Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

19 de março de 2015

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Espaços topológicos

1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade. Uma maneira de dar uma noção de proximidade é de modo quantitativo, como no caso de espaços métricos:

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico**, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

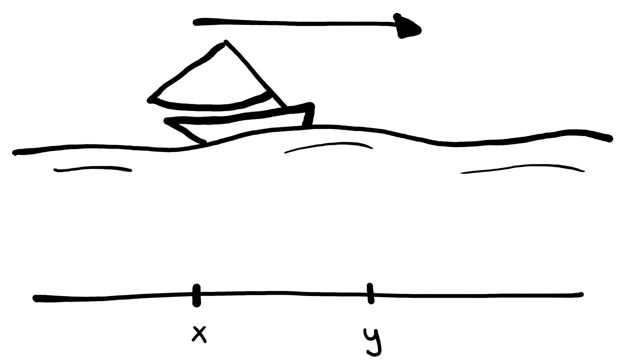
Desta maneira, temos que uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro - simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2. Uma métrica sobre o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

Para espaços de funções em geral não é possível definir métricas.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correntenza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correntenza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.



Veja também o Exercício 1.1.53.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo. Para isso, vamos precisar de um conceito diferente:

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é um **filtro** sobre X se:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

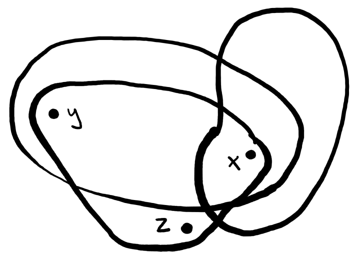
(c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Agora, em vez de usarmos uma função distância, "atribuimos" a cada ponto um filtro:

Definição 1.1.4. Seja X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é um **sistema de vizinhanças** para x se $\mathcal{V}$ é um filtro sobre X e cada elemento $V \in \mathcal{V}$ é tal que $x \in V$. Chamamos cada $V \in \mathcal{V}$ de **vizinhança** de x.

A intuição por trás desta definição é que cada elemento de $\mathcal{V}$ representa uma coleção de pontos "próximos" de x. Você pode pensar que um ponto y fixado está mais próximo de x quanto maior for o conjunto

$$\{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$$



Desta maneira, na situação representada pela figura, o ponto y está mais próximo de x que o ponto z está.

O próximo exemplo dá uma maneira de traduzirmos para a ideia de vizinhanças o conceito de proximidade dado pela métrica usual em $\mathbb{R}$.

Sim, parece estranho agora que isso seja realmente uma tradução. Mas veremos isso mais formalmente no Alongamento 1.1.42.

Exemplo 1.1.5. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existem $a < x < b$ tais que $]a, b[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças para x.

Ao mudarmos ele ligeiramente, obtemos a ideia do exemplo do rio:

Exemplo 1.1.6. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V :$ existe $a > x$ tal que $[x, a[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças de x. Ao conjunto dos reais munido com tal conceito de vizinhanças damos o nome de **reta de Sorgenfrey**.

Para tentarmos ver que algo da nossa intuição está sendo capturado neste exemplo, vamos analisar um caso específico. Considere as vizinhanças de 0 como definidas acima. Note que números positivos estão muito mais próximos de 0 do que os números negativos. Note também que isso não ocorre no caso mais simétrico do exemplo anterior.

Com todo esse material, podemos finalmente definir um espaço topológico. Intuitivamente, um espaço topológico nada mais é que um conjunto tal que todos os pontos possuem uma medida qualitativa de proximidade:

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto. Fixe, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ um sistema de vizinhanças para x. Chamamos de **espaço topológico** o conjunto X com tal família fixada de sistemas de vizinhanças.

Veja a definição "definitiva" em 1.1.12.

Esta não é a definição mais comum, nem mesmo a que vamos mais trabalhar. A versão mais comum e que é mais "curta" de se definir, veremos adiante. Não a apresentamos diretamente por entendermos que ela esconde muito da intuição do que é um espaço topológico.

Um tipo bastante importante de vizinhança são os abertos, que nada mais são do que conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos:

Definição 1.1.8. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $A \subset X$ é um **aberto** se para todo $a \in A$, temos que A é vizinhança de a.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.9. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia usual (como no Exemplo