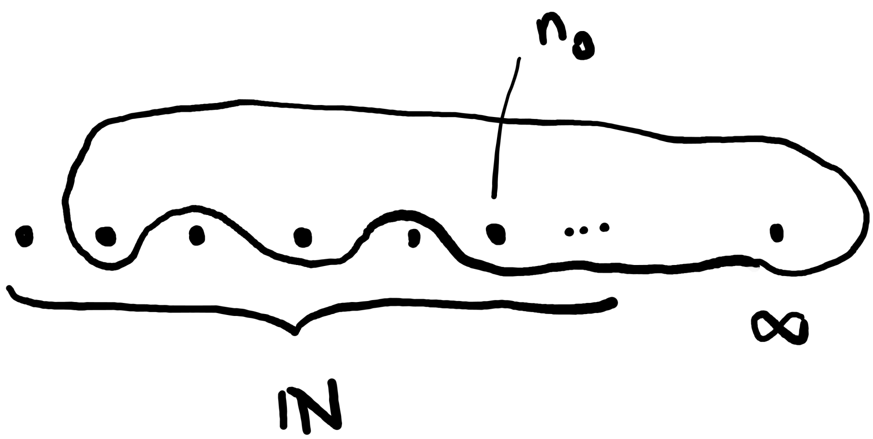


Figura 2.2: Típica vizinhança de ∞

Proposição 2.1.10. *Seja (X, τ) espaço topológico e seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$ uma função ($\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ com a topologia do exemplo anterior). Então, f é contínua se, e somente se, $f(n) \to f(\infty)$ (i.e., a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que cada $x_n = f(n)$, é convergente para $x = f(\infty)$).*

Demonstração. Suponha f contínua. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é aberto. Logo, $\mathbb{N} \smallsetminus f^{-1}[A]$ é finito, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $n \in f^{-1}[A]$. Logo, para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$.

Agora, suponha que $f(n) \to f(\infty)$. É imediato que f é contínua em todo $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que f é contínua em ∞. Seja A aberto tal que $f(\infty) \in A$. Como $f(n) \to f(\infty)$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, $f(n) \in A$. Logo, $\{n : n \geq n_0\} \subset f^{-1}[A]$ e $\infty \in \{n : n \geq n_0\} \cup \{\infty\} \subset f^{-1}[A]$. □

Funções contínuas também "empurram" sequências convergentes:

Proposição 2.1.11. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, $f : X \to Y$ função contínua e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Então, $f(x_n) \to f(x)$.*

Demonstração. Considere a função $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$, com $h(n) = x_n$ e $h(\infty) = x$. Note que h é contínua pela Proposição anterior. Note também

[1]caso contrário, basta "reduzi-lo" a um aberto que contenha x

que $f \circ h$ é contínua, pois é composta de contínuas. Note que $(f \circ h)(n) = f(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ e que $(f \circ h)(\infty) = f(\infty)$. Logo, pela Proposição anterior, aplicada a $f \circ h$, temos $f(x_n) \to f(x)$. $\square$

No caso de espaços "ricos" em sequências convergentes, também temos a volta do resultado anterior:

Proposição 2.1.12. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (X, τ) possui bases locais enumeráveis. Dada $f : X \to Y$ uma função, temos que f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to x$, temos que $f(x_n) \to f(x)$.*

Veja também o Exercício 2.1.22.

Demonstração. Já está feito supondo f contínua.

Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x. Seja A aberto em Y tal que $f(x) \in A$. Mostremos que existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}[A]$. Suponha, por contradição, que não existe. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_{k \leq n} B_k \not\subset f^{-1}[A]$. Seja $x_n \in \bigcap_{k \leq n} B_k$ tal que $f(x_n) \notin A$. Agora, observe que $x_n \to x$. De fato, seja $V \ni x$ aberto. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset V$. Portanto, para todo $m \geq n$, $x_m \in V$. Note, também, que $f(x_n) \nrightarrow f(x)$. De fato, veja que $f(x) \in A$, que é aberto e para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \notin A$, que é contradição. $\square$

Corolário 2.1.13. *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $x_n \to x$, temos que $f(x_n) \to f(x)$.*

Alongamentos

Alongamento 2.1.14. Mostre que $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}[F]$ é fechado (em X) para todo $F \subset Y$ fechado.

Alongamento 2.1.15. Mostre que na definição de função contínua poderíamos supor os abertos sendo básicos (isto é, tanto os abertos em X como em Y serem elementos de bases $\mathcal{B}_X$ e $\mathcal{B}_Y$ fixadas previamente).

Alongamento 2.1.16. Mostre o análogo do Alongamento anterior para a definição de continuidade num ponto, trocando vizinhança por "elemento de uma base local" fixada.

Alongamento 2.1.17. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \to X_2$ uma função. Mostre que, para cada $x \in X_1$, são equivalentes:

Para aqueles que gostam de ε's e δ's.

(a) f contínua em x (com as topologia induzidas pelas métricas);

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in X$, $d_1(x, y) < \delta \to d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Alongamento 2.1.18. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $Z \subset X$ subespaço de X. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que$(f \restriction Z) : Z \to Y$ é contínua.

Exercícios

Exercício 2.1.19. Seja (X, τ) espaço topológico. Seja A um aberto fechado em X. Mostre que a **função característica** de A é contínua. Isto é, que a função $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua (considere em $\{0, 1\}$ a topologia discreta (ou a induzida por $\mathbb{R}$, que dá na mesma)).

Exercício 2.1.20. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Sejam $F_1, ..., F_n \subset X$ fechados tais que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = X$. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função.

(a) Mostre que se $f \restriction F_i$ é contínua para todo $i = 1, ..., n$, então f é contínua;

(b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada F_i não seja fechado).

(c) Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de que cada F_i ser fechado é necessária no item (a).

Exercício 2.1.21. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Seja $(A_i)_{i \in I}$ família de abertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Seja $f : X \longrightarrow Y$.

(a) Mostre que se $f \restriction A_i$ é contínua para todo $i \in I$, então f é contínua.

(b) Note que a volta é imediata (mesmo que cada A_i não seja aberto).

Exercício 2.1.22. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, sendo que (X, τ) satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Mostre que podemos melhorar a Proposição 2.1.12 para $f : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente em X, temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

2.2 Lema de Urysohn

Nesta seção veremos uma equivalência entre a normalidade e a existência de determinadas funções contínuas. Comecemos com o “lado fácil”:

Proposição 2.2.1. *Seja (X, τ) um espaço topológico de modo que, para todos $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que, para todo $x \in F$, $f(x) = 0$ e, para todo $y \in G$, $f(y) = 1$. Então, (X, τ) é T_4.*

Demonstração. Note que $F \subset f^{-1}\left[[0, \frac{1}{2}[\right]$ e $G \subset f^{-1}\left[]\frac{1}{2}, 1]\right]$ e, por f ser uma função contínua, tais conjuntos são abertos e disjuntos. □

Com este resultado, podemos mostrar facilmente a normalidade de espaços métricos:

Definição 2.2.2. Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ conjuntos não vazios. Definimos $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso $A = \{a\}$, denotamos $d(A, B) = d(a, B)$ (analogamente para $B = \{b\}$).

Exemplo 2.2.3. Sejam (X, d) espaço métrico e $A \subset X$ um conjunto não vazio. Então, a função $f : X \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, A)$ é contínua.

Demonstração. Seja $a \in A$ e sejam $x, y \in X$. Temos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Assim,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Analogamente, temos

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x).$$

Portanto, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Com isso, temos que, dado $\varepsilon > 0$, para $x, y \in X$, temos $d(x, y) < \varepsilon \to d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. O que mostra que tal função é contínua (ver Alongamento 2.1.17). □

Corolário 2.2.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, (X, d) é normal.*

Demonstração. T_1 é imediato (já feito).

Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Considere a função $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, F)(1 - d(x, G))}{d(x, F) + d(x, G)}.$$

f satisfaz as hipóteses da Proposição 2.2.1 e daí, segue o resultado. □

A continuidade segue da continuidade de operações básicas (exercício) e de que composta de funções contínuas é contínua.

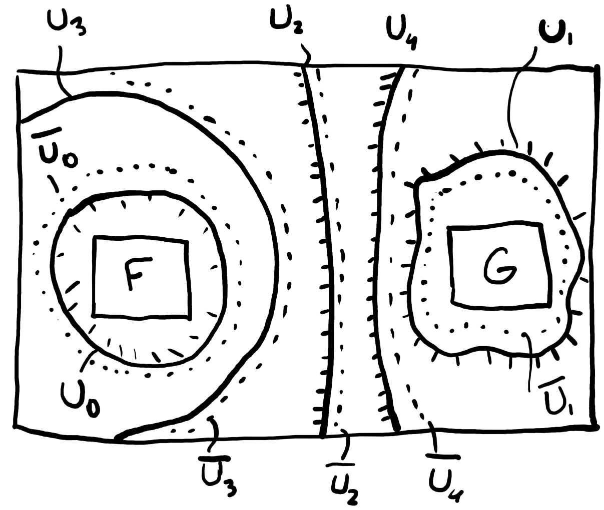


Figura 2.3: Abertos intercalados

Agora vamos provar o “lado difícil” da equivalência. Nesta demonstração usaremos muitas vezes o seguinte fato: Se (X, τ) é T_4 e F é um fechado contido num aberto A, então existe um aberto B tal que $F \subset B \subset \overline{B} \subset A$ (note que isto é, na verdade, equivalente à ser T_4, vide o Alongamento 1.3.23.

Teorema 2.2.5 (**Lema de Urysohn**). *Seja* (X, τ) *um espaço topológico* T_4*. Sejam* $F, G \subset X$ *fechados disjuntos. Então existe uma função contínua* $f : X \to [0, 1]$ *tal que, para todo* $x \in F$*,* $f(x) = 0$ *e, para todo* $x \in G$*,* $f(x) = 1$*.*

Demonstração. Seja $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, de forma que $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ e $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$. Vamos definir por indução uma família $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos de X, de forma que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) $F \subset U_n \subset \overline{U_n} \subset X \smallsetminus G$;

(b) se $q_n < q_m$, então $\overline{U_n} \subset U_m$.

Atenção com a ordem aqui: não estamos usando a ordem dos naturais, mas sim a ordem dos racionais. Por exemplo, suponha que $q_0 = 0$; $q_1 = 1$; $q_2 = \frac{1}{2}$, $q_3 = \frac{1}{3}$ e $q_4 = \frac{2}{3}$. Então teríamos que $U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_3 \subset \overline{U}_3 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_4 \subset \overline{U}_4 \subset U_1$

Mostremos que existe tal família.

Seja U_0 aberto tal que $F \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset X \smallsetminus G$ (note que U_0 existe por (X, τ) ser T_4). Seja U_1 aberto tal que $\overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset X \smallsetminus G$ (novamente, tal U_1 existe por (X, τ) ser T_4). Note que as condições (a) e (b) impostas acima estão satisfeitas.

Seja U_2 aberto tal que $\overline{U_0} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1$ (lembre-se que o índice 2 em U_2 faz referência ao racional q_2, e este é tal que $0 < q_2 < 1$, em particular, U_2 satisfaz (a) e (b)).

Suponha U_j definido para todo $j \leq k$, com $k \geq 2$, de forma que estejam satisfeitas as condições (a) e (b) (vamos chamar isso de "hipótese de indução" (HI)).

Seja $i \leq k$ de forma que

$$q_i = \max\{q_n : n \leq k, q_n < q_{k+1}\}.$$

Note que q_i está bem definido, devido a $q_0 = 0$. Seja $j \leq k$ de forma que

$$q_j = \min\{q_n : n \leq k, q_{k+1} < q_n\}.$$

Novamente, tal número está bem definido, devido a $q_1 = 1$.

Por HI, temos $\overline{U_i} \subset U_j$; por (X, τ) ser T_4, podemos tomar U_{k+1} aberto tal que $\overline{U_i} \subset U_{k+1} \subset \overline{U_{k+1}} \subset U_j$. Vamos mostrar U_{k+1} satisfaz (a) e (b).

Fazendo o mesmo exemplo que apresentamos antes, quando $k + 1 = 2$, teríamos que $q_i = 0$ e $q_j = 1$. Já quando $k + 1 = 3$, teríamos $q_i = q_0$ e $q_j = q_2$. Os números q_i e q_j idicam o "lugar" onde U_{k+1} deve ser encaixado.

De fato, temos (a) pois

$$F \subset U_i \subset \overline{U_i} \subset U_{k+1} \subset \overline{U_{k+1}} \subset U_j \subset \overline{U_j} \subset X \smallsetminus G$$

Note que tanto a primeira quanto a última inclusão decorrem de HI.

Para a condição (b), seja $m \leq k$. Temos dois casos: $q_m < q_{k+1}$ e $q_{k+1} < q_m$. Vamos fazer o caso em que $q_{k+1} < q_m$ (o outro caso é análogo e é o Alongamento 2.2.9). Note que $q_m \geq q_j$. Temos dois subcasos aqui: se $q_m = q_j$, segue trivialmente de nossas hipóteses, já que

$$\overline{U_{k+1}} \subset U_j$$

Agora, se $q_j < q_m$, segue de (HI) que

$$\overline{U_{k+1}} \subset U_j \subset \overline{U}_j \subset U_m.$$

Agora vamos construir a função do enunciado. Seja $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \inf(\{q_n : x \in U_n\} \cup \{1\}),$$

para todo $x \in X$. Claramente, $f(x) \in [0, 1]$ para qualquer $x \in X$. Suponha que $x \in F$. Neste caso, temos por construção que $x \in U_0$, donde $f(x) = 0$; se tivermos $x \in G$, então $x \notin U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $f(x) = 1$ (note que, em ambos os casos, utilizamos a condição (a)). Resta apenas mostrar que f é contínua. Considere as seguintes afirmações sobre $\alpha \in]0, 1[$:

Boa parte do argumento aqui segue diretamente do fato dos U_n's estarem encaixados na mesma ordem que os respectivos q_n's.

(i) $f^{-1}[[0,\alpha[]$ é aberto: Seja $x \in X$ tal que $0 \leq f(x) < \alpha$. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < q_n < \alpha$. Vamos mostrar que

$$x \in U_n \subset f^{-1}[[0,\alpha[].$$

Primeiramente, note que $x \in U_n$ pois, caso contrário, teríamos que $f(x) \geq q_n$, contrariando nossa hipótese. Agora seja $y \in U_n$. Assim, $f(y) \leq q_n$ e, portanto, $f(y) \in [0,\alpha[$ como queríamos.

(ii) $f^{-1}[]\alpha,1]]$ é aberto: Seja $x \in X$ tal que $\alpha < f(x) \leq 1$. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < q_n < f(x) < 1$. Vamos mostrar que

$$x \in X \smallsetminus \overline{U_n} \subset f^{-1}[]\alpha,1]].$$

Primeiramente, note que $x \in X \smallsetminus \overline{U_n}$. Pois, caso contrário, teríamos que $x \in \overline{U_n} \subset U_m$ para todo m tal que $q_m > q_n$. Logo, $f(x) \leq q_n$ contrariando nossa hipótese. Agora seja $y \in X \smallsetminus \overline{U_n}$. Note que $f(y) \geq q_n$ e, portanto, $f(y) \in]q_n,1]$ como queríamos.

Note que abertos da forma $]\alpha,\beta[, [0,\alpha[,]\beta,1]$ formam uma base para $[0,1]$ e que $]\alpha,\beta[= [0,\beta[\cap]\alpha,1]$. Como $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ em geral, concluímos que a imagem inversa de um aberto de uma base fixada é aberta. Logo, f é contínua. $\square$

Corolário 2.2.6. *Um espaço topológico (X,τ) é T_4 se, e somente se, para quaisquer fechados $F,G \subset X$ disjuntos existir uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.*

Corolário 2.2.7. *Um espaço topológico (X,τ) T_1 é normal se, e somente se, para quaisquer fechados $F,G \subset X$ disjuntos existir uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.*

Podemos pensar que espaços normais são aqueles em que funções contínuas separam fechados disjuntos. Ao tentarmos fazer o análogo para separação entre pontos e fechados, obtemos um novo axioma de separação:

Definição 2.2.8. Dizemos que (X,τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existir $f : X \to [0,1]$ contínua, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in F$. No caso que (X,τ) também é T_1, dizemos que (X,τ) é um espaço **completamente regular**.

Alongamentos

Alongamento 2.2.9. Complete a demonstração do Lema de Urysohn, para o caso em que $m \leq k$ e $q_m < q_{k+1}$.

Alongamento 2.2.10. Mostre que todo espaço completamente regular é um espaço regular.

Exercícios

Exercício 2.2.11. Seja (X, d) espaço métrico. Sejam $F \subset X$ fechado. Mostre que, dado $x \in X$, $d(x, F) = 0$ se, e somente se, $x \in F$.

Exercício 2.2.12. Mostre que subespaços de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ são $T_{3\frac{1}{2}}$.

Exercício 2.2.13. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que $\preceq$ é uma **ordem parcial** sobre X se, dados $a, b, c \in X$ temos:

(i) $a \preceq a$;

(ii) se $a \preceq b$ e $b \preceq a$, então $a = b$;

(iii) se $a \preceq b$ e $b \preceq c$, então $a \preceq c$.

Mostre que a seguinte relação é uma ordem parcial sobre subconjuntos de um espaço topológico: $A \preceq B$ se, e somente se, $\overline{A} \subset B$ ou $A = B$.

Exercício 2.2.14. Considere $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ como na demonstração do Teorema **2.2.5** e $\preceq$ como definida no exercício anterior.

(a) Mostre que $\preceq$ é uma **ordem total** (isto é, dados a, b, temos que $a \preceq b$ ou $b \preceq a$) sobre $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) Mostre que existe um **isomorfismo de ordem**[2] entre $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ com a ordem $\preceq$ e $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ com a ordem usual.

2.3 Extensões de funções

Definição 2.3.1. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos. Seja $A \subset X$. Dadas $f : A \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas, dizemos que g é uma **extensão contínua** de f se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

[2] $(X, \preceq)$ é isomorfo a $(Y, \leq)$ se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora tal que, para todo $a, b \in X$, $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \preceq b$.

Os valores num denso determinam, no máximo, uma função contínua:

Proposição 2.3.2. *Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (Y, ρ) é de Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ são duas funções contínuas tais que $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$, então $f = g$.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $x \in X$ tal $f(x) \neq g(x)$. Sejam A e B abertos disjuntos tais que $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Note que $f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$ é um aberto contendo x. Logo, existe $d \in f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]$. Note que $f(d) = g(d) \in A \cap B$, contradição. □

Dissemos "no máximo" pois existem casos que uma função contínua num denso não admite qualquer extensão contínua:

Exemplo 2.3.3. Considere $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Note que f é contínua, $\mathbb{N}$ é denso em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (espaço da sequencia convergente) e não existe $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \longrightarrow [0, 1]$ contínua que estenda f.

Note que no mesmo exemplo, temos que f está definida num aberto e não pode ser estendida continuamente ao espaço todo. Vamos agora apresentar um resultado sobre quando podemos estender uma função definida num fechado:

Teorema 2.3.4 (Teorema da Extensão de Tietze). *Seja (X, τ) um espaço T_4. Sejam $M \subset X$ fechado e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $g : X \to \mathbb{R}$ uma extensão contínua de f.*

Note que vale a volta, isto é, se (X, τ) for um espaço topológico tal que para qualquer função contínua $f : M \to \mathbb{R}$, com $M \subset X$ fechado, existir uma extensão contínua $g : X \to \mathbb{R}$, então (X, τ) é T_4. De fato, dados $F, G \subset X$ fechados disjuntos, a função $f : F \cup G \to \{0, 1\}$ dada por $f(x) = 1$ se $x \in F$ e $f(x) = 0$ caso $x \in G$; é contínua, donde segue que existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua com $g(x) = 1$ se $x \in F$ e $g(x) = 0$ caso $x \in G$; note que $g^{-1}\left[]0, \frac{1}{2}[\right] \supset G$ e $g^{-1}\left[]\frac{1}{2}, 1[\right] \supset F$ são abertos disjuntos.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos provar alguns lemas auxiliares.

Lema 2.3.5. *Sejam (X, τ) T_4, $M \subset X$ fechado e $f_0 : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f_0(x)| \leq c$, para todo $x \in M$ (com $c \in \mathbb{R}_{>0}$ fixado). Então existe $g : X \to \mathbb{R}$ contínua, tal que*

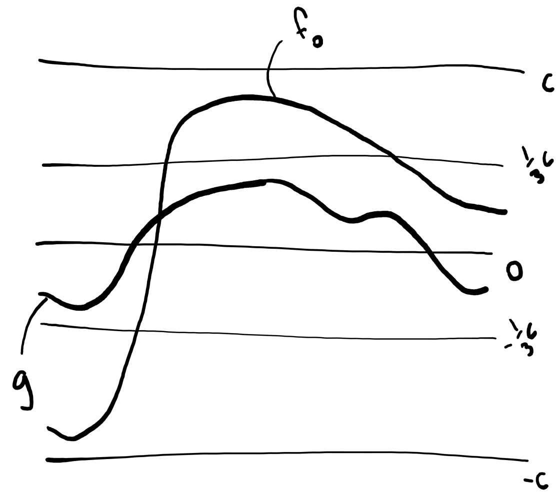


Figura 2.4: A ideia para o Lema 2.3.5

(a) $|g(x)| \leq \frac{1}{3}c$, *para todo* $x \in X$*;*

(b) $|f_0(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}c$, *para todo* $x \in M$*.*

Demonstração. Sejam $A = f_0^{-1}\left[\left[-c, -\frac{1}{3}c\right]\right]$ e $B = f_0^{-1}\left[\left[\frac{1}{3}c, c\right]\right]$. Note que A e B são disjuntos e fechados de M, pois são imagens inversas de fechados via função contínua. Como M é fechado em X, temos A e B são disjuntos e fechados em X.

Pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \to [0, 1]$ contínua tal que $h[A] = \{0\}$ e $h[B] = \{1\}$. Note que a função $g(x) = \frac{2}{3}c \cdot \left(h(x) - \frac{1}{2}\right)$ satisfaz as condições (a) e (b) desejadas (ver Alongamento 2.3.8). □

Lema 2.3.6. *Sejam* (X, τ) T_4*,* $M \subset X$ *fechado e* $f : M \to [-1, 1]$ *contínua. Então existe* $g : X \to [-1, 1]$ *uma extensão contínua de* f*.*

Demonstração. Vamos definir $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funções contínuas de X em $[-1, 1]$ satisfazendo

(a) $|g_i(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i$, para todo $x \in X$;

(b) $\left|f(x) - \sum_{j=0}^{i} g_j(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i$, para todo $x \in M$.

Para definir g_0, aplicamos o Lema 2.3.5 para f e $c = 1$ (note que tal valor de c se deve ao fato de f ser limitada por 1 pela hipótese deste lema). Suponha definidas $g_0, \ldots, g_i$, de modo a valer (a) e (b). Vamos definir g_{i+1}.

Aplique o Lema anterior para $f - \sum_{j=0}^{i}(g_i \restriction M)$ e $c = \left(\frac{2}{3}\right)^i$. Note que $f - \sum_{j=0}^{i}(g_i \restriction M)$ é contínua (por ser soma de funções contínuas) e limitada pela constante c escolhida (pois $g_0, \ldots, g_i$ satisfazem b). É imediato verificar que g_{i+1} satisfaz (a) e (b).

Defina $g : X \to [-1, 1]$ como $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_i(x)$, para todo $x \in X$ (note que tal definição faz sentido devido à condição (a)). Pela condição (b), temos que g estende f. Resta apenas mostrar que g é contínua.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in X$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como cada g_i é contínua, existe A_i vizinhança de x tal que para todo $y \in A_i$, $|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)}$. Seja $A = \bigcap_{i=0}^{n_0} A_i$ (note que A é vizinhança de x). Seja $y \in A$. Temos

$$
\begin{array}{rcl}
|g(x) - g(y)| & \leq & \sum_{i=0}^{\infty} |g_i(x) - g_i(y)| \\
& = & \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |g_i(x) - g_i(y)| \\
& \leq & \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (|g_i(x)| + |g_i(y)|) \\
& \leq & \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i\right) \\
& \leq & \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \\
& \leq & \sum_{i=0}^{n_0} |g_i(x) - g_i(y)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} \\
& < & (n_0 + 1)\frac{\varepsilon}{2(n_0+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
& = & \varepsilon
\end{array}
$$

□

Finalmente, podemos passar à demonstração do Teorema:

Demonstração do Teorema da Extensão de Tietze (2.3.4). Note que basta mostrarmos o resultado para $f : M \to]-1, 1[$ (pois existe $\varphi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ bijetora contínua com inversa contínua e, portanto, o argumento segue via composições adequadas - veremos mais sobre isso em 2.4.14).

Pelo Lema 2.3.6, existe $g : X \to [-1, 1]$ contínua que estende f. Seja $M' = g^{-1}[\{-1, 1\}]$. Note que M e M' são fechados disjuntos. Pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \to [0, 1]$ contínua tal que $h[M] = \{1\}$ e $h[M'] = \{0\}$. Finalmente, note que a função desejada é $F : X \to]-1, 1[$ dada por $F(x) = g(x)h(x)$. □

Exemplo 2.3.7. Considere (X, τ) como o plano de Niemytski (ver Exercício 1.4.35). Vamos mostrar que tal espaço não é normal. Faremos isso de duas maneiras (ambas usam um argumento de cardinalidade - escolha a que deixar você mais confortável).

Por ser T_1, afirmar que X não é normal equivale a afirmar que X não é T_4. Suponha, por absurdo, que X seja T_4. Note primeiramente que $R = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em X e, como R é discreto, qualquer subconjunto $F \subset R$ é fechado em R e, por conseguinte, também é fechado em X. Note que F e $R \setminus F$ são disjuntos e fechados em X. Vamos agora terminar de duas maneiras diferente:

- Aplicando o Teorema de Tietze, temos que, para cada $F \subset R$, existe $f_F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f_F[F] = \{0\}$ e $f_F[R \smallsetminus F] = \{1\}$. Note que, se $F \neq G$, então $f_F \neq f_G$. Logo, temos uma quantidade maior igual que $|\wp(R)|$ de funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$. Por outro lado, seja $D \subset X$ denso enumerável. Então existem $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ funções (contínuas ou não) saindo de D e chegando em $\mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 2.3.2, existem, no máximo $|\mathbb{R}|$ funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$. Como $|\wp(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$, temos uma contradição.

  Isso é um fato que poder ser facilmente provado usando-se um pouco de teoria dos conjuntos.

- Aplicando diretamente o definição de T_4, para cada $F \subset R$, existem abertos (em X) $A(F)$ e $B(F)$ disjuntos tais que $F \subset A(F)$ e $R \setminus F \subset B(F)$.

  Vamos mostrar que, se $F \neq G$, então $A(F) \neq A(G)$. Sejam $F, G \subset R$ com $F \neq G$. Sem perda de generalidade, suponha $F \setminus G \neq \emptyset$. Como $F \setminus G = F \cap (R \setminus G)$, segue que $B(G) \cap A(F) \neq \emptyset$, mas como $A(G) \cap B(G) = \emptyset$, temos necessariamente $A(F) \neq A(G)$.

  Seja D denso enumerável em X. Defina $A'(F) = A(F) \cap D$ e $B'(F) = B(F) \cap D$. Por argumentação análoga à anterior, vemos que se $F \neq G$, então $A'(F) \neq A'(G)$. Assim, obtemos $\varphi : \wp(R) \to \wp(D)$ dada por $\varphi(F) = A'(F)$, uma função injetora, o que é absurdo, uma vez que $|\wp(R)| > |\wp(D)|$.

Estas duas demonstrações apresentadas aqui podem ser generalizadas pelo Lema de Jones (ver Exercício 2.3.10).

Alongamentos

Alongamento 2.3.8. Prove que a função $g : X \to \mathbb{R}$ dada na demonstração do Lema 2.3.5 satisfaz as condições (a) e (b).

Alongamento 2.3.9. Mostre o Lema de Urysohn a partir do Teorema de Tietze.

Exercícios

Exercício 2.3.10. Prove o seguinte caso particular do **Lema de Jones**: Seja (X, τ) espaço topológico separável. Se existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $|D| = \mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo), então (X, τ) não é T_4.

2.4 Homeomorfismos

Nesta seção vamos apresentar como formalizar a ideia que dois espaços são o mesmo do ponto de vista topológico.

Definição 2.4.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um **homeomorfismo**, se f é bijetora, contínua e f^{-1} é contínua. Neste caso, dizemos que (X, τ) e (Y, σ) são **homeomorfos**.

Definição 2.4.2. Chamamos uma propriedade P de **propriedade topológica**, se ela é preservada por homeomorfismos (isto é, se (X, τ) e (Y, σ) são espaços homemorfos, então (X, τ) tem a propriedade P se, e somente se, (Y, σ) tem).

Exemplo 2.4.3. Todos os axiomas de separação e de enumerabilidade que apresentamos são propriedades topológicas. Por exemplo, provamos no Corolário 2.1.8 que se X é separável e $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetora, então Y também é separável. Assim, se f é um homeomoforfismo entre X e Y, temos que o fato de X ser separável implica Y ser separável. Já a função f^{-1} nos dá que Y ser separável implica que X também é. Veja também o Exercício 2.4.23.

Exemplo 2.4.4. Seja o conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\}$. Sobre este conjunto podemos ter a métrica d_1, herdada da métrica usual em $\mathbb{R}$ e, também, podemos ter a métrica discreta d_2, dada por

$$d_2(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

O espaço (X, d_1) não é completo, pois $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}}$ é uma sequência de Cauchy que não converge em (X, d_1). Por outro lado, (X, d_2) é completo, pois com a métrica discreta, qualquer espaço é completo.

A métrica d_1 induz a topologia τ sobre X que é a topologia induzida de $\mathbb{R}$ sobre X. Por outro lado, a métrica d_2 induz a topologia discreta σ sobre X. Note que, neste caso, $\tau = \sigma$. Portanto, a função $f : (X, d_1) \to (X, d_2)$, dada por $f(x) = x$ é um homeomorfismo.

Logo, apesar da propriedade "ser sequência convergente" ser uma propriedade topológica, a propriedade "ser sequência de Cauchy" não é.

Veja o Alongamento 2.4.16

Definição 2.4.5. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem total** se para $x, y \in X$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 2.4.6. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado. Chamamos de **topologia da ordem** sobre $(X, \leq)$ a topologia gerada pelos seguintes conjuntos (para todo $a, b \in X$):

(a) $]a, b[= \{x \in X : a < x < b\}$;

(b) $[a, b[= \{x \in X : a \leq x < b\}$, caso $a = \min X$;

(c) $]a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$, caso $b = \max X$.

Exemplo 2.4.7. As topologias usuais sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ e $[0, 1]$ são as topologias induzidas pelas ordens usuais dos respectivos conjuntos.

Definição 2.4.8. Sejam $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ espaços ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e, para todo $a, b \in X$, temos $a \leq b$ se, e somente se, $f(a) \preceq f(b)$.

Proposição 2.4.9. *Uma topologia da ordem sempre é de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Então, se $x \neq \min X$ e $y \neq \max X$, temos que existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ de modo que $\tilde{x} < x < y < \tilde{y}$. Primeiramente, vamos fazer o caso em que existe $c \in X$ tal que $x < c < y$. Neste caso, temos que $x \in]\tilde{x}, c[$, $y \in]c, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, c[\cap]c, \tilde{y}[= \emptyset$. Já no caso em que não existe tal c, temos $x \in]\tilde{x}, y[$, $y \in]x, \tilde{y}[$ e $]\tilde{x}, y[\cap]x, \tilde{y}[= \emptyset$.

Para os casos $x = \min X$ ou $y = \max X$, basta tomar conjuntos como $[x, y[$ e $]x, y]$ e trabalhar como anteriormente. $\square$

Definição 2.4.10. Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem densa** se para todo $x, y \in X$, com $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Exemplo 2.4.11. Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $[0, 1]$ têm as ordens usuais densas enquanto $\mathbb{N}$ não tem.

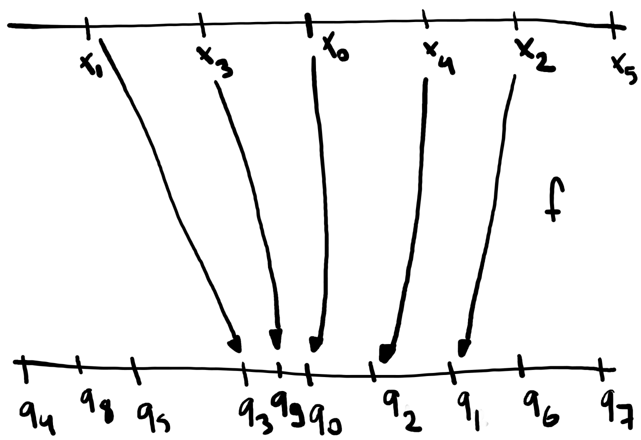


Figura 2.5: Construindo o isomorfismo

Veja o Exercício 2.4.18

Teorema 2.4.12. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo (e, portanto, homeomorfo) a* $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para X. Seja, também, $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração para $\mathbb{Q}$. Vamos definir indutivamente $f : X \to \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem: primeiro, defiminos $f(x_0) = q_0$.

Agora, caso $x_1 < x_0$, tomamos $n = \min\{m : q_m < q_0\}$ e, caso $x_1 > x_0$, tomamos $n = \min\{m : q_0 < q_m\}$ e definimos $f(x_1) = q_n$.

Suponha definidos $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ e tratemos os casos:

- CASO 1: se $x_{n+1} < x_i$, para todo $i \leq n$, tomamos $k = \min\{m : q_m < f(x_i), \forall i \leq n\}$;
- CASO 2: se $x_{n+1} > x_i$, para todo $i \leq n$, tomamos $k = \min\{m : q_m > f(x_i), \forall i \leq n\}$;
- CASO 3: se existem $i, j \leq n$ tais que $x_i < x_{n+1} < x_j$, sejam $I = \max\{x_m : x_m < x_{n+1}, m \leq n\}$ e $J = \min\{x_m : x_m > x_{n+1}, m \leq n\}$. Agora, tomamos $k = \min\{m : f(I) < q_m < f(J)\}$.

Definimos $f(x_{n+1}) = q_k$. Pela construção, f preserva a ordem e é injetora.

Vejamos que f é, também, sobrejetora. Para isso, precisamos mostrar que todo q_n pertence à imagem de f. Suponha que não. Seja m o menor índice tal que q_m não esteja na imagem de f. Seja

A ideia aqui é pegar o primeiro momento em que todos os q_k's antes de q_m já apareceram na imagem.

$$n = \min\{p : \ \forall k < m, \exists s < p \ f(x_s) = q_k\}$$

Temos 3 casos: $x_n < x_s$ para todo $s < n$, $x_n > x_s$ para todo $s < n$ ou existem $a, b < n$ tais que $x_a < x_n < x_b$. Vamos analisar este último caso (os outros são análogos). Sem perda de generalidade, suponha x_a o maior possível como acima e x_b o menor possível. Note que, pelo CASO 3 da construção, $f(x_n) = q_m$ contrariando o fato de q_m não estar na imagem de f. □

Teorema 2.4.13. *Todo espaço totalmente ordenado, com ordem densa, sem maior nem menor elementos, completo e separável é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado. Seja $D \subset X$ denso e enumerável. Vamos mostrar que D satisfaz as hipóteses do teorema anterior (Teorema 2.4.12).

Suponha que m seja o maior elemento de D. Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $m < x_1 < x_2$ (tais elementos existem pois X não possui maior elemento). Note que $]m, x_2[\neq \emptyset$ e $]m, x_2[\cap D = \emptyset$. Mas isso é uma contradição pois D é denso em X. Analogamente, D não tem menor elemento.

Suponha que a ordem de D não seja densa. Então, existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $d_1 < d_2$ e $]d_1, d_2[\cap D = \emptyset$. Mas, como a ordem em X é densa, $]d_1, d_2[\neq \emptyset$, o que é, novamente, uma contradição com o fato de D ser denso em X.

Seja $f : D \to \mathbb{Q}$ o isomorfismo dado pelo teorema anterior. Vamos estender f para X, por

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D, d \leq x\}$$

Note que, pela densidade de D, $\tilde{f}$ preserva a ordem. Pela completude de X, temos que $\tilde{f}$ é bijetora (veja o Exercício 2.4.17). □

Corolário 2.4.14. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então, $]a, b[$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Alongamentos

Alongamento 2.4.15. Mostre que composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.

Alongamento 2.4.16. Mostre que "ser uma sequência convergente" é uma propriedade topológica.

Exercícios

Exercício 2.4.17. Mostre que a função $\tilde{f}$ construída na demonstração de 2.4.13 é bijetora.

Exercício 2.4.18. Se X e Y são conjuntos totalmente ordenados e com a topologia da ordem, mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo de ordem, então f é um homeomorfismo (quando X e Y são considerados com as topologias da ordem).

Exercício 2.4.19. Seja $(X, \leq)$ conjunto totalmente ordenado e com a topologia da ordem. Mostre que se X tem um **ponto isolado** (x é isolado se $\{x\}$ é aberto) então $\leq$ não é uma ordem densa. Dê um exemplo de que não vale a volta.

Exercício 2.4.20. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ são homeomorfos.

Exercício 2.4.21. Dizemos que (X, τ) é um **espaço homogêneo** se para todo $x, y \in X$, existe $f : X \longrightarrow X$ homomorfismo de forma que $f(x) = y$.

(a) Mostre que $\mathbb{R}$ é homogêneo.

(b) Mostre que $]a, b[$ é homogêneo.

(c) Mostre que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como em 2.1.9 não é homogêneo.

Exercício 2.4.22. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função aberta** se $f[A]$ é aberto para todo A aberto em X (definimos uma **função fechada** de maneira análoga). Mostre que, se f é um homeomorfismo, então f é aberta.

Exercício 2.4.23. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua, injetora e aberta. Mostre que, se $\mathcal{B}$ é uma base em Y, então $\{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base em X.

Capítulo 3

Produto

3.1 Definição e conceitos básicos

Nesta seção, vamos apresentar como fazer o produto entre espaços topológicos. Vamos começar com o produto finito e provar algumas propriedades básicas. Depois, quando fizermos o produto geral, veremos que esses resultados são casos particulares. Mas optamos por esta ordem para acostumar o leitor com algumas notações e ideias.

Definição 3.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos. Definimos a **topologia produto** sobre $X \times Y$ como a topologia gerada pelos conjuntos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.

Observação 3.1.2. Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases para (X, τ) e (Y, σ) respectivamente, então $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é base para $X \times Y$ (veja o Alongamento 3.1.10).

Proposição 3.1.3. *Se (X, τ) e (Y, σ) são espaços de Hausdorff, então $X \times Y$ também é.*

Demonstração. Sejam $(a, b), (x, y) \in X \times Y$ distintos. Suponha, sem perda de generalidade, $x \neq a$. Então, existem $U, V \in \tau$ disjuntos tais que $x \in U$ e $a \in V$. Note que $(x, y) \in U \times Y$, $(a, b) \in V \times Y$ e tanto $U \times Y$, quanto $V \times Y$, são abertos disjuntos. $\square$

Proposição 3.1.4. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo (Y, σ) espaço de Hausdorff e $f : X \to Y$ uma função contínua. Então, o* **gráfico** *de f ($G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$) é fechado em $X \times Y$.*

Demonstração. Seja $(x, y) \notin G$. Então, $y \neq f(x)$. Sejam $A, B \in \sigma$ disjuntos tais que $y \in A$ e $f(x) \in B$. Como f é contínua, seja V aberto de X tal que $x \in V$ e $f[V] \subset B$. Note que $(x, y) \in V \times A$ e $(V \times A) \cap G = \emptyset$. De fato, se $z \in V$, então $f(z) \in B$. Portanto, $f(z) \notin A$ e $(z, f(z)) \notin V \times A$. $\square$

Considere a função $\pi_X : X \times Y \to X$ dada por $\pi_X(x, y) = x$. Note que π_X é contínua ($\pi_X^{-1}[A] = A \times Y$). Esta função é chamada de **função projeção** em X. O fato de querermos que este tipo de função seja contínua motiva a definição da topologia produto em geral: faremos a "menor" topologia que faz com que estas funções sejam contínuas.

Definição 3.1.5. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, em que X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia fraca** induzida por $\mathcal{F}$ a topologia sobre X gerada pelos conjuntos da forma $f_\alpha^{-1}[V]$, onde $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$. Note que, desta forma, cada f_α é contínua (veja o Alongamento 3.1.13).

Definição 3.1.6. Seja $\big((X_\alpha, \tau_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Defina o **produto** dos $\big((X_\alpha, \tau_\alpha)\big)_{\alpha \in A}$ como

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : x_\alpha \in X_\alpha\}$$

com a topologia fraca induzida pelas funções $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ onde cada $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in A} X_\beta \to X_\alpha$ é dada por $\pi_\alpha((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = x_\alpha$ (chamamos x_α de α-ésima **coordenada** de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$).

Esta topologia é chamada de **topologia produto** sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (ou **topologia de Tychonoff**).

Observação 3.1.7. Note que tal topologia é gerada pelos conjuntos da forma $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

onde V é um aberto de X_α. Isso é verdade pois $\pi_\alpha^{-1}[V] = \prod_{\beta \in A} V_\beta$.

Fechando tal família por interseções finitas, temos uma base para a topologia. Ou seja, uma base para tal espaço é formada por conjuntos da forma:

$$\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$$

onde $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito e cada V_α é aberto em X_α. Chamaremos tais abertos de **abertos básicos** do produto.

Proposição 3.1.8. *Se $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma família tal que cada F_α é um fechado em X_α, então $\prod_{\alpha \in A} F_\alpha$ é fechado em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.*

Demonstração. Seja $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \smallsetminus \prod_{\alpha \in A} F_\alpha$. Logo, existe $\alpha \in A$ tal que $x_\alpha \notin F_\alpha$. Note que $V = \prod_{\beta \in A} V_\beta$ onde

$$V_\beta = \begin{cases} X_\alpha \smallsetminus F_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

é um aberto tal que $x \in V$ e $V \cap \prod_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. $\square$

Proposição 3.1.9. *Se cada X_α é T_i, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é T_i, para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

Discutiremos as propriedades $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_4 na próxima seção.

Demonstração. T_0 Exercício.

T_1 Pela proposição anterior e pela caracterização dos unitários serem fechados.

T_2 Sejam $x \neq y$ e $\alpha \in A$ tais que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Sejam U e V abertos disjuntos de X_α tais que $x_\alpha \in U$ e $y_\alpha \in V$. Note que $\prod_{\beta \in A} U_\beta$ e $\prod_{\beta \in A} V_\beta$, onde

$$U_\beta = \begin{cases} U & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$V_\beta = \begin{cases} V & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são abertos que separam x e y.

T_3 Seja $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ e seja $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$ aberto básico (i.e., cada V_α é aberto em X_α e $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito). Para cada α tal que $V_\alpha \neq X_\alpha$ seja W_α aberto em X_α tal que $x_\alpha \in W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$ (usando T_3). Note que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^*$ é uma vizinhança fechada de x onde

$$W_\alpha^* = \begin{cases} \overline{W_\alpha}, & V_\alpha \neq X_\alpha \\ X_\alpha, & V_\alpha = X_\alpha \end{cases}$$

Note, também, que $\prod_{\alpha \in A} W_\alpha^* \subset \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$.

$\square$

Alongamentos

Alongamento 3.1.10. Sejam (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) espaços topológicos e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para eles respectivamente. Mostre que $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ é uma base para $X_1 \times X_2$.

Alongamento 3.1.11. Mostre que um espaço (X, τ) é de Hausdorff se, e somente se, $D = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ é fechado em $X \times X$.

Alongamento 3.1.12. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos não vazios. Seja $y \in Y$.

(a) Mostre que (X, τ) é homeomorfo a $X \times \{y\}$;

(b) Se (Y, σ) é T_1, mostre que $X \times \{y\}$ é fechado (em $X \times Y$).

Alongamento 3.1.13. Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de funções da forma $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$. Mostre que a topologia fraca em X induzida por tal família é a menor topologia sobre X tal que cada f_α é contínua.

Exercícios

Exercício 3.1.14. Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ família de espaços topológicos. Para cada $\alpha \in A$, seja $B_\alpha \subset X_\alpha$. Mostre que $\overline{\prod_{\alpha \in A} B_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha}$.

Exercício 3.1.15. Sejam (X_1, d_1) e (Y_1, d_1) espaços métricos.

O melhor para fazer esse exercício é olhar os exercícios extras abaixo.

(a) Mostre que $d_E : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_E((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica euclidiana**).

(b) Mostre que $d_T : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do taxista**).

(c) Mostre que $d_M : (X_1 \times X_2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ é uma métrica sobre $X_1 \times X_2$ (**métrica do máximo**).

(d) Mostre que todas a métricas dos itens anteriores induzem a topologia do produto entre $X_1 \times X_2$ (e, portanto, são todas equivalentes).

Exercícios extras

Vamos apresentar aqui o conceito de norma que, em particular, ajuda a provar que a métrica euclidiana é de fato uma métrica.

Definição 3.1.16. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamos uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ de um **produto interno** se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$;

(b) $\langle \lambda a, b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle$;

(c) $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$;

(d) $\langle a, a\rangle > 0$ se $a \neq 0$

Exercício 3.1.17. Mostre que $\langle (a,b), (x,y)\rangle = ax+by$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Este é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.1.18. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sejam $a, b \in V$.

(a) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle a, b - \lambda a\rangle = 0$, onde $\lambda = \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}$.

(b) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b\rangle = \langle b - \lambda a, b - \lambda a\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle$, onde λ é o mesmo acima.

(c) Suponha $a \neq 0$. Mostre que $\langle b, b\rangle \geq \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle}$.

(d) Mostre que $\langle a, b\rangle^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$. Esta é a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**.

Definição 3.1.19. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$;

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercício 3.1.20. Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Mostre que a função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ é uma norma sobre V. Chamamos tal norma de norma induzida pelo produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercício 3.1.21. Dada uma $\|\cdot\|$, mostre que $d(x,y) = \|x - y\|$ é uma métrica. Esta é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

Exercício 3.1.22. Mostre que a métrica euclidiana em $\mathbb{R}^2$ é a métrica induzida pela norma induzida pelo produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

3.2 Algumas propriedades sobre produtos

Os axiomas de enumerabilidade são preservados por produtos enumeráveis. Alguns destes resultados podem ser melhorados - veja a seção de exercícios extras abaixo.

Proposição 3.2.1. *Seja $\big((X_n, \tau_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ família de espaços que satisfazem o i-ésimo axioma de enumerabilidade. Então, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também satisfaz o i-ésimo axioma de enumerabilidade.*

Demonstração.

- 1.o axioma de enumerabilidade (base local): seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Seja, também, $\mathcal{V}_n$ base local enumerável para cada x_n. Sem perda de generalidade, suponha que $X_n \in \mathcal{V}_n$. Note que

$$\{\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n : V_n \in \mathcal{V}_n, \{m \in \mathbb{N} : V_m \neq X_m\} \text{ é finito}\}$$

  é enumerável[1] e é uma base local para x. De fato, seja $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aberto básico tal que $x \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \neq X_n$, seja $V_n \in \mathcal{V}_n$ de forma que $x_n \in V_n \subset A_n$ (existe pois $\mathcal{V}_n$ é base local para x_n). Para n tal que $A_n = X_n$, defina $V_n = X_n$. Note que

$$x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

- 2.o axioma de enumerabilidade (base enumerável): análogo (veja Alongamento 3.2.15).

- 3.o axioma de enumerabilidade (separabilidade): para cada $n \in \mathbb{N}$, seja D_n denso enumerável em X_n. Fixe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Defina

$$\begin{aligned} D = \ & \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists F \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que, para todo } n \in F,\ y_n \in D_n \\ & \text{e, para todo } n \notin F,\ y_n = x_n\}. \end{aligned}$$

  Note que D é enumerável. Seja $\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$ aberto básico não vazio. Seja $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que, para $n \notin F$, $V_n = X_n$. Para cada $n \in F$, seja $y_n \in V_n \cap D_n$. Note que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D \cap \prod_{n\in\mathbb{N}} V_n$, onde $y_n = x_n$, para $n \notin F$.

□

O próximo resultado é um bom teste para verificação de continuidade de uma função:

Teorema 3.2.2. *Seja $f : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo $\alpha \in A$, $\pi_\alpha \circ f$ é contínua.*

Um bom teste para ver se você está entendo é ver quem são o domínio e o contra domínio de cada $\pi_\alpha \circ f$.

Demonstração. Se f é contínua, então $\pi_\alpha \circ f$ é contínua (composta de contínuas). Por outro lado, seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ um aberto básico e $F = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ (note que F é finito). Temos assim

$$\begin{aligned} f^{-1}[V] &= f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]\right] \\ &= \bigcap_{\alpha\in F} (\pi_\alpha \circ f)^{-1}[V_\alpha]. \end{aligned}$$

Note que o último termo é aberto pois é interseção finita de abertos. □

Observação 3.2.3. Note que o uso do resultado anterior muitas vezes se dá nesta forma:

$f(x)$dada por $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ é contínua se, e somente se, cada f_α é contínua.

Vejamos agora o comportamento dos últimos axiomas de separação com relação ao produto:

Proposição 3.2.4. *Se cada (X_α, τ_α) é $T_{3\frac{1}{2}}$, então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Seja $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ e $F \subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ fechado tal que $x \notin F$. Seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ um aberto básico tal que $x \in V$ e $V \cap F = \emptyset$. Seja $G = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in G$, seja $f_\alpha : X_\alpha \to [0, 1]$ contínua tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ e $f_\alpha[X_\alpha \setminus V_\alpha] = \{1\}$ (estamos usando $T_{3\frac{1}{2}}$ nas coordenadas).

Considere $f : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to [0, 1]$ dada por $f(y) = \max\{f_\alpha(y_\alpha) : \alpha \in G\}$. Note que $f(x) = 0$. Além disso, $f[F] = \{1\}$, pois se $y \in F$, então existe α tal que $y(\alpha) \notin V_\alpha$, com $\alpha \in G$ (caso contrário, teríamos $V \cap F \neq \emptyset$), donde $f_\alpha(y_\alpha) = 1$. Resta provar que f é contínua. De fato, para cada $\alpha \in G$, defina $g_\alpha = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. Note que cada g_α é contínua e também que $f(x) = \max\{g_\alpha(x) : \alpha \in G\}$ e, portanto, f é contínua (ver Alongamento 3.2.13). □

Proposição 3.2.5. *$\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal, onde $\mathbb{R}_S$ é a reta de Sorgenfrey. Logo, produto de normais não é necessariamente normal.*

Demonstração. Considere $\mathbb{R}_S$. Como já vimos, $\mathbb{R}_S$ é normal. Vamos mostrar que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. Considere $D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}_S\}$. Note que

[1]note que a quantidade de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável e que, para cada F finito fixado, só existe uma quantidade enumerável de possibilidades de abertos

D é discreto e fechado: os conjuntos da forma $[x, x+1[\cap[-x, -x+1[\cap D = \{(-x, x)\}$ são abertos, donde segue que D é discreto; para verificar que é fechado, basta notar que seu complementar é aberto (Exercício 3.2.14).

Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ é separável. Logo, $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ tem um denso enumerável e um discreto fechado de tamanho contínuo. Logo, pelo Lema de Jones (Exercício 2.3.10), $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é normal. $\square$

Vamos agora caminhar para um teorema que iremos usar diversas vezes no texto: o teorema da imersão.

Definição 3.2.6. Sejam $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos, (X, τ) um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Chamamos de **função diagonal** a função

$$\begin{array}{rccc} \Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : & X & \to & \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \\ & x & \mapsto & (f_\alpha(x))_{\alpha \in A} \end{array}$$

Observação 3.2.7. Se cada f_α é contínua, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é contínua (por 3.2.2).

Definição 3.2.8. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **imersão** se $f : X \to f[X]$ é um homeomorfismo. Dizemos neste caso que Y contém uma **cópia** de X (como subespaço).

Definição 3.2.9. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha | \alpha \in A\}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ **separa pontos** se para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ **separa pontos de fechados** se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f[F]}$.

Teorema 3.2.10 (**Teorema da imersão**). *Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha | \alpha \in A\}$ família de funções contínuas. Se $\mathcal{F}$ separa pontos, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é injetora. Se, além disso, $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados, então $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é uma imersão.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$, distintos. Então existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$. Então

$$(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x))_\beta \neq (\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(y))_\beta$$

pois $(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(x))_\beta = f_\beta(x)$ e $(\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha(y))_\beta = f_\beta(y)$.

Já temos que a aplicação é contínua pela Observação 3.2.7. Do parágrafo acima, $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha$ é injetora. Resta mostrar que $\Delta_{\alpha \in A} f_\alpha[F]$ é fechado para todo $F \subset X$ fechado (pois disso segue que sua "inversa" é contínua).

Sejam $z \in \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]} \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[X]$ e $x \in X$ tais que $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = z$. Vamos mostrar que $x \in F$ (e, portanto, que $z \in \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]$). Suponha que não. Logo existe $\beta \in A$ tal que $f_\beta(x) \notin \overline{f_\beta[F]}$ (pois tal família separa pontos de fechados). Seja $V_\beta \subset X_\beta$ aberto tal que $f_\beta(x) \in V_\beta$ e $V_\beta \cap f_\beta[F] = \emptyset$. Para todo $\alpha \in A$, com $\alpha \neq \beta$, denote $V_\alpha = X_\alpha$. Seja $V = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$. Note que $z \in V$, pois $z_\beta = f_\beta(x) \in V_\beta$. Note que $V \cap \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F] = \emptyset$, pois $V_\beta \cap f_\beta[F] = \emptyset$. Logo $z \notin \overline{\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha[F]}$, contradição. □

Já vamos mostrar uma aplicação importante (e um pouco surpreendente) de tal teorema:

Proposição 3.2.11. *Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Então $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] | f$ é contínua$\}$ separa pontos de fechados.*

Demonstração. Decorre diretamente da forma como construímos $\mathcal{F}$ e do fato de X ser completamente regular. □

Corolário 3.2.12. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe A tal que (X, τ) é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha\in A}[0,1]$.*

O fato de podermos "colocar" X dentro de um espaço desta forma terá muitas consequências interessantes.

Demonstração. Como $[0,1]$ é completamente regular, $\prod_{\alpha\in A}[0,1]$ é completamente regular e, portanto, qualquer um de seus subespaços também é. Reciprocamente, se (X, τ) for completamente regular, basta indexar $\mathcal{F} = \{f : X \to [0,1] | f$ é contínua$\}$, donde o resultado segue pelo teorema da imersão. □

Alongamentos

Alongamento 3.2.13. Mostre que, se $f_1, ..., f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $g(x) = \max\{f_1(x), ..., f_n(x)\}$ é contínua (isso termina a demonstração da Proposição 3.2.4).

Alongamento 3.2.14. Mostre que o conjunto D construído na demonstração da Proposição **3.2.5** é fechado.

Alongamento 3.2.15. Mostre que, se cada $(X_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem base enumerável, então $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também tem base enumerável.

Alongamento 3.2.16. Mostre diretamente que se (X, τ) e (Y, σ) são separáveis, então $X \times Y$ é separável.

Exercícios

Exercício 3.2.17. Considere $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ espaços métricos. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada d_n é limitada por 1 (ver o Exercício 1.1.53).

(a) Mostre que $d : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \sup\{d_n(x(n), y(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Esta é chamada de **métrica produto**.

(b) Mostre que não necessariamente a topologia induzida pela métrica produto é a mesma que a topologia produto (induzida pela topologia de cada uma das coordenadas). Uma delas tem mais abertos que a outra. Qual?

(c) Mostre que se o produto tiver apenas finitas coordenadas, ambas topologias coincidem.

Exercício 3.2.18. O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathbb{R}_S$ (reta de Sorgenfrey) não tem base enumerável de uma maneira alternativa.

(a) Suponha que $\mathbb{R}_S$ tem base enumerável. Note que $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ também tem.

(b) Considere D o conjunto determinado em 3.2.5. Note que tal conjunto não tem base enumerável.

(c) Lembre que subsespaço de conjunto com base enumerável também tem base enumerável. Chegue numa contradição.

3.3 Exercícios extras

Aqui vamos apresentar o resultado que mostra que a separabilidade ainda é preservada, mesmo com produtos de comprimento contínuo. Nestes exercícios, vamos usar um pouco mais de argumentos de teoria dos conjuntos do que o usual neste texto.

Exercício 3.3.1. O objetivo deste exercício é mostrar que $\prod_{\alpha\in A} \mathbb{N}$ é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$ ($\mathbb{N}$ com a topologia usual).

(a) Note que podemos supor sem perda de generalidade que $A \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_0 = \{]p, q[\cap A : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Note que $\mathcal{B}_0$ é enumerável.

(b) Para cada $n > 0$, defina $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}_0$ com exatamente n elementos e que sejam 2-2 disjuntos. Note que cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável (use o fato que a quantidade de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável).

(c) Fixe $n \geq 1$. Para cada $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$ e cada $\{J_1, ..., J_n\} \in \mathcal{B}_n$ (vamos supor que $J_i < J_j$ se $i < j$ Isto é, todo elemento de J_i é menor que todo elemento de J_j). Defina $f_{(a_1,...,a_n),\{J_1,...,J_n\}} : A \longrightarrow \mathbb{N}$ por

$$f_{(a_1,...,a_n),\{J_1,...,J_n\}}(\alpha) = \begin{cases} a_i & \text{se } \alpha \in J_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que o conjunto de todas estas funções é enumerável (com n fixado). Seja D o conjunto de todas essas funções (com n variando). Note que D também é enumerável.

(d) Note que $D \subset \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

(e) Mostre que D é denso em $\prod_{\alpha \in A} \mathbb{N}$.

Exercício 3.3.2. O objetivo deste exercício é mostrar que se cada (X_α, τ_α) é separável, então $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ também é separável se $|A| \leq \mathfrak{c}$.

(a) Fixe $D_\alpha \subset X_\alpha$ denso enumerável em cada X_α. Mostre que $\prod_{\alpha \in A} D_\alpha$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$;

(b) Para cada $\alpha \in A$, seja $\varphi_\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow D_\alpha$ bijetora. Note que cada φ_α é contínua.

(c) Defina $f : \prod_{\alpha \in A} \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} D_\alpha$. Mostre que f é contínua.

(d) Conclua que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é separável.

Capítulo 4

Compactos

4.1 Definição e propriedades básicas

Definição 4.1.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura** (ou **recobrimento**) de X se $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Neste caso, chamamos $\mathcal{A}$ de **cobertura aberta** se os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos.

Definição 4.1.2. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um **espaço compacto** se para toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X existe uma **subcobertura** $\mathcal{A}'$ (i.e., $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e $\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A = X$) finita.

Exemplo 4.1.3. Qualquer espaço finito é compacto.

Proposição 4.1.4. *É equivalente a ser compacto: "toda cobertura formada por abertos básicos admite subcobertura finita".*

Demonstração. Que compacto implica tal propriedade é imediato.

Por outro lado, seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ) e seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Para cada $x \in X$, existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A_x$. Para cada x, seja $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A_x$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{x_i} = X$ (aqui, usamos o fato que $\{B_x : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos básicos). Note que $\bigcup_{i=1}^n A_{x_i} = X$ (pois cada $A_{x_i} \supset B_{x_i}$). $\square$

Exemplo 4.1.5. $[0, 1]$ é compacto.

De fato, seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para $[0, 1]$ formada bor abertos básicos (intervalos). Sejam

$$C = \{x \in [0, 1] : \exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \text{ finito, com } \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \supset [0, x]\}$$

$$\alpha = \sup C$$

Tal supremo está bem definido já que $0 \in C$ e por C ser limitado por 1. Vamos mostrar que $\alpha = 1$. Suponha que não. Ou seja, $\alpha < 1$. Seja $]a, b[\subset A \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha \in]a, b[$. Como α é supremo, existe $\beta \in]a, b[\cap C$. Logo, existe uma subcobertura finita $\mathcal{A}'$ para $[0, \beta]$. Note que $\mathcal{A}' \cup \{A\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \frac{\alpha+b}{2}]$, o que contraria a escolha de α, pois $\alpha < \frac{\alpha+b}{2}$. Logo, $\alpha = 1$.

Seja $]a, 1] \in \mathcal{A}$ (existe pois 1 é coberto por algum elemento de $\mathcal{A}$). Como $\alpha \sup C$, existe $\beta \in]a, 1] \cap C$. Isto é, existe subcobertura finita $\mathcal{A}'$ para $[0, \beta]$. Note que $\mathcal{A}' \cup \{A\}$ é subcobertura finita para $[0, 1]$.

Exemplo 4.1.6. $\mathbb{R}$ não é compacto. Para ver isso, basta tomar a cobertura $\{]-n, n[: n \in \mathbb{N}\}$.

Proposição 4.1.7. *Seja (X, τ) espaço compacto e seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto.*

Demonstração. Suponha F fechado. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para F e, para cada $A \in \mathcal{A}$, seja A^* aberto em X tal que $A^* \cap F = A$. Seja $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Note que $\mathcal{A}^* \cup \{X \setminus F\}$ é uma cobertura aberta para X. Como X é compacto, tal cobertura admite subcobertura finita $\mathcal{B}$. Note, também, que $\mathcal{B} \setminus \{X \setminus F\}$ induz uma subcobertura finita de $\mathcal{A}$. □

Se um espaço é de Hausdorff, ele separa pontos de compactos (vamos ver que dá para melhorar ainda mais esse resultado depois).

Lema 4.1.8. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subset X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem A e B abertos tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $y \in K$, sejam A_y e B_y abertos tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como K é compacto, existem $y_1, \ldots, y_n \in K$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset K$. Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i} \qquad \text{e} \qquad B = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}.$$

Veja que ambos são abertos, $x \in A$ e $F \subset B$. Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $z \in A \cap B$. Seja i tal que $z \in B_{y_i}$. Note que, assim, $z \in A_{y_i}$, que é contradição com o fato que $A_{y_i} \cap B_{y_i} = \emptyset$. □

Proposição 4.1.9. *Sejam (X, τ) espaço de Hausdorff e $F \subset X$ compacto. Então F é fechado.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se $x \notin F$, existe A aberto tal que $x \in A \subset X \smallsetminus F$. □

Corolário 4.1.10. *Sejam (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff e $F \subset X$ um conjunto. Então, F é fechado se, e somente se, F é compacto.*

Vamos ver que, na verdade, espaços Hausdorff separam compactos disjuntos.

Proposição 4.1.11. *Seja (X, τ) espaço Hausdorff. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.*

Demonstração. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Pelo Lema 4.1.8, para cada $y \in G$, sejam A_y, B_y abertos tais que $A_y \supset F$, $y \in B_y$ e $A_y \cap B_y = \emptyset$. Como G é compacto (pois é fechado num compacto), existem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i} \supset G$. Agora, sejam

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i} \qquad \mathbf{e} \qquad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}.$$

A e B são abertos, $F \subset A$, $G \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. □

Com isso, temos que em espaços compactos, basta a propriedade de Hausdorff para termos a normalidade:

Proposição 4.1.12. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar o resultado anterior. □

Proposição 4.1.13. *Sejam (X, τ), (Y, σ) espaços topológicos onde X é compacto e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Então Y é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para Y. Note que $\mathcal{B} = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$ é uma cobertura aberta para X. Então, existe $\mathcal{B}'$ subcobertura finita. Assim, se para cada $B \in \mathcal{B}'$ tomamos $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $B = f^{-1}[A_B]$, temos que $\{A_B \in A : B \in \mathcal{B}'\}$ é uma subcobertura finita para Y. □

Corolário 4.1.14. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo Y espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $F \subset X$ é compacto, então $f[F]$ é fechado.*

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior e da Proposição 4.1.9. □

Corolário 4.1.15. *Sejam (X, τ) e (Y, τ) espaços de Hausdorff, sendo X compacto, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Basta usar o resultado que se imagem inversa de fechado é fechado, então a função é contínua (Alongamento 2.1.14). □

Vamos agora olhar para uma versão "local" da compacidade:

Definição 4.1.16. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é **localmente compacto** se todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Proposição 4.1.17. *Se (X, τ) é um espaço compacto de Hausdorff, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Note que X é regular. Portanto, todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, logo, compactas. □

Exemplo 4.1.18. $\mathbb{R}$ é localmente compacto, pois cada $[a, b]$ é compacto.

Proposição 4.1.19. *Seja (X, τ) um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então, (X, τ) é completamente regular.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $f \subset X$ fechado tais que $x \notin F$. Então, $x \in X \smallsetminus F$, que é aberto. Logo, existe V vizinhança compacta de x, tal que $V \subset X \smallsetminus F$. Seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $V \smallsetminus A$ é fechado. Como V é compacto, V é completamente regular (pois é normal). Então, existe $g : V \to [0, 1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $g[V \smallsetminus A] = \{1\}$. Defina $f : X \to [0, 1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in V \\ 1, & x \notin V \end{cases}$$

Note que f é a função desejada (veja Alongamento 4.1.25). □

Alongamentos

Alongamento 4.1.20. Seja (X, τ) um espaço topológico. Seja $\mathcal{B}$ uma base para (X, τ). Mostre que $\mathcal{B}$ é um recobrimento aberto para (X, τ).

Alongamento 4.1.21. Mostre que a reta de Sorgenfrey não é compacta.

Alongamento 4.1.22. Caracterize os compactos discretos.

Alongamento 4.1.23. Dizemos que uma família de subconjuntos $\mathcal{F}$ satisfaz a **propriedade da intersecção finita (p.i.f.)** se, para tado $F \subset \mathcal{F}$ finito, temos que $\bigcap_{G \in F} G \neq \emptyset$. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que "X ser compacto" é equivalente a "toda $\mathcal{F}$ família de fechados de X com p.i.f., é tal que $\bigcap_{G \in \mathcal{F}} G \neq \emptyset$".

Alongamento 4.1.24. Seja (X, τ) espaço compacto. Seja (Y, σ) espaço de Hausdorff tal que $Y \supset X$. Mostre que X é fechado em Y.

Alongamento 4.1.25. Mostre que a função f da Proposição 4.1.19 é a função desejada.

Alongamento 4.1.26. Mostre que compacidade é uma propriedade topológica (i.e, é preservada via homeomorfismos).

Alongamento 4.1.27. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Mostre que (X, τ) é localmente compacto se, e somente se, para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e $\overline{V}$ é compacto.

Exercícios

Exercício 4.1.28. Mostre que $[0, 1]$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Exercício 4.1.29. Seja (X, d) espaço métrico. Mostre que se $F \subset X$ é compacto, então F é fechado e limitado (um conjunto A é dito **limitado** se existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $A \subset B_r(x)$ para algum $x \in X$).

Exercício 4.1.30. Seja (X, τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in X$ existe $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças para x tal que $\overline{V}$ é compacto para cada $V \in \mathcal{V}$.

Exercício 4.1.31. Seja (X, τ) Hausdorff. Mostre que X é localmente compacto se, para todo $x \in X$ existe K vizinhança compacta de x.

Exercício 4.1.32. Seja (X, τ) espaço de Hausdorff. Dizemos que (Y, σ) espaço de Hausdorff é uma **compactificação** de X se X é um subsespaço denso de Y e (Y, σ) é compacto. Dizemos que uma compactificação (Y, σ) é uma **compactificação de Alexandroff** se $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$.

(a) Seja (X, τ) espaço topológico de Hausdorff que admite uma compactificação. Mostre que (X, τ) é completamente regular.

(b) Considere (X, τ) espaço localmente compacto. Defina $Y = X \cup \{x\}$ onde $x \notin X$. Defina σ topologia sobre Y de forma que $\tau \subset \sigma$ e todo $\{x\} \cup (X \smallsetminus K) \in \sigma$ onde $K \subset X$ é compacto. Mostre que (Y, σ) é uma compatificação de Alexandroff de X.

(c) Seja (X, τ) espaço de Hausdorff e suponha que exista (Y, σ) compatificação de Alexandroff para X. Mostre que (X, τ) é localmente compacto.

(d) Conclua que um espaço de Hausdorff é localmente compacto se, e somente se, admite uma compactificação de Alexandroff.

4.2 Teorema de Tychonoff

Para facilitar o que virá nesta seção, lembremos o conceito de filtro:

Definição 4.2.1. Seja X um conjunto. Dizemos que $F \subset \wp(X)$ é um **filtro** sobre X se

(a) $\emptyset \notin F$ (condição de não trivialidade);

(b) se $a, b \in F$, então $a \cap b \in F$;

(c) se $a \in F$ e $b \supset a$, então $b \in F$.

Dizemos que F é um **ultrafiltro** se F é maximal (i.e., se $G \supset F$ é um filtro, então $G = F$).

Exemplo 4.2.2. Seja X um conjunto e $x \in X$. Então, $F = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro. Vejamos que é maximal. Suponha que $G \supsetneq F$ seja um filtro. Então, existe $A \in G$ tal que $x \notin A$. Mas, como $\{x\} \in F$, segue que $\{x\} \in G$ e $A \cap \{x\} = \emptyset$, que é contradição.

Proposição 4.2.3. *Sejam $X \neq \emptyset$ e $F \subset \wp(X)$ com p.i.f. Então,*

$$F' = \{A \subset X : \exists B_1, ..., B_n \in F, \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset A\}$$

é um filtro sobre X (o chamamos de **filtro gerado** *por F).*

Demonstração. $\emptyset \notin F'$, pois $\emptyset \notin F$.

Sejam $a, b \in F'$. Então, existem $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in F$ tais que $\bigcap_{i=1}^{n} a_i \subset a$ e $\bigcap_{i=1}^{m} \subset b$. Note que $(\bigcap_{i=1}^{n} a_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} b_i) \in F$ e $(\bigcap_{i=1}^{n} a_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} b_i) \subset a \cap b$. Portanto, $a \cap b \in F$.

Sejam $a \in F'$ e $b \subset X$. Então, existem $a_1, ..., a_n \in F$ tais que $\bigcap_{i=1}^{n} a_i \subset a$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n} a_i \subset b$ e, portanto, $b \in F'$. $\square$

Proposição 4.2.4. *Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. São equivalentes:*

(a) F é ultrafiltro;

(b) para todo $Y \subset X$, temos que $Y \in F$ ou $X \smallsetminus Y \in F$.

Demonstração. Suponha que F seja um ultrafiltro e seja $Y \subset X$. Suponha que $Y \notin F$ e vamos mostrar que $X \smallsetminus Y \in F$.

Fato: como $Y \notin F$ e F é ultrafiltro, existe $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$.

De fato, suponha que a tese não seja válida. Então, $F \cup \{Y\}$ tem p.i.f. Assim, pela Proposição 4.2.3, existe um filtro $G \supset F \cup \{Y\}$ de modo que $G \supsetneq F$, que é contradição.

Voltando à demonstração do teorema, seja $A \in F$ tal que $A \cap Y = \emptyset$. Isto é, $A \subset X \smallsetminus Y$. Logo, $X \smallsetminus Y \in F$.

Mostremos, agora, a recíproca. Suponha que F não seja seja maximal. Então existem $G \supsetneq F$ um filtro e $A \in G \smallsetminus F$. Então, $A \notin F$. Logo, $X \smallsetminus A \in F$ e, portanto, $X \smallsetminus A \in G$, que é contradição (pois $(X \smallsetminus A) \cap A = \emptyset$). □

Lema 4.2.5. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma cadeia de subconjuntos de X, cada um deles com p.i.f.. Então, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ tem p.i.f. ($\mathcal{F}$ é uma cadeia se para todo $A, B \in \mathcal{F}$ temos $A \subset B$ ou $B \subset A$.)*

Demonstração. Suponha que não. Então, existem $A_1, \dots, A_n \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{F}$ tais que $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$. Sejam $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ tais que $A_i \in F_i$. Note que existe F_j tal que $F_j \supset F_i$, para $i = 1, \dots, n$. Logo, $A_1, \dots, A_n \in F_j$, portanto, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$, que é uma contradição. □

Teorema 4.2.6. *Sejam X um conjunto não vazio e F um filtro sobre X. Então, existe $G \supset F$ que é ultrafiltro sobre X.*

Demonstração. Considere $\mathcal{F} = \{G \subset \wp(X) : G \supset F \text{ e } G \text{ é filtro}\}$ ordenado pela inclusão. Pelo Lema de Zorn, existe $G \in \mathcal{F}$ maximal. G é um ultrafiltro que contém F. □

Definição 4.2.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e F um filtro sobre X. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto aderente** a F se, para todo $A \in F$, temos $x \in \overline{A}$.

Dizemos que F **converge** para X se, para toda vizinhança de x, temos que $V \in F$. (Notação: $F \to x$.)

Proposição 4.2.8. *Seja (X, τ) um espaço topológico. São equivalentes:*

(a) (X, τ) é compacto;

(b) Todo filtro sobre X tem ponto aderente;

(c) Todo ultrafiltro sobre X converge.

Demonstração. $(a \Rightarrow b)$ Seja F filtro sobre X e considere $F' = \{\overline{A} : A \in F\}$. Note que F' tem p.i.f. (pois F também tem). Assim, pela compacidade (ver Alongamento 4.1.23), existe $x \in \bigcap_{\overline{A} \in F'} \overline{A}$. Note que tal x é aderente a F.

$(b \Rightarrow c)$ Sejam F ultrafiltro sobre X e x ponto aderente a F. Vamos mostrar que $F \to x$. Seja V vizinhança de x e suponha que $V \notin F$. Logo, $X \smallsetminus V \in F$ mas, $x \notin \overline{X \smallsetminus V}$ (de fato, seja A aberto tal que $x \in A \subset V$. Note que $A \cap (X \smallsetminus V) = \emptyset$). Portanto, x não é aderente.

$(c \Rightarrow a)$ Seja $\mathcal{F}$ uma família de fechados em X com p.i.f. Vamos mostrar que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Seja $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro. Sejam $x \in X$ tal que $G \to x$ e $H \in \mathcal{F}$. Veremos que $x \in H$. Suponha que não, assim, $x \in X \smallsetminus H$. Como $G \to x$, temos que $X \smallsetminus H \in G$ (pois $X \smallsetminus H$ é aberto que contém x). Mas $H \in G$ e $(X \smallsetminus H) \cap H \in G$, que é uma contradição. $\square$

Teorema 4.2.9 (Teorema de Tychonoff). *Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma famíla de espaços topológicos compactos. Então, $X = \prod X_\alpha$ é compacto.*

Demonstração. Seja F um ultrafiltro sobre X. Para cada $\alpha \in A$, seja $F_\alpha = \{\pi_\alpha[B] : B \in F\}$. Note que F_α é um ultrafiltro sobre X_α (Veja o exercício 4.2.15).

Seja $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $F_\alpha \to x_\alpha$. Vamos mostrar que $F \to x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Note que é suficiente mostrar que todo aberto básico contendo x é elemento de F (exercício).

Sejam $V = \prod V_\alpha$ aberto básico tal que $x \in V$ e $\mathcal{F} = \{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{F}$, temos que $V_\alpha \in F_\alpha$ (pois $F_\alpha \to x_\alpha$). Logo, existe $B_\alpha \in F$ tal que $V_\alpha = \pi_\alpha[B_\alpha]$. Portanto, $\pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$ (pois $B_\alpha \subset \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha]$). Então, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} \pi_\alpha^{-1}[V_\alpha] \in F$. $\square$

Proposição 4.2.10. *Seja (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre X. Então, (X, τ) não é compacto.*

Demonstração. Seja $A \in \sigma \smallsetminus \tau$. Então, $X \smallsetminus A$ não é fechado em (X, τ). Logo, $X \smallsetminus A$ não é compacto em (X, τ). Seja $\mathcal{C}$ cobertura (em τ) para $X \smallsetminus A$ que não admite subcobertura finita.

Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em σ) sem subcobertura finita. Logo, (X, σ) não é compacto. $\square$

Teorema 4.2.11. *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

Demonstração. Seja τ a topologia produto e σ uma topologia satisfazendo o enunciado. Pela definição de τ, se σ é tal que as projeções são contínuas, então $\tau \subset \sigma$. Por outro lado, se $\tau \subsetneq \sigma$, pelo resultado anterior, o produto não é compacto. Logo, $\tau = \sigma$. $\square$

Alongamentos

Alongamento 4.2.12.). Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que $F = \{A \subset X : A \text{ é vizinhança de } x\}$ é um filtro sobre x.

Alongamento 4.2.13. Mostre a volta do Teorema de Tychonoff: Se $\prod_{\alpha X_\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$ é compacto, então cada X_α é compacto.

Alongamento 4.2.14. Seja (X, τ) infinito. Considere $\mathcal{F} = \{F \subset X : X \smallsetminus F \text{ é finito}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ satisfaz a p.i.f.

(b) Mostre que qualquer $G \subset \mathcal{F}$ ultrafiltro não é da forma $\{A \subset X : x \in A\}$ para algum $x \in X$. Note que, de fato, existe algum $G \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercícios

Exercício 4.2.15. Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(a) Mostre que, se $F \in \mathcal{F}$, então $\pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[F]] \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in A$.

(b) Mostre que, para todo $\alpha \in A$, $\{\pi_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}\}$ é ultrafiltro sobre X_α.

Exercício 4.2.16. Mostre que se (X, τ) é de Hausdorff, então cada ultrafiltro sobre X converge para, no máximo, um ponto.

Exercício 4.2.17. Mostre que (X, τ) é completamente regular se, e somente se, existe Y compacto T_2 tal que X é subespaço de Y.

4.3 Pontos de acumulação

Definição 4.3.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de $A \subset X$ se $x \in \overline{A \smallsetminus \{x\}}$.

Note que se x é ponto de acumulação de A, então $x \in \overline{A}$. Mas não necessariamente vale a volta (veja o Alongamento 4.3.14).

Proposição 4.3.2. *Seja (X, τ) espaço T_1. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X$ se, e somente se, para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.*

Demonstração. Seja V aberto tal que $x \in V$. Suponha $V \cap A$ finito. Então $V' = V \smallsetminus (V \cap (A \smallsetminus \{x\}))$ um aberto tal que $x \in V'$ e $V' \cap A \subset \{x\}$ e, portanto, x não é ponto de acumulação.

Por outro lado, se para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito, então $V \cap (A \smallsetminus \{x\}) \neq \emptyset$ e, portanto, x é ponto de acumulação de A. □

Proposição 4.3.3. *Seja (X, τ) compacto. Então todo suconjunto infinito admite ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um conjunto infinito. Suponha que todo $x \in X$ não é ponto de acumulação de A. Assim, para todo $x \in X$, existe V_x aberto tal que $x \in V_x$ e $V_x \cap A \subset \{x\}$. Note que isso dá uma cobertura aberta para X e, portanto, tem subcobertura finita. Assim, existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Em particular, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Mas note que isso implica que $A \subset \{x_1, ..., x_n\}$, contradição com a infinitude de A. □

$V_x \cap A = \{x\}$ se $x \in A$ e $V_x \cap A = \emptyset$ caso contrário.

Proposição 4.3.4. *Seja (X, d) com base locais enumeráveis, compacto e T_1. Então toda sequência admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência. Note que podemos supor que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito (caso contrário, teríamos uma subsequência constante convergente). Assim, seja $x \in X$ ponto de acumulação para $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base local para x decrescente. Seja $x_{n_0} \in V_0$. Para cada $k + 1 \in \mathbb{N}_{>0}$, escolha $x_{n_{k+1}} \in V_{n_{k+1}} \cap \{x_n : n > n_k\}$. Note que $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge para x. □

Proposição 4.3.5. *Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dado $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese. Suponha que $x_{n_k} \longrightarrow x$ para algum x. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto).

Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & \leq & d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) \\ & < & \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} \\ & < & \frac{2}{n} \end{array}$$

Ou seja, $y \in B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ para todo $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ contrariando a escolha de x_{n_k}. □

Proposição 4.3.6. *Seja (X,d) métrico tal que toda sequência admite subsequência convergente. Então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $\mathcal{C}$ sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n > 0$, seja

$$x_n \in X \setminus (B_r(x_0) \cup \cdots \cup B_r(x_{n-1}))$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, ..., n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x_i) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^{n} C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de $\mathcal{C}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente pois $d(x_n, x_m) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. □

Juntando os resultados anteriores, temos:

Corolário 4.3.7. *Seja (X,d) espaço métrico. São equivalentes:*

(a) (X,d) é compacto;

(b) Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X;

(c) Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.

Corolário 4.3.8. *Todo métrico compacto é completo.*

Definição 4.3.9. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 4.3.10. *Seja (X,d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, defina $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_\varepsilon(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_\varepsilon(y_x)$. □

Proposição 4.3.11. *Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo. O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergente. Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é. Considere $\varepsilon_0 = 1$ e $F_0 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_0} B_{\varepsilon_0}(x)$. Note que, para algum $x_{n_0} \in F_0$, $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Continuamos este processo fazendo, para cada $k + 1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+2}$, escolhendo F_{k+1} finito de forma que $\{x_n : n > n_k\} \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$. Daí escolhemos $x_{n_k+1} \in F_{k+1}$ de forma que $B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \cap \{x_n : n > n_k\}$ seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente. □

Corolário 4.3.12. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.*

O totalmente limitado é necessário de fato:

Exemplo 4.3.13. Considere $\mathbb{N}$ com a métrica discreta. Note que, com tal métrica, $\mathbb{N}$ é completo. Note também que $\mathbb{N}$ é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola $B_2(0)$).

Basta notar que as únicas sequências de Cauchy são as quase constantes

Alongamentos

Alongamento 4.3.14. Mostre que $\mathbb{N}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ tem pontos aderentes mas não pontos de acumulação.

Exercícios

Exercício 4.3.15. Mostre que em $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é um fechado limitado.

Exercício 4.3.16. Mostre que $D \subset X$ é fechado e discreto se, e somente se, D não admite pontos de acumulação.

Capítulo 5

Conexos

5.1 Definição e propriedades básicas

Definição 5.1.1. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é **conexo** se, dados quaisquer abertos A e B de X disjuntos tais que $A \cup B = X$ implicar $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Exemplo 5.1.2. A reta de Sorgenfrey não é conexa. Basta notar que $]-\infty, 0[\cup[0, +\infty[= \mathbb{R}_S$, com $]-\infty, 0[, [0, +\infty[$ abertos disjuntos e não vazios de $\mathbb{R}_S$.

Definição 5.1.3. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Chamamos $I \subset X$ de **intervalo** se, para quaisquer $a, b, c \in X$ tais que $a, b \in I$ e $a \leq c \leq b$ tivermos $c \in I$.

Proposição 5.1.4. *$A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.*

Demonstração. Suponha que A não seja um intervalo. Então existem $a, b \in A$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $a < x < b$ e $x \notin A$. Então $A = (]-\infty, x[\cap A) \cup (]x, +\infty[\cap A)$, que são abertos disjuntos não vazios de A (são não vazios pois $a \in]-\infty, x[\cap A$ e $b \in]x, +\infty[\cap A)$ e, portanto, A não é conexo.

Seja agora A um intervalo. Suponha que A não seja conexo. Então existem V, W abertos em A, disjuntos, tais que $A = V \cup W$. Sejam $v \in V$ e $w \in W$. Sem perda de generalidade, vamos supor $v < w$. Considere $\alpha = \sup\{x \in V : [v, x] \subset V\}$ (note que tal definição faz sentido pois $v \in \{x \in V : [v, x] \subset V\}$ e tal conjunto é limitado superiormente). Note que $\alpha \notin V$ pois, se $\alpha \in V$, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset V$, donde $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \in V$ e $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < w$, o que contraria a definição de α. Logo $\alpha \notin V$, o que implica $\alpha \in W$ (pois $A = V \cup W$). Como W é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\subset W$. Assim, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \in W$, contrariando a definição de α.

□

Teorema 5.1.5. *Sejam* $(X, \tau), (Y, \sigma)$ *espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *contínua e sobrejetora. Se* X *é conexo, então* Y *é conexo.*

Demonstração. Sejam $A, B \subset Y$ abertos disjuntos tais que $Y = A \cup B$. Note que $X = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ e $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \emptyset$. Se A e B forem ambos não vazios, então $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ seriam abertos não vazios (pois f é sobrejetora), implicando em X não ser conexo. □

Corolário 5.1.6 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam* (X, τ) *um espaço topológico conexo e* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua. Sejam* $f(a) < f(b)$*, para* $a, b \in X$*. Se* $y \in \mathbb{R}$ *é tal que* $f(a) < y < f(b)$*, então existe* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$ *(isto é,* $f[X]$ *é um intervalo).*

Demonstração. Decorre do teorema anterior que $f[X]$ é conexo em $\mathbb{R}$, pois $f : X \to f[X]$ é sobrejetora contínua. □

Corolário 5.1.7. *Seja* (X, τ) *espaço topológico completamente regular, conexo e com mais de um ponto. Então* $|X| \geq |\mathbb{R}|$*.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos. Por X ser completamente regular, existe $f : X \to [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Como X é conexo, $f[X]$ é um intervalo em $\mathbb{R}$, mas $1, 0 \in f[X]$, logo $f[X] = [0, 1]$. □

Definição 5.1.8. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $A, B \subset X$ são **mutuamente separados** se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$

Exemplo 5.1.9. $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são mutuamente separados em $\mathbb{R}$.

Proposição 5.1.10. *Seja* (X, τ) *espaço topológico.* $Y \subset X$ *é conexo se, e somente se, não existem* $A, B \neq \emptyset$ *mutuamente separados tais que* $Y = A \cup B$*.*

Demonstração. Suponha que existam $A, B \subset X$ não vazios e mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$. Vamos mostrar que Y não é conexo. Sejam $U^* = X \setminus \overline{A}$, $V^* = X \setminus \overline{B}$. Considere $U = U^* \cap Y$, $V = V^* \cap Y$. Note que U e V são abertos em Y. Temos

- $U \cap V = \emptyset$: se não, existe y tal que $y \in U \cap V$, então $y \in Y$, $y \notin \overline{A}$ e $y \notin \overline{B}$, mas daí $y \notin A$ e $y \notin B$, donde $y \notin Y$, contradição;

- $U \neq \emptyset$: se $U = \emptyset$, temos que $U^* \cap Y = \emptyset$. Assim, $Y \subset X \setminus U^* = \overline{A}$, mas como $\overline{A} \cap B = \emptyset$, obtemos $B \cap Y = \emptyset$, contradição (pois daí segue que $B = \emptyset$);

- $V \neq \emptyset$: análoga ao caso anterior.

Disso segue que $Y = U \cup V$, com U, V abertos disjuntos não vazios de Y, isto é, Y não é conexo.

Por outro lado, suponha Y não conexo. Então existem $U, V \subset Y$ abertos não vazios, disjuntos, tais que $U \cup V = Y$. Sejam U^* e V^* abertos de X tais que $U^* \cap Y = U$ e $V^* \cap Y = V$. Vamos mostrar que U e V são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que $x \in \overline{U} \cap V$. Assim $x \in \overline{U} \cap V^*$. Logo, pela definição de $\overline{U}$, existe $a \in U \cap V^*$. Note que $a \in Y$, donde $a \in V^* \cap Y = V$, e daí obtemos $a \in U \cap V$, contradição com $U \cap V = \emptyset$. Portanto, U e V são mutuamente separados. □

Corolário 5.1.11. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ conexo. Se $A, B \subset X$ são mutuamente separados e $Y \subset A \cup B$, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $Y \cap A$ e $Y \cap B$ são mutuamente separados. Sem perda de generalidade, suponha que exista $x \in \overline{Y \cap A} \cap (Y \cap B)$. Então $x \in B$ e $x \in \overline{Y \cap A} \subset \overline{A}$. Logo, $x \in \overline{A} \cap B$, contradição. □

Proposição 5.1.12. *Seja (X, τ) espaço topológico.*

(a) Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.

(b) Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.

Demonstração. (a) Suponha que X não seja conexo. Sejam $A, B \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = X$. Note que, para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \subset A$ ou $X_\alpha \subset B$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in I$ tais que $X_\alpha \subset A$ e $X_\beta \subset B$. Como $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, temos uma contradição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X_\alpha \subset A$, para todo $\alpha \in I$. Logo $X \subset A$ e daí $B = \emptyset$, contradição.

(b) Fixe $x \in X$. Para cada $y \in X$, seja A_y conexo tal que $x, y \in A_y$. Por (a), concluímos que $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ é conexo.

□

Proposição 5.1.13. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$ conexo. Então para todo $B \subset X$ tal que $A \subset B \subset \overline{A}$, temos B conexo.*

Demonstração. Suponha que não. Sejam U e V mutuamente separados não vazios tais que $B = U \cup V$. Note que $A \subset U \cup V$, então, por A ser conexo, temos $A \subset U$ ou $A \subset V$. Suponha, sem perda de generalidade, que $A \subset U$, então $\overline{A} \subset \overline{U}$, logo $\overline{A} \cap V = \emptyset$ e assim $V = \emptyset$ (pois $V \subset \overline{A}$). □

Alongamentos

Alongamento 5.1.14. Mostre que "ser conexo" é uma propriedade topológica.

Alongamento 5.1.15. Mostre que (X, τ) é conexo se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são abertos e fechados ao mesmo tempo são $\emptyset$ e o próprio X.

Exercícios

Exercício 5.1.16. Mostre que se um espaço tem um subespaco denso conexo, então o espaço todo é conexo.

Exercício 5.1.17. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto finito de conexos é conexo.

(a) Sejam (X, τ), (Y, σ) conexos. Mostre que $X \times \{y\}$ é conexo para qualquer $y \in Y$. Use essa ideia e a Proposição 5.1.12 para mostrar que $X \times Y$ é conexo.

(b) Conclua que produto finito de conexos é conexo.

Exercício 5.1.18. Este exercício é um roteiro para mostrar que produto qualquer de conexos é conexo (usa o anterior). Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ família de espaços conexos. Seja $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(a) Seja $F \subset A$ finito. Mostre que $D_F : \{(b_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : b_\alpha = a_\alpha$ se $\alpha \notin F\}$ é homeomorfo a $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ (e, portanto, é conexo pelo exercício anterior).

(b) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset A : F$ é finito$\}$. Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é denso em $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

(c) Mostre que $(a_\alpha)_{\alpha \in A} \in D_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

(d) Mostre que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F$ é conexo.

(e) Mostre que $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ é conexo.

Exercício 5.1.19. Mostre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ é conexo.

5.2 Componentes e conexidade por caminhos

Proposição 5.2.1. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A, B \subset X$ conexos. Se A e B não são mutuamente separados, então $A \cup B$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que $A \cup B$ não seja conexo. Sejam $G, H \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = G \cup H$. Como A é conexo, podemos supor $A \subset G$. Se $B \subset H$, então A e B são mutuamente separados, contradição com a hipótese; se $B \subset G$, então $H = \emptyset$, contradição. □

Definição 5.2.2. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Definimos a **componente conexa** de X como $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ onde $\mathcal{A} = \{A \subset X : x \in A$ e A é conexo $\}$.

Observação 5.2.3. Equivalentemente, a componente conexa de x é o *maior* (no sentido da inclusão) subconjunto conexo de X que contém x.

Observação 5.2.4. A componente conexa de x é conexa.

Proposição 5.2.5. *Componentes conexas são fechadas.*

Demonstração. Seja C_x componente conexa para $x \in X$. Temos por definição $C_x \subset \overline{C_x}$. Note que $\overline{C_x}$ é um conexo que contém x. Logo $\overline{C_x} \subset C_x$. □

Definição 5.2.6. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é **conexo por caminhos** se, para quaisquer $x, y \in X$ existir $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Proposição 5.2.7. *Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (X, τ) é conexo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ distintos e $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Note que $f[[0, 1]]$ é conexo (por f ser contínua e $[0, 1]$ ser conexo) e $x, y \in f[[0, 1]]$. Logo, X é conexo. □

Exemplo 5.2.8. Espaço Pente: Espaço conexo que não é conexo por caminhos.

Considere $A = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, y \right) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{(x, 0) : x > 0\}$ e $B = \{(0, y) : y > 0\}$. Note que tanto A quanto B são conexos por caminhos, logo, A e B são conexos. Seja então $X = A \cup B$.

Fato: X é conexo.

Note que $B \subset \overline{A}$ e, portanto, $A \subset A \cup B \subset \overline{A}$. Logo, como A é conexo, temos o resultado pela Proposição 5.1.13.

Fato: X não é conexo por caminhos.

Suponha que exista $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = (0,1)$ e $f(1) = (1,1)$. Considere $\alpha = \sup\{x \in [0,1] : f(x) \in B\}$. Temos dois casos:

- $f(\alpha) \in A$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(f(\alpha)) \cap B = \emptyset$ (o que é possível pois $B \cup \{(0,0)\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$). Como f é contínua, existe V vizinhança de α tal que $f[V] \subset B_r(f(\alpha))$. Note que existe $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha - \varepsilon, \alpha[\subset V$. Pela definição de α, $f[]\alpha - \varepsilon, \alpha[] \cap B \neq \emptyset$, contradição.

- $f(\alpha) \in B$. Seja $r > 0$ tal que $B_r(f(\alpha)) \not\ni (0,0)$. Como f é contínua, existe um intervalo aberto $V \ni \alpha$ tal que $f[V] \subset B_r(f(\alpha))$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha, \alpha + \varepsilon[\subset V$. Pela definição de α, existe $\beta \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[$ tal que $f(\beta) \in A$, contradição com o fato que $f[V]$ é conexo.

Proposição 5.2.9. *Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua sobrejetora. Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (Y, σ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $a, b \in Y$ e $\alpha, \beta \in X$ tais que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$. Seja $h : [0,1] \to X$ contínua tal que $h(0) = \alpha$ e $h(1) = \beta$. Então $f \circ h : [0,1] \to Y$ é uma função contínua tal que $(f \circ h)(0) = a$ e $(f \circ h)(1) = b$. □

Proposição 5.2.10. *$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismo. Então, $f \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Mas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não é conexo, enquanto $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ é. □

Proposição 5.2.11. *$[0, +\infty[$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos.*

Demonstração. Suponha que exista $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ homeomorfismo. Então $f \restriction]0, +\infty[\to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ também é homeomorfismo. Contudo, $]0, +\infty[$ é conexo enquanto que $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ não é. □

Proposição 5.2.12. *$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a qualquer subespaço de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que exista $f : S^1 \to A \subset \mathbb{R}$ homeomorfismo. Como S^1 é conexo (basta notar que S^1 é imagem contínua de um intervalo da reta), segue que A é um conexo de $\mathbb{R}$, isto é, A é um intervalo. Considere $a \in A$ tal que a não seja uma extremidade de A (isto é, existem $b, c \in A$ tais que $b < a < c$). Então $f \restriction S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\} \to A \setminus \{a\}$ é um homeomorfismo, mas $S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\}$ é conexo e $A \setminus \{a\}$ não é. □

Alongamentos

Alongamento 5.2.13. Mostre que "ser conexo por caminhos" é uma propriedade topológica.

Exercícios

Exercício 5.2.14. Mostre que, dado $q \in \mathbb{Q}$, a componente conexa de q é $\{q\}$ (dentro do espaço $\mathbb{Q}$ com a topologia induzida).

5.3 Propriedades locais de conexidade

Definição 5.3.1. Um espaço topológico (X, τ) é **localmente conexo por caminhos** se todo ponto de X admite uma base local conexa por caminhos.

Observação 5.3.2. Se $f : [0,1] \to X$ e $g : [0,1] \to X$ são contínuas e $f(0) = a, f(1) = b, g(0) = b$ e $g(1) = c$, então $h : [0,1] \to X$ dada por $h(x) = \begin{cases} f(2x), & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x-1), & \text{se } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ é uma função contínua tal que $h(0) = a$ e $h(1) = c$. É claro que $h(0) = a$ e $h(1) = c$, além disso, $h \restriction \left[0, \frac{1}{2}\right[$ e $h \restriction \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ são contínuas pois são compostas de funções contínuas; claramente h é contínua em $\frac{1}{2}$.

Proposição 5.3.3. *Se (X, τ) é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos então, (X, τ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e

$$C = \{y \in X : \text{ existe } f : [0,1] \to X \text{ contínua, tal que } f(0) = x \text{ e } f(1) = y\}.$$

Vamos mostrar que C é aberto e fechado (portanto, $C = X$, pelo Alongamento 5.1.15).

C é aberto. Sejam $y \in C$ e $A \in \tau$ conexo por caminhos tal que $y \in A$. Note que $A \subset C$. De fato, dado $a \in A$, existe $f : [0,1] \to A$ tal que $f(0) = y$ e $f(1) = a$. Seja $g : [0,1] \to X$ tal que $g(0) = x$ e $g(1) = y$ (g contínua). Logo, existe $h : [0,1] \to X$ tal que $h(0) = x$, $h(1) = a$ e h é contínua (ver a Observação 5.3.2). Portanto, $a \in C$.

C é fechado. Sejam $y \in X \smallsetminus C$ e $A \in \tau$ conexo por caminhos tal que $y \in A$. Então, $A \cap C = \emptyset$ (i.e., $A \subset X \smallsetminus C$). De fato, suponha que não seja verdade. Seja $b \in C \cap A$. Logo, existe $h : [0,1] \to X$ contínua tal que $h(0) = x$ e $h(1) = y$. Logo, $y \in C$, contradição. $\square$

Definição 5.3.4. Um espaço topológico (X, τ) é **localmente conexo** se todo ponto admite uma base local conexa.

Exemplo 5.3.5. O exemplo do pente (Exemplo 5.2.8) com o ponto $(0, 0)$ incluído é um espaço conexo por caminhos.

Exemplo 5.3.6. O exemplo do pente (Exemplo 5.2.8) (com ou sem $(0, 0)$) é um conexo que não é localmente conexo.

Exemplo 5.3.7. $[0, 1[\cup]1, 2]$ é localmente conexo, mas não é conexo.

Proposição 5.3.8. *Se (X, τ) é localmente conexo, todo ponto de X tem componente conexa aberta.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e C componente conexa de x. Sejam, também, $y \in C$ e $A \in \tau$ conexo tal que $y \in A$. $C \cup A$ é conexo (pois $y \in C \cap A$), logo, $C \cup A \subset C$ (pois $C \cup A \ni x$), ou seja, $A \subset C$. $\square$

Note que $\mathbb{Q}$ é um espaço tal que as componentes conexas não são abertas.

Proposição 5.3.9. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo (com a topologia da ordem). Então, $\leq$ é uma ordem densa.*

Demonstração. Suponha que não seja verdade. Então, existem $a < b \in X$ tais que não existe $c \in X$ de modo que $a < c < b$. Note que $\{x \in X : x < b\}$ e $\{x \in X : x > a\}$ são abertos, $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Além disso, $A \neq \emptyset$ (pois $b \in A$) e $B \neq \emptyset$ (pois $a \in B$). Logo, X não é conexo. $\square$

Proposição 5.3.10. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e conexo. Então, $\leq$ é uma ordem completa.*

Demonstração. Suponha $A \subset X$ um conjunto limitado superiormente tal que A não tenha supremo. Sejam $W = \{x \in X : \exists a \in A, x \leq a\}$ e $V = \{x \in X : \forall a \in A, a < x\}$.

W é aberto. Sejam $w \in W$ e $a \in A$ tais que $w \leq a$. Seja, também, $a' \in A$ tal que $a < a'$ (pois A não tem supremo). Note que $\{x \in X : x < a'\} \subset W$ é aberto e contém w.

V é aberto. Seja $v \in V$ de modo que v majora A. Como v não é o supremo de A, existe $v' \in X$, com $v' < v$, que também majora A. Logo, $\{x \in X : v' < x\}$ é um aberto contido em V e que contém v.

Além disso, $W \cap V = \emptyset$, $W \cup V = X$ (ordem total), $W \neq \emptyset$ (pois $W \supset A$) e $V \neq \emptyset$ (pois A é limitado superiormente. Logo, X não é conexo. $\square$

Corolário 5.3.11. *Se $(X, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, sem maior ou menor elementos, separável e conexo, então $(X, \leq)$ é homeomorfo à $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Segue diretamente dos dois últimos resultados e do Teorema 2.4.13. □

Exemplo 5.3.12 (no mundo real, literalmente)**.** Considere a superfície da Terra T com a métrica usual. Vamos supor que a função $t : T \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $t(x)$ é a temperatura no local x, seja contínua. Então existem dois pontos antípodas[1] na Terra que possuem a mesma temperatura. De fato, considere $F : T \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = t(x) - t(y)$ onde y é o ponto antípoda de x. Temos que F é uma função contínua (a função que leva x no seu antípoda é contínua). Seja x_0 um ponto qualquer em T e seja y_0 seu antípoda. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow T$ uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = y_0$. Note que $F(f(0)) = -F(f(1))$. Assim, pelo Teorema do valor intermediário **??**, temos que existe $r \in [0, 1]$ tal que $F(f(r)) = 0$. Isto é, $f(r)$ é um ponto em que sua temperatura é a mesma que a do seu antípoda.

Exemplo 5.3.13 (**Função base 13 de Conway**)**.** Considere os seguintes algarismos numa base 13:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ +\ -\ ,$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere sua expansão na base acima. Defina a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } +a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ -a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } -a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde os a_n's e b_n's são algarismos entre[2] 0 e 9. Note que f é sobrejetora. Mais que isso, dado qualquer intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, $f[[a, b]] = \mathbb{R}$. Note também que f é não contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Esta f serve de contraexemplo para a afirmação que se uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ leva conexos em conexos, então ela é contínua.

[1] Isto é, simétricos em relação ao centro da Terra.

[2] ao formalizar-se tal exemplo, deve-se tomar cuidado com as expansões decimais que terminem em 9999999... e com as expansões na base 13 fixada que terminem em , , , , , , , , , ... Mas isso pode ser feito facilmente.

Capítulo 6

Homotopia

6.1 Definição e resultados básicos

Começamos com uma definição de quando uma função pode ser obtida de uma outra a partir de uma "deformação":

Definição 6.1.1. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é **homotópica** à g se existe uma função contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que H é uma **homotopia** entre f e g. Notação: $f \simeq g$.

Exemplo 6.1.2. Em $\mathbb{R}^n$, considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = x$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então, $f \simeq g$. De fato, basta tomar $H(x, t) = (1 - t)x$.

Na verdade, convexidade nos permite generalizar o truque anterior:

Exemplo 6.1.3. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e (X, τ) espaço topológico. Se $f, g : X \to A$ são funções contínuas então são homotópicas. Basta tomar $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$.

Proposição 6.1.4. *$\simeq$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos provar a transitividade, deixando as outras como exercício. Sejam $f, g, h : X \to Y$ funções contínuas tais que $f \simeq g \simeq h$. Vamos mostrar que $f \simeq h$. Sejam H_1 e H_2 tais que, para todo $x \in X$,

$$\begin{array}{ll} H_1(x, 0) = f(x) & H_2(x, 0) = g(x) \\ H_1(x, 1) = g(x) & H_2(x, 1) = h(x). \end{array}$$

Defina

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_2(x, 2t-1), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

□

Definição 6.1.5. As classes de equivalência da relação $\simeq$ são chamadas de **classes de homotopia**.

Proposição 6.1.6. *Composição de funções homotópicas são homotópicas.*

Demonstração. Sejam (X, τ), (Y, σ) e (Z, μ) espaços topológicos e sejam $f_1, f_2 : X \to Y$ tais que $f_1 \simeq f_2$ e $g_1, g_2 : Y \to Z$ tais que $g_1 \simeq g_2$.

Vamos mostrar que $g_1 \circ f_1$ é homotópica à $g_2 \circ f_2$. Sejam H_X e H_Y tais que

$$\begin{array}{ll} H_X(x,0) = f_1(x) & H_Y(y,0) = g_1(y) \\ H_X(x,1) = f_2(x) & H_Y(y,1) = g_2(y). \end{array}$$

Defina $H'(x,t) = H_Y(f_1(x), t)$. Note que $H'(x, 0) = g_1 \circ f_1(x)$ e $H'(x, 1) = g_2 \circ f_1(x)$. Portanto, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_1$.

Defina $H''(x,t) = g_2(H_X(x,t))$. Note que $H''(x, 0) = g_2 \circ f_1(x)$ e $H''(x, 1) = g_2 \circ f_2(x)$. Portanto, $g_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Logo, $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. □

Definição 6.1.7. Um espaço topológico (X, τ) é dito **contrátil** se $id_X : X \to X$ ($id_X(x) = x$, para $x \in X$) é homotópica a alguma função constante.

O exemplo que fizemos anteriormente nos dá o seguinte resultado:

Exemplo 6.1.8. Qualquer conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ é contrátil.

Proposição 6.1.9. *Se (X, τ) é contrátil então, (X, τ) é conexo por caminhos.*

Demonstração. Temos que $id_X \simeq c$ ($c \in X$). Seja H tal que $H(x, 0) = x$ e $H(x, 1) = c$. Seja $a \in X$. Vamos mostrar que existe um caminho de a até c. Seja $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por $\gamma(t) = H(a, t)$. Note que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = c$. □

Proposição 6.1.10. *Um espaço topológico (X, τ) é contrátil se, e somente se, para todo espaço topológico (T, σ) e para todas as funções contínuas $f, g : T \to X$ contínuas temos que $f \simeq g$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Basta tomar $T = X$, $f = id_X$ e g alguma função constante.

($\Rightarrow$) Suponha que $id_X \simeq c$. Sejam as funções contínuas $f, g : T \to X$. Note que $f \simeq f$ e $g \simeq g$. Assim,

$$f = id_X \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq id_X \circ g = g.$$

Logo, $f \simeq g$. $\square$

Definição 6.1.11. Espaços topológicos (X, τ) e (Y, σ) são ditos **homotopicamente equivalentes** se existem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Neste caso, g é dita uma **inversa homotópica** de f (e vice versa).

Observação 6.1.12. Espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. Mas a recíproca não é, necessariamente, verdadeira, como o próximo resultado ilustra.

Proposição 6.1.13. *Um espaço topológico (X, τ) é contrátil se, e somente se, (X, τ) é homotopicamente equivalente a um espaço unitário.*

Demonstração. Suponha (X, τ) contrátil, ou seja, $id_X \simeq c$. Sejam $Y = \{c\}$ e $j : Y \to X$ a função inclusão. Note que $c \circ j = id_Y$ e $j \circ c = c \simeq id_Y$.

Agora, suponha que $f : X \to \{a\}$ e $g : \{a\} \to X$ são inversões homotópicas. Note que $g \circ f$ é constante ($= g(a)$) e, por hipótese, $g \circ f \simeq id_X$. $\square$

Definição 6.1.14. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que o conjunto $A \subset X$ é uma **retração** (**retrato**) de X se existe uma função contínua $r : X \to A$ (chamada de **retração**) tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. Se $r \simeq id_X$ chamamos a retração de **retração de deformação**

Proposição 6.1.15. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Se o conjunto $A \subset X$ é uma retração de deformação, então A e X são homotopicamente equivalentes.*

Demonstração. Sejam $j : A \to X$ a função inclusão e r a retração de deformação. Note que $r \circ j = id_A$ e $j \circ r = r \simeq id_X$. $\square$

Definição 6.1.16. Chamamos (X, A) de **par topológico** se X é um espaço topológico e $A \subset X$.

Denotamos por $f : (X, A) \to (Y, B)$ se f é uma função $f : X \to Y$ tal que $f[A] \subset B$.

Dizemos que $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas se existe uma função contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ e $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$. (Note que, então, $f \restriction_A = g \restriction_A$.)

Se $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, dizemos que f é homotópica a g relativamente a A.

Exemplo 6.1.17. Note que se f e g são homotópicas relativamente, então elas são homotópicas. Mas a recíproca não é verdadeira, mesmo que $f|_A = g|_A$, para algum conjunto A. Vamos usar o exemplo do pente com $(0, 0)$ $(= X)$. Note que $id_X \simeq (0, 1)$. Mas, id_X e a função constante $(0, 1)$ não são homotópicas relativamente a $\{(0, 1)\}$. De fato, suponha que sejam (i.e., existe $H : X \times [0, 1] \to X$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = (0, 1)$ para todo $x \in X$ e $H((0, 1), t) = (0, 1)$, para todo $t \in [0, 1]$). Considere $V = [0, 1] \times]\frac{1}{2}, 1] \cap X$. Temos que $(0, 1) \in V$. Como H é contínua, existem $\varepsilon > 0$ e $A \subset V$ tais que $H[A \times]1 - \varepsilon, 1]] \subset V$.

Fato. Para cada $n > 0$ tal que $(\frac{1}{n}, 1) \in A$, existe $t_n \in [0, 1 - \varepsilon]$ tal que $H((\frac{1}{n}, 1), t_n) \notin A$.

Demonstração do Fato. Suponha que isso não aconteça, então $\gamma : [0, 1] \to X$ dada por $\gamma(t) = H((\frac{1}{n}, 1), t)$ tem imagem contida em A e não conexa (contém, por exemplo, $(0, 1)$ e $(\frac{1}{n}, 1)$). $\square$

Considere todos os t_n's dado pelo *Fato*. Como todos os t_n's estão em $[0, 1 - \varepsilon]$, existem $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $t_0 \in [0, 1 - \varepsilon]$ tal que $t_{n_k} \to t_0$. Logo, $((\frac{1}{n_k}, 1), t_{n_k}) \to ((0, 1), t_0)$. Mas, $H((0, 1), t_0) = (0, 1)$ e $H((\frac{1}{n_k}, 1), t_{n_k}) \notin A$.

Alongamentos

Alongamento 6.1.18. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é contrátil.

Alongamento 6.1.19. Mostre se X é contrátil, então $id_X \sim c$, para qualquer c constante.

Exercícios

Exercício 6.1.20. Mostre que $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ é contrátil (apesar de não ser convexo).

Exercício 6.1.21. Sejam $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Mostre que $r : X \longrightarrow S^1$ dada por $r(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(x,y)}$ é uma retração de deformação.

(b) Mostre que X e S^1 são homotopicamente equivalentes.

6.2 Grupo Fundamental

Definição 6.2.1. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Chamamos de **laço no ponto** x_0 uma função $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = f(1) = x_0$.

Definição 6.2.2. Sejam $f, g : [0, 1] \to X$ laços no ponto x_0. Dizemos que f e g são **laços homotópicos** se f e g são homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$.

Notação 6.2.3. $f \simeq_{x_0} g$.

Observação 6.2.4. A relação $\simeq_{x_0}$ é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de f por $[f]$. O conjunto de tais classes será denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Observação 6.2.5. Lembremo-nos de que podemos "concatenar" dois laços:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Proposição 6.2.6. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Definimos $* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ por $[f] * [g] = [f * g]$. Tal operação está bem definida.*

Demonstração. Basta mostrar que se $f_1 \simeq_{x_0} f_2$ e $g_1 \simeq_{x_0} g_2$, então $(f_1 * g_1) \simeq_{x_0} (f_2 * g_2)$. □

Proposição 6.2.7. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Então $(\pi_1(X, x_0), *)$ é um grupo.*

Demonstração. Associatividade: Note que $f * (g * h) \neq (f * g) * h$, pois no 1º caso, f tem "metade do tempo", já no segundo caso, tem "$\frac{1}{4}$ do tempo". Considere

$$H(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+x}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{x+1}{4} \\ g(4t-1-x), & \text{se } \frac{x+1}{4} \leq t \leq \frac{x+2}{4} \\ h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-x}\right), & \text{se } \frac{x+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Um cálculo direto mostra que H é uma homotopia entre $f*(g*h)$ e $(f*g)*h$ relativamente a $\{0, 1\}$.

Elemento Neutro: Considere e o laço constante igual a x_0. Vamos mostrar que $[e]$ é o elemento neutro. Para tanto, basta mostrar que $f * e \simeq_{x_0} f \simeq_{x_0} e * f$. De fato, para o 1º caso, faremos

$$H(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2x}{2-x}\right), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{2-x}{2} \\ x_0, & \text{se } \frac{2-x}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Elemento Inverso: Dado f laço em x_0, seja f^- dado por $f^-(x) = f(1-x)$. Definimos $[f]^- = [f^-]$. Se mostrarmos que $f * f^- \simeq_{x_0} e \simeq_{x_0} f^- * f$, seguirá que $[f]^-$ está bem definido. Para o 1º caso, fazemos

$$H(x,t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1-x}{2} \\ f^-(t+x), & \text{se } \frac{1-x}{2} \leq t \leq 1-x \\ x_0, & \text{se } 1-x \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

□

Definição 6.2.8. (X, x_0) é dito um **espaço com ponto base** se X é um espaço topológico e $x_0 \in X$. Denotamos por $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se $f : X \to Y$ e $f(x_0) = y_0$.

Proposição 6.2.9. *Toda $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ contínua induz um homomorfismo $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. Para cada laço g sobre x_0 defina $(f'(g))(t) = f(g(t))$. Note que $f'(g)$ é um laço sobre y_0. Defina $f^\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ como $f^\sharp([g]) = [f'(g)]$. Note que $f^\sharp$ está bem definida (exercício).

Resta então mostrar que $f^\sharp([g] * [h]) = f^\sharp([g]) * f^\sharp([h])$. Note que

$$f'(g*h) = \begin{cases} f(g(2x)) = (f'(g))(2x), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(h(2x-1)) = (f'(h))(2x-1), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} = f'(g)*f'(h).$$

□

Proposição 6.2.10. *(a) $(Id_X)^\sharp = Id_{\pi_1(X,x_0)}$;*

(b) $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tais que $f \simeq g$ com relação a $\{x_0\}$, então $f^\sharp = g^\sharp$;

(c) Se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, então $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$.

Demonstração. (a) Imediato.

(b) Seja h laço sobre x_0. Temos que mostrar que $f'(h) \simeq_{x_0} g'(h)$ (a demonstração segue de maneira análoga à prova de que composta de homotópicas é homotópica, tomando cuidado com x_0).

(c) Seja h laço sobre x_0. Dado $t \in [0,1]$, temos $((g \circ f)'(h))(t) = (g \circ f)(h(t)) = g'(f(h(t))) = ((g' \circ f')h)(t)$.

$\square$

Proposição 6.2.11. *Se (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ relativamente a y_0 e $g \circ f \simeq Id_X$ relativamente a x_0. Assim, $(g \circ f)^\sharp = Id_{\pi_1(X,x_0)}$ e $(f \circ g)^\sharp = Id_{\pi_1(Y,y_0)}$, mas $(g \circ f)^\sharp = g^\sharp \circ f^\sharp$ e $f^\sharp \circ g^\sharp$. Logo, $f^\sharp$ e $g^\sharp$ são isomorfismos. $\square$

Corolário 6.2.12. *Se (X, τ) e (Y, σ) são tais que $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ não são isomorfos, então não existe homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$.*

Exercicios

Exercício 6.2.13. Seja $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Mostre que $\pi_1(X, (1,0))$ e $\pi_1(S^1, (1,0))$ são isomorfos.

6.3 Espaço de recobrimento

Definição 6.3.1. Sejam (X, τ), $(\tilde{X}, \rho)$, (Y, σ) espaços topológicos. Seja $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ uma função contínua. Sejam $f : Y \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow \tilde{X}$ funções contínuas. Dizemos que g é um **levantamento** de f se $f = p \circ g$.

Exemplo 6.3.2. Considere $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Dado $z \in \mathbb{Z}$, seja $\omega_z : [0,1] \longrightarrow S^1$ dada por $\omega_z(t) = (\cos(2\pi z t), \operatorname{sen}(2\pi z t))$. Note que $\tilde{\omega}_z : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\omega}_z(t) = zt$ é um levantamento de ω_z.

Na notação da definião anterior, temos que $X = S^1$, $\tilde{X} = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$.

Definição 6.3.3. Dado um espaço (X, τ), chamamos de um **espaço de recobrimento** um espaço $(\tilde{X}, \rho)$ e uma função $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ tais que para todo $x \in X$, existe A aberto tal que $x \in A$, $p^{-1}[A] = \bigcup_{i \in I} A_i$ onde cada A_i é aberto, $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $p \restriction A_i$ é um homeomorfismo.

Exemplo 6.3.4. Note que no exemplo anterior, temos que $\mathbb{R}$ e p formam espaço de recobrimento para S^1.

Lema 6.3.5. *Seja $F : Y \times [0,1] \longrightarrow X$ uma função e $F' : Y \times \{0\} \longrightarrow \tilde{X}$ um levantamento para $F \restriction Y \times \{0\}$. Então, dado $y_0 \in Y$, existem uma vizinhança aberta A para y_0 e $\tilde{F} : A \times [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ um levantamento para $F \restriction A \times [0,1]$ que estende F'.*

Demonstração. Seja $t \in [0,1]$. Seja V_t aberto em torno de $F(y_0, t)$ como na definição de recobrimento. Pela continuidade de F, existem A_t e $a_t, b_t \in \mathbb{R}$ tais que $F[A_t \times]a_t, b_t[] \subset V_t$. Como $[0,1]$ é compacto, existem $t_1, ..., t_n \in [0,1]$ tais que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^n]a_{t_i}, b_{t_i}[$. Sem perda de generalidade, suponha $0 \in]a_{t_0}, b_{t_0}[$. Então existe B_0 um dos abertos disjuntos de $(p^{-1} \circ F)[A_{t_0} \times]a_{t_0}, b_{t_0}[]$ tal que $F'(y_0, 0) \in B$. Como B_0 é homeomorfo a $A_{t_0} \times]a_{t_0}, b_{t_0}[$ via p, pode-
(*) mos definir $\tilde{F} \restriction F^{-1}[A_{t_0} \times]a_{t_0}, b_{t_0}[$ como $(p \restriction B_0)^{-1} \circ F$. **(?)**Daí basta repetir o processo para algum outro $A_{t_i} \times]a_{t_i}, b_{t_i}[$ de forma que $]a_{t_0}, b_{t_0}[\cap]a_{t_i}, b_{t_i}[\neq \emptyset$ e "grudar" novas partes de $\tilde{F}$. Note que terminamos isso num número finito de passos e que o A desejado é $\bigcap_{i=1}^n A_i$. □

Proposição 6.3.6. *Seja $F : Y \times [0,1] \longrightarrow X$ uma função e $F' : Y \times \{0\} \longrightarrow \tilde{X}$ um levantamento para $F \restriction Y \times \{0\}$. Então existe uma única $\tilde{F} : Y \times [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ levantamento para F que estende F'.*

Demonstração. Sejam $\tilde{F}_1 : A_1 \times [0,1]$ e $\tilde{F}_2 : A_2 \times [0,1]$ levantamentos como no Lema anterior de forma que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Seja $y_0 \in A_1 \cap A_2$. Note que $\tilde{F}_1(y_0, 0) = \tilde{F}_2(y_0, 0)$ e, portanto, estão num mesmo aberto B em $\tilde{X}_0$ homeomorfo via p a um aberto contendo $F(y_0, 0)$. Por conexidade, temos que $\tilde{F}_1(y_0, t), \tilde{F}_2(y_0, t) \in B$ para qualquer outro t e, portanto, $\tilde{F}_1(y_0, t) = \tilde{F}_2(y_0, t)$ para todo t. Por um argumento análogo, $\tilde{F}'s$ dadas em outros y com domínios não disjuntos precisam concordar nas intersecções de seus domínios. Assim, $\tilde{F}$ pode ser definida para todo $Y \times [0,1]$ de maneira única. □

Lema 6.3.7. *Seja $p : X \longrightarrow \tilde{X}$ um espaço de recobrimento e seja $f : [0,1] \longrightarrow X$ um caminho tal que $f(0) = x_0 \in X$. Seja $\tilde{x}_0 \in p^{-1}[x_0]$. Então existe um único levantamento $\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.*

Demonstração. Este é um caso particular da Proposição 6.3.6 para o caso em que Y é unitário. □

Lema 6.3.8. *Seja $p : X \longrightarrow \tilde{X}$ um espaço de recobrimento. Então para cada homotopia de caminhos da forma $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ com $f(0) = x_0 \in X$ e cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}[x_0]$ existe uma única homotopia para levantamentos $\tilde{f} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \tilde{X}_0$ tais que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.*

Demonstração. Segue aplicando-se o Lema anterior e depois a Proposição 6.3.6. □

Teorema 6.3.9. *$\pi_1(S^1, (1,0))$ é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}, +)$ e é gerado por $[\omega] = [\omega_1]$.*

Demonstração. Seja $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ um laço em $x_0 = (1,0)$. Seja $\tilde{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ um levantamento para f (dado pelo Lema 6.3.8). Note que $\tilde{f} = z \in \mathbb{Z}$, pois $p^{-1}[(1,0)] = \mathbb{Z}$. Assim, note que $f \sim_{0,1} \omega_z$ via

$$H(s,t) = (1-t)\tilde{f}(s) + t\omega_z(s)$$

Aplicando p a esta homotopia, obtemos que $[f] = [\omega_z]$. Se mostrarmos a unicidade de tal z, terminamos. Suponha $[\omega_z] = [\omega_s]$. Então, pelo Lema **??**, obtemos que existe $\tilde{H}$ uma homotopia entre $\tilde{w}_z$ e $\tilde{\omega}_s$. Note que

$$z = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) = s$$

□

Alongamentos

Alongamento 6.3.10. Mostre que S^1 não é contrátil.

Exercícios

Exercício 6.3.11. Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é contrátil.

Exercício 6.3.12. Considere $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$. Este é um roteiro para mostrar o DefDuploATeoremadoponto fixo de Brower: Seja $f : D^2 \longrightarrow D^2$ uma função contínua. Então f tem ponto fixo.

(a) Suponha que não. Para cada x, defina $F(x)$ igual ao (único) ponto de S^1 que está na intersecção da semi-reta iniciada em x e que passa por $f(x)$ (e que é diferente de x). Faça um desenho e se convença que F é contínua.

(b) Note que F é uma retração de deformação.

(c) Conclua que D^2 e S^1 são homotopicamente equivalentes e obtenha uma contradição.

Capítulo 7

Aplicações

7.1 Metrizabilidade

Proposição 7.1.1. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. $F \subset X$ é completo se, e somente se, é fechado.*

Demonstração. Basta notar que F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$ e que uma sequência de Cauchy em F é sequência de Cauchy em X. □

Proposição 7.1.2. *Sejam $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ espaços métricos completos. Então $X_1 \times X_2$ com a métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ é métrico completo.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 7.1.3. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então existe d' métrica limitada por 1 equivalente a d também completa.*

Demonstração. Exercício (ver Exercício 1.1.53). □

Proposição 7.1.4. *Sejam $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ espaços métricos tais que cada d_n é limitada por 1. Então $d : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \mathbb{R}$ dada por $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^{n+1}}$ é uma métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ que induz a topologia produto sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Além disso, se cada d_n for completa, então d é completa.*

Demonstração. Exercício. □

Corolário 7.1.5. *Existe uma métrica completa sobre $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que induz a topologia produto deste espaço.*

Demonstração. Segue diretamente das proposições anteriores e do fato de $\mathbb{R}$ com a métrica usual ser completo. $\square$

Teorema 7.1.6. *Seja (X, τ) espaço T_1. São equivalentes:*

(a) X é T_3 e tem base enumerável;

(b) X é separável e metrizável;

(c) X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Claramente $b \Rightarrow a$, já que X ser metrizável implica em ser regular e, para espaços métricos, ser separável implica a existência de base enumerável.

$c \Rightarrow a$. Note que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável (pois é produto enumerável de espaços com base enumerável) e é regular (produto de regulares é regular). Logo, (X, τ) tem tais propriedades, pois ambas são preservadas para subespaços.

$c \Rightarrow b$. Como $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tem base enumerável, X também tem. Logo X é separável. Note que subespaço de métrico é metrizável.

$a \Rightarrow c$. Sejam $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base para X e $C = \{(m,n) : \overline{B_m} \subset B_n\}$. Note que (X, τ) é normal (espaço regular com base enumerável é normal). Para cada $(m,n) \in C$, seja $f_{m,n} : X \to [0,1]$ contínua tal que $f_{m,n}[\overline{B_m}] = \{0\}$ e $f_{m,n}[X \setminus B_n] = \{1\}$ (cuja existência se deve à normalidade). Seja $\mathcal{F} = \{f_{m,n} : (m,n) \in C\}$. Note que $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados.

De fato, seja $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$. Seja B_n um aberto da base tal que $x \in B_n \subset X \setminus F$. Como X é regular, existe B_m tal que $x \in B_m \subset \overline{B_m} \subset B_n$. Note que $f_{m,n}$ é tal que $f_{m,n}(x) = 0$ e $f_{m,n}[F] = \{1\}$. Pelo Teorema da Imersão, X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathcal{F}}$, mas como $\mathcal{F}$ é enumerável, segue que X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. $\square$

Definição 7.1.7. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é **completamente metrizável** se ele é homeomorfo a um espaço métrico completo.

Proposição 7.1.8. *Sejam (X, d) espaço métrico completo e $A \subset X$ aberto. Então A é completamente metrizável.*

Demonstração. Considere $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, X \setminus A)$. Note que g é contínua e, para todo $a \in A$, $g(a) > 0$ (pois A é aberto). Assim, $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(a) = \frac{1}{g(a)}$ é contínua e positiva. Considere então $G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset X \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que G é completo. Para isso, basta mostrar que G é fechado em $X \times \mathbb{R}$. Definindo $l : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $l(x, y) = y \cdot g(x)$ (que é contínua), vemos que $G = \{(x, y) : y \cdot g(x) = 1\} = l^{-1}[\{1\}]$, isto é, G é a imagem inversa de um fechado via função contínua, logo G é fechado, como queríamos.

Por fim, note que $h : A \to G$ definida por $h(x) = (x, f(x))$ é um homeomorfismo: h é claramente bijetora; por ser contínua nas coordenadas, segue que h é contínua; a inversa de h é a "projeção" $\pi : G \to A$ dada por $\pi((x, f(x)) = x$, a qual é contínua por ser restrição de π_X. Portanto, A é completamente metrizável. □

Teorema 7.1.9. *Todo G_δ* [1] *num espaço métrico completo é completamente metrizável.*

Demonstração. Sejam (X, d) espaço métrico completo e $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é aberto em X. Seja d_n métrica completa equivalente a d sobre A_n. Podemos supor d_n limitada por 1. Assim, existe uma métrica completa sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ que induz a topologia produto. Considere $\Delta = \left\{(a, \dots, a, \dots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n : a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\}$. Note que Δ é fechado em $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (por ser T_2). Logo, Δ é métrico completo.

Note que $f : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \Delta$ dada por $f(a) = (a)_{n\in\mathbb{N}}$ é um homeomorfismo. Portanto, G é completamente metrizável. □

Corolário 7.1.10. *Existe uma métrica completa equivalente à usual sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Note que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$ é um G_δ e, portanto o resultado segue pelo teorema anterior. □

Exercicios

Exercício 7.1.11. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos completos. Seja $F \subset X$ fechado e $A \subset Y$ aberto. Mostre que $F \times A$ é completamente metrizável.

Exercício 7.1.12. Mostre que todo métrico separável (X, d) está contido num métrico compacto de base enumerável (Y, d') (não necessariamente a métrica d é uma restrição de d', mas essas duas métricas são equivalentes em X).

[1] interseção enumerável de abertos.

7.2 Paracompacidade

Definição 7.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ é **localmente finita** se, para todo $x \in X$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $\{F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 7.2.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **refinamento** para $\mathcal{C}$ se $\mathcal{F}$ é uma cobertura e para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $F \subset C$.

Definição 7.2.3. Dizemos que (X, τ) é um **espaço paracompacto** se toda cobertura aberta admite refinamento aberto localmente finito.

Observação 7.2.4. Note que todo espaço compacto é paracompacto.

Proposição 7.2.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico com base enumerável e regular. Então (X, τ) é paracompacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para X. Para cada $x \in X$, sejam $B_x, C_x \in \mathcal{B}$ tais que $x \in B_x \subset \overline{B_x} \subset C_x \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$. Como o conjunto de todos os B_x's é enumerável, fixe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\{B_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} = \{B_x : x \in X\}$. Defina $W_0 = C_{x_0}$ e $W_n = C_{x_n} \smallsetminus \bigcup_{k<n} \overline{B_{x_n}}$, para $n > 0$. Vamos mostrar que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o refinamento desejado.

Cobertura: Basta notar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{x_n} = X$.

Refinamento: Basta notar que $W_n \subset C_{x_n} \subset C$ para algum $C \in \mathcal{C}$.

Localmente finito: Sejam $x \in X$ e x_j tal que $x \in B_{x_j}$. Note que $W_n \cap B_{x_j} = \emptyset$ se $j < n$. Logo, $|\{W_n : W_n \cap B_{x_j} \neq \emptyset\}| \leq j$. □

A ideia do próximo resultado é dizer que, para família localmente finitas, união dos fechos é o fecho da união:

Lema 7.2.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma família localmente finita. Então, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} = \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F}$. Em particular, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ é fechado.*

Demonstração. Note que $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}} = \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F}$. Po outro lado, sejam $x \in \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F}$ e A aberto tal que $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $x \in \overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} F}$ pela definição de $\mathcal{F}_0$. Pelo fato de $\mathcal{F}_0$ ser finito, temos $\overline{\bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} F} = \bigcup_{F\in\mathcal{F}_0} \overline{F} \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$. Logo, $x \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$ como queríamos. □

O próximo Lema nos dá uma condição suficiente para que dois fechados num paracompacto possam ser separados:

Lema 7.2.7. *Sejam (X, τ) um espaço paracompacto e $A, B \subset X$ fechados disjuntos. Se, para todo $x \in B$, existem abertos U_x e V_x tais que $A \subset U_x$, $x \in V_x$ e $U_x \cap V_x = \emptyset$, então existem U e V abertos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Demonstração. Como B é fechado, B é paracompacto (ver Alongamento 7.2.13). Logo, existe $\{W_s : s \in S\}$ refinamento finito aberto para $\{V_x : x \in B\}$. Note que, como cada $W_s \subset B_x$ para algum x, temos que $\overline{W_s} \cap A = \emptyset$ (U_x atesta isso). Seja $V = \bigcup_{s \in S} W_s$. Note que $B \subset V$. Pelo Lema 7.2.6, $V' = \bigcup_{s \in S} \overline{W_s}$ é fechado. Como $A \subset X \smallsetminus V'$, basta fazermos $U = X \smallsetminus V'$. □

Teorema 7.2.8. *Todo espaço de Hausdorff paracompacto é normal.*

Demonstração. Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Pelo Lema 7.2.7, (X, τ) é regular (faça $A = \{x\}$ e B fechado tal que $x \notin B$). Como (X, τ) é regular, o Lema 7.2.7 implica que (X, τ) é normal. □

Vamos terminar esta seção mostrando que todo espaço métrico é paracompacto. A demonstração que apresentaremos é baseada na feita em [1][2]. Antes, precisamos de um definição e um resultado bastante conhecido de teoria dos conjuntos:

Definição 7.2.9. Dizemos que $\leq$ é uma **boa ordem** sobre X se todo subconjunto não vazio de X admite mínimo (segundo $\leq$).

O seguinte fato é equivalente ao axioma da escolha (em alguns livros modernos, ele inclusive fica no lugar do axioma da escolha na lista dos axiomas básicos).

Teorema 7.2.10 (Princípio da boa ordem)**.** *Todo conjunto não vazio admite uma boa ordem.*

Agora passamos à demonstração do teorema:

Teorema 7.2.11. *Todo espaço métrico é paracompacto.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathcal{C}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, vamos definir uma família $(D_n(C))_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ por indução sobre n. Para cada $C \in \mathcal{C}$, defina $D_1(C) = \bigcup_{x \in A} B_{\frac{1}{2}}(x)$, onde

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\} \text{ e } B_{\frac{3}{2}}(x) \subset C\}$$

[2]Note que é um artigo de uma única página, que apresenta uma nova demonstração para um teorema já conhecido anteriormente.

Suponha definidos $D_k(C)$ para todo $k < n$ e todo $C \in \mathcal{C}$. Defina $D_n(C) = \bigcup_{x \in A} B_{\frac{1}{2^n}}(x)$, onde

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}, x \notin D_k(C')$$
$$\text{para qualquer } k < n \text{ e } C' \in \mathcal{C} \text{ e } B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C\}$$

Vamos mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é o refinamento desejado. Primeiro, note que, de fato, $D_n(C) \subset C$. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}$. Assim, existe algum $n \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C$. Logo, $x \in D_k(C)$ para algum $k \leq n$.

Resta mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é localmente finito. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in D_n(C')$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, onde n é tal que $x \in D_n(C)$. Note que é suficiente mostrarmos que:

(a) Se $i \geq n+j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ não intercepta $D_i(C')$ para qualquer $C' \in \mathcal{C}$.

(b) Se $i < n+j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ intercepta $D_i(C')$ para, no máximo, um $C' \in \mathcal{C}$.

Vamos provar (a). Como $n \geq i$, toda bola utilizada na criação de $D_i(C')$ tem centro fora de $D_n(C)$. Como $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, temos que $d(x, y) \geq \frac{1}{2^j}$ para todo y centro de alguma bola utilizada na criação de $D_i(C')$. Como $i \geq j+1$ e $n+j \geq j+1$, temos que $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y) = \emptyset$.

Agora vamos provar (b). Sejam $p \in D_i(E)$ e $q \in D_i(F)$ com $E \prec F$. Vamos mostrar que $d(p,q) \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. Note que isso é suficiente. Sejam y, z tais que $p \in B_{\frac{1}{2^i}}(y) \subset D_i(E)$, $q \in B_{\frac{1}{2^i}}(z) \subset D_i(F)$ e $B_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset E$. Note também que $z \notin E$ (pois $E \prec F$). Logo, $d(y,z) \geq \frac{3}{2^i}$. Logo, temos

$$\begin{array}{rcl}
\frac{3}{2^i} & \leq & d(y,z) \\
 & \leq & d(y,p) + d(p,q) + d(q,z) \\
 & \leq & \frac{2}{2^i} + d(p,q)
\end{array}$$

Assim, $d(p,q) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. □

Alongamentos

Alongamento 7.2.12. Se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita, então $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ também é.

Alongamento 7.2.13. Seja (X, τ) um espaço topológico paracompacto e $F \subset X$ fechado. Mostre que F é paracompacto.

Exercícios

Exercício 7.2.14. Seja (X, τ) espaço topológico. Mostre que $D \subset X$ é um discreto (i.e, com a topologia induzida é discreto) fechado se, e somente se, $\{\{d\} : d \in D\}$ é localmente finito.

7.3 Partição da unidade

Definição 7.3.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $(f_s)_{s \in S}$ de funções contínuas de X em $[0, 1]$ é chamada de uma **partição da unidade** se $\sum_{s \in S} f_s(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Observação 7.3.2. Se $(f_s)_{s \in S}$ é uma partição da unidade, então, para todo $x \in X$, $\{s \in S : f_s(x) \neq 0\}$ é enumerável.

Definição 7.3.3. Dizemos que uma partição da unidade $(f_s)_{s \in S}$ é **localmente finita**, se $\{f_s^{-1}[]0, 1]] : s \in S\}$ é localmente finito.

Observação 7.3.4. Nesse caso, $\{f_s^{-1}[]0, 1]] : s \in S\}$ é uma cobertura aberta e $\sum_{s \in S} f_s(x)$ é, na verdade, uma soma finita para cada ponto fixado.

Definição 7.3.5. Uma partição da unidade $(f_s)_{s \in S}$ é dita **subordinada** a uma cobertura $\mathcal{C}$ se para todo $s \in S$ existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $f_s^{-1}[]0, 1]] \subset C$.

Lema 7.3.6. *Seja (X, τ) um espaço topológico regular. Se toda cobertura aberta para X admite refinamento localmente finito (não necessariamente aberto ou fechado), então, para toda cobertura aberta $\{U_s : s \in S\}$, existe cobertura fechada localmente finita $\{F_s : s \in S\}$ tal que para todo $s \in S$, $F_s \subset U_s$.*

Demonstração. Seja $\{U_s : s \in S\}$ cobertura aberta. Como (X, τ) é regular, existe uma cobetura aberta $\mathcal{W}$ tal que $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ refina $\{U_s : s \in S\}$. Seja $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ refinamento de $\mathcal{W}$ localmente finito. Para cada $t \in T$, seja $s(t) \in S$ tal que $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$. Para cada $s \in S$, seja $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$. Como $\{A_t : t \in T\}$ é localmente finito, temos que F_s é fechado. Note, também, que $F_s \subset U_s$. Resta mostrar que $\{F_s : s \in S\}$ é localmente finito (é cobertura, pois $(A_t)_{t \in T}$ é cobertura). Seja $x \in X$. Como $\{\overline{A_t} : t \in T\}$ é localmente finito, existe A aberto tal que $x \in A$ e $T' = \{t \in T : \overline{A_t} \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $\{s(t) : t \in T'\} = \{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$. Portanto, $\{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. $\square$

Lema 7.3.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $\mathcal{U}$ cobertura aberta para X. Se existe $(f_s)_{s \in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U}$ admite refinamento aberto localmente finito.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que, para cada $g : X \to [0,1]$ contínua e para cada $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) > 0$, existe U aberto tal que $x_0 \in U$ e existe $S' \subset S$ finito tal que

$$\forall s \in S \smallsetminus S', \forall x \in U, f_s(x) < g(x). \tag{7.1}$$

De fato, existe $S' \subset S$ finito tal que

$$1 - \sum_{s \in S'} f_s(x_0) < g(x_0).$$

Por outro lado, temos que

$$\sum_{s \in S \smallsetminus S'} f_s(x_0) = 1 - \sum_{s \in S'} f_s(x_0)$$

Como $\sum_{s \in S'} f_s$ é uma função contínua, existe um aberto U tal que $x_0 \in U$ e

$$\forall x \in U, \sum_{s \in S \smallsetminus S'} f_s(x) < g(x),$$

portanto, temos (7.1).

Vamos mostrar que $f = \sup\{f_s : s \in S\}$ é uma função contínua. De fato, para cada $x_0 \in X$, existe $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x) > 0$. Por (7.1), existem $S' \subset S$ finito e U aberto tais que $x_0 \in U$ e

$$\forall s \in S \smallsetminus S', \forall x \in U, f_s(x) < f_{s_0}(x).$$

Portanto, para cada $x \in U$, $\sup\{f_s(x) : s \in S\} = \max\{f_s(x) : s \in S'\}$. Logo, $f|_U$ é contínua, já que função máximo é contínua (exercício).

Vamos agora ao refinamento. Para cada $s \in S$, temos que $V_s = \{x \in X : f_s(x) > \frac{1}{2} f(x)\}$ é aberto. Note que $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, pois $V_s \subset f_s^{-1}[]0,1]]$. Além disso, $\mathcal{V}$ é localmente finito (basta tomar $g = \frac{1}{2} f$ em (7.1)). $\square$

Agora vamos ao principal Teorema da seção:

Teorema 7.3.8. *Seja (X, τ) espaço T_1. São equivalentes:*

(a) (X, τ) é paracompacto Hausdorff;

(b) Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela localmente finita;

(c) *Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela.*

Demonstração. ($a \Rightarrow b$). Seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Seja $(U_s)_{s\in S}$ refinamento aberto localmente finito (decorrente da paracompacidade). Pelo Lema 7.3.6, existe $\{F_s : s \in S\}$ cobertura fechada localmente finita tal que $F_s \subset U_s, \forall s \in S$. Como X é normal (Teorema 7.2.8) podemos usar o Lema de Urysohn e definir, para cada $s \in S$, $g_s : X \to [0,1]$ contínua tal que $g_s[X \setminus U_s] = \{0\}$ e $g_s[F_s] = \{1\}$.

Defina $g(x) = \sum_{s\in S} g_s(x)$. Como $(U_s)_{s\in S}$ é localmente finita, g está bem definida e é contínua (dado $x \in X$ qualquer, existe um número finito de abertos de $(U_s)_{s\in S}$ tais que $x \in U_s$ e assim g é localmente uma soma finita de funções contínuas). Para cada $s \in S$, defina $f_s(x) = \frac{g_s(x)}{g(x)}$. Note que $(f_s)_{s\in S}$ é a partição desejada.

($b \Rightarrow c$). Óbvio.

($c \Rightarrow a$). Pelo Lema 7.3.7, resta mostrar que (X, τ) é de Hausdorff. Sejam $x_1, x_2 \in X$ distintos. Como (X, τ) é T_1, $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ é uma cobertura aberta. Logo, por (c), existe $(f_s)_{s\in S}$ partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$. Seja $s_0 \in S$ tal que $f_{s_0}(x_1) = a > 0$. Note que $f_{s_0}^{-1}[]0,1]] \not\subset X \setminus \{x_1\}$, logo $f_{s_0}^{-1}[]0,1]] \subset X \setminus \{x_2\}$, e assim $f_{s_0}(x_2) = 0$. Note, por fim, que $U_1 = f_{s_0}^{-1}[]\frac{a}{2}, 1]]$ e $U_2 = f_{s_0}^{-1}[[0, \frac{a}{2}[]$ são abertos disjuntos que contém x_1 e x_2, respectivamente. $\square$

Exercícios

Exercício 7.3.9. Mostre que existe uma partição da unidade $(f_i)_{i\in I}$ sobre $\mathbb{R}$ onde para cada $i \in I$, $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é compacto.

Dicas de alguns exercícios

1.1.50

d Para o lado $\overline{A} \subset A \cup \partial A$, considere $x \in \overline{A}$. Note que se $x \in A$, é trivial. No caso que $x \notin A$, mostre que $x \in \partial A$.

1.1.60

e Suponha que não e use os itens anteriores.

1.2.16

a Comece com $A \in \tau$ e $x \in A$. Use o fato que $\mathcal{B}$ é base. Depois use a propriedade do enunciado. Mostre que $A \in \sigma$.

1.3.21 Veja a Proposição **1.1.15**.

1.3.30

a Mostre que tal conjunto é fechado por intersecções finitas.

d Considere o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}\}$. Mostre que tal conjunto não pode ser separado do ponto 0.

1.3.31 Lembre que os racionais são enumeráveis.

1.4.27 Fixe uma base local enumerável para cada ponto, mostre que a união de todoas elas forma uma base.

1.4.37 Veja a demonstração da proposição **1.3.20**. Use o fato da existência de uma base enumerável para construir o análogo das famílias $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4.38 Considere $\mathcal{A} = \{(B_1, B_2) \in \mathcal{B}^2 : B_1 \subset B_2\}$. Fixe $C' \in \mathcal{C}$. Para cada $(B_1, B_2) \in \mathcal{A}$, se existir $C \in \mathcal{C}$ de forma que $B_1 \subset C \subset B_2$, então escolha C_{B_1,B_2} como um destes elementos. Se não existir, simplesmente faça $C_{B_1,B_2} = C'$. Note que $\mathcal{C}' = \{C_{B_1,B_2} : (B_1, B_2) \in \mathcal{A}\}$ é enumerável. Mostre que $\mathcal{C}'$ é base.

2.1.20

a Use o Alongamento 2.1.14.

c Considere $X = [0, 1]$, $F_1 = \{0\}$ e $F_2 =]0, 1]$.

2.1.22 Suponha $x_n \longrightarrow x$. Note que a sequência $y_{2n} = x_n$ e $y_{2n+1} = x$ também é convergente.

2.4.16 Mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em X se, e somente se, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y. Lembre que funções contínuas levam sequências convergentes em sequências convergentes (Proposição 2.1.11).

2.4.17 Para mostrar que $\tilde{f}$ é bijetora, considere $x \in RR$, mostre que $f(a) = x$, onde $a \sup\{d \in D : f(d) \leq x\}$.

2.4.19 Considere $[0, 1] \cup [2, 0]$.

2.4.21

b Use o Corolário 2.4.14 e o item (a).

3.1.13 Mostre que em tal topologia, cada uma das f_α's é contínua. Mostre que se um dos abertos da definição da topologia fraca não estiver na topologia, então alguma das f_α's não é contínua.

3.2.14 Considere $(x, y) \notin D$. Mostre que existe uma vizinhança básica de (x, y) que não intercepta D. Faça um desenho e separe em casos que fica mais fácil.

3.2.15 Considere conjuntos da forma $\prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ onde B_n é elemento de alguma base se $n < n_0$ e $B_n = X_n$ caso contrário.

b Primeiro tome o conjunto de todos os subconjuntos com n elementos. Tal conjunto é enumerável pelo resultado do enunciado. Depois tome o subconjunto deste cujo os elementos sejam 2-2 disjuntos.

c Elas são indexadas por coisas enumeráveis (com n fixado).

e Fixe um aberto básico. Olhe as coordenadas em que ele é diferente de $\mathbb{N}$. Escolha intervalos abertos disjuntos (de $\mathbb{R}$) em torno de tais coordenadas (que são finitas). Construa uma $f \in D$ com tais intervalos e que esteja no aberto básico.

3.3.2

b Basta notar que $\mathbb{N}$ é discreto.

d Use o fato que imagem contínua de separável é separável e que denso em denso é denso.

4.1.28 Use o fato que $[0, 1]$ é compacto.

4.1.32

a Basta notar que é subespaço de um compacto Hausdorff.

c Escreva $Y = X \cup \{x\}$. Seja $a \in X$. Sejam A, B abertos (em Y) disjuntos tais que $a \in A$, $x \in B$. Note que $\overline{A} \subset X$ é compacto.

4.2.17 Use o teorema da imersão.

5.1.18

d Use o fato que cada D_F é conexo e a Proposição 5.1.12.

e Use o exercício 5.1.16.

Soluções de alguns exercícios

1.1.47

b Vamos mostrar que $X \setminus (F \cup G)$ é aberto. Se mostrarmos que $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, seguirá que o complementar de $F \cup G$ é aberto por ser a interseção (finita) de abertos, o que acarretará que $F \cup G$ é fechado. De fato, se $x \in X \setminus (F \cup G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, e daí decorre que $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$. Reciprocamente, se $x \in (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, ou equivalentemente, $x \in X$ e $x \notin F \cup G$, acarretando a igualdade desejada.

c Note que se $\mathcal{A}$ é uma família não vazia de conjuntos, então

$$X \setminus \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} X \setminus A$$

Da igualdade acima, e do fato de que cada membro de $\mathcal{F}$ possui o complementar aberto, o temos (c).

1.1.48 Por definição, $\overset{\circ}{A}$ é a reunião dos abertos contidos em A. Daí, se $x \in V$ para algum V aberto contido em A, temos $x \in \overset{\circ}{A}$. A recíproca é imediata.

1.1.56 Seja $F \subset Y$ fechado em Y. Então $Y \setminus F$ é aberto em Y. Logo, existe $A \subset X$ um aberto em X tal que $A \cap Y = Y \setminus F$. Vamos mostrar que $F' = X \setminus A$ satisfaz o que desejamos. Primeiramente, note que F' é fechado em X (pois é complementar de um aberto). Agora só precisamos mostrar que, de fato,

$$F = F' \cap Y$$

Seja $y \in F$. Então $y \notin Y \setminus F$ e, portanto, $y \notin A$. Assim, $y \in X \setminus A$ e, portanto, $y \in Y \cap (X \setminus A) = F'$. A outra inclusão segue de maneira análoga (e é um bom alongamento para o leitor).

Agora precisamos mostrar que, dado F' fechado em X, $F' \cap Y$ é fechado em Y. Isso decorre imediatamente do fato que $Y \setminus (Y \cap F') = Y \cap (X \setminus F')$. Logo, $Y \setminus (Y \cap F')$ é aberto em Y e, portanto, $Y \cap F'$ é fechado em Y.

1.1.57 Suponha $F \subset Y$ fechado em Y. Então existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F' \cap Y = F$. Logo, F é fechado em X (por ser interseção de fechados). Agora suponha $F \subset Y$ fechado em X. Note que $F = F \cap Y$ e, portanto, F é fechado em Y.

1.1.58 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço aberto. Então $A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, for aberto em X.

A demonstração é análoga a da Proposição **1.1.57**.

1.2.15 Suponha $x \in \overline{A}$. Seja $V \in \mathcal{V}$, então existe $U \subset V$ aberto tal que $x \in U$. Como $x \in \overline{A}$, obtemos $U \cap A \neq \emptyset$ e, portanto, $V \cap A \neq \emptyset$.

Suponha que para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$. Seja $U \subset X$ aberto tal que $x \in U$. Como $\mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset U$. Logo, como $V \cap A \neq \emptyset$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$.

1.3.22 Supondo (X, τ) T_3 e fixando $x \in X$, a família $\mathcal{V}_x = \{\overline{A} : A \in \tau$ e $x \in A\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x. Reciprocamente, supondo a existência de um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, basta aplicar a Proposição **??** para concluir que (X, τ) é T_3.

1.3.25 Procedamos pela contrapositiva.

Suponha $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, para quaisquer $x, y \in X$ distintos. Isso equivale a afirmar que a é ponto aderente de $\{x\}$ se, e somente se, a é ponto aderente de $\{y\}$ ou, equivalentemente, todo aberto que contém x também contém y, isto é, (X, τ) não é T_0.

1.3.26 Supondo (X, τ) T_1, provemos (b). Basta considerar $\mathcal{A} = \{A \in \tau : x \in A\}$. Por construção, vale que $\{x\} \subset \bigcap \mathcal{A}$. Por outro lado, se existisse $y \neq x$ tal que $y \in \bigcap \mathcal{A}$, então todo aberto de A que contém x também conteria y, o que contraria a hipótese de estarmos supondo (X, τ) T_1.

Agora suponha que para todo $x \in X$, existe uma coleção $\mathcal{A}_x$ de abertos tal que $\bigcap \mathcal{A}_x = \{x\}$. Defina $B_x = \{A \in \tau | x \in A\}$ e $\mathcal{V}_x = \{U \in \tau : (\exists A, B)(A \in A_x$ e $B \in B_x)(U = A \cap B)\}$. Claramente, $\mathcal{V}_x$ é sfv para x e $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$.

Finalmente, se para cada $x \in X$ existir um sfv $\mathcal{V}_x$ para x tal que $\bigcap \mathcal{V}_x = \{x\}$, então para $x \neq y$, segue que existem sistemas de vizinhanças $\mathcal{V}_x$ e $\mathcal{V}_y$ para x e y, respectivamente, tais que $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}_x \neq \bigcap \mathcal{V}_y = \{y\}$, ou seja, existem abertos $A_y \in \mathcal{V}_y$ e $A_x \in \mathcal{V}_x$ tais que $x \in A_x$ mas $y \notin A_x$ e $y \in A_y$ mas $x \notin A_y$, donde (X, τ) é T_1.

1.3.27 Se (X, τ) é normal, então em particular $\{x\}$ é fechado. Assim, sejam F um fechado e $x \in X$ tais que $x \notin F$, isto é, $\{x\}$ e F são fechados disjuntos. Por X ser T_4, existem abertos A e B disjuntos tais que $\{x\} \subset A$ e $F \subset B$, isto é, (X, τ) é T_3 e, por ser T_1, X é regular.

Se (X, τ) for regular, novamente $\{x\}$ é fechado, para qualquer $x \in X$. Em particular, se $x \neq y$, $x \notin \{y\}$, logo existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $\{y\} \subset B$, logo (X, τ) é de Hausdorff.

Daí, se (X, τ) é Hausdorff, dados $x \neq y$ elementos de X, existem abertos disjuntos A, B tais que $x \in A$ e $y \in B$, em particular, por serem disjuntos, $x \in A$ e $y \notin A$ e $y \in B$ e $x \notin B$, implicando em (X, τ) ser T_1.

Se (X, τ) é T_1, então claramente também é T_0.

1.4.26 Suponha que exista um aberto não vazio A tal que $A \cap D = \emptyset$. Então, $X \smallsetminus A$ é um fechado diferente de X de modo que $D \subset (X \smallsetminus A)$. Então, como $\overline{D}$ é a interseção de todos os fechados que contém D, segue que $\overline{D} \neq X$ e D não é denso.

Agora, suponha que para qualquer aberto não vazio A, temos que $A \cap D \neq \emptyset$. Seja F um fechado tal que $D \subset F$, segue que $X \smallsetminus F$ é um aberto tal que $(X \smallsetminus F) \cap D = \emptyset$. Logo $X \smallsetminus F = \emptyset$ e, então, $F = X$. Portanto, X é o único fechado que contém D e $\overline{D} = X$.

2.1.18 Seja A um aberto em Y. Então, como f é contínua, $f^{-1}[A]$ é um aberto em X, e portanto, $f^{-1}[A] \cap Z$ é um aberto de Z. Por outro lado, como $(f \restriction Z)^{-1}[A] = f^{-1}[A] \cap Z$, temos que $f \restriction Z$ é contínua.

3.1.11 Suponha que (X, τ) seja espaço de Hausdorff. Seja $(a, b) \in X \times X$, com $a \neq b$. Sejam, também, $A, B \in \tau$ disjuntos tais que $a \in A$ e $b \in B$. Note que $(A \times B) \cap D = \emptyset$ e $(a, b) \in A \times B$.

Suponha que D seja fechado. Sejam $a, b \in X$, com $a \neq b$. Logo, $(a, b) \notin D$ e existem $A, B \in \tau$ tais que $(a, b) \in A \times B$ e $(A \times B) \cap D = \emptyset$. Portanto, $A \cap B = \emptyset$.

3.2.13 Basta mostrar para $n = 2$. Seja $x \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Como cada f_i é contínua, existe V_i tal que $f_i[V_i] \subset]f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon[$. Seja $V = V_1 \cap V_2$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $f_1(x) \leq f_2(x)$ (e, portanto, $g(x) = f_2(x)$). Assim, dado $y \in V$, temos:

$$\begin{aligned} g(y) &= \max\{f_1(y), f_2(y)\} \\ &< \max\{f_1(x)+\varepsilon, f_2(x)+\varepsilon\} \\ &\leq f_2(x)+\varepsilon \\ &= g(x)+\varepsilon \end{aligned}$$

Analogamente, provamos que $g(y) > g(x) - \varepsilon$ e, portanto, g é contínua no ponto x.

5.1.17

a Sejam $(x, y), (a, b) \in X \times Y$. Note que $X \times \{y\}$ e $\{a\} \times Y$ são conexos, pois são homeomorfos a X e Y, respectivamente (ver Alongamento **5.1.14**). Logo $A = (X \times \{y\}) \cup (\{a\} \times Y)$ é conexo, pois $(a, y) \in (X \times \{y\}) \cap (\{a\} \times Y)$ (pela Proposição 5.1.12). Assim, A é um conexo de $X \times Y$ tal que $(x, y), (a, b) \in A$. Logo, pela Proposição **5.1.12**, temos que $X \times Y$ é conexo.

Referências Bibliográficas

[1] M. E. Rudin. A new proof that metric spaces are paracompact. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20:603, 1969.

[2] S. Willard. *General topology*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004.

Notação

Índice Remissivo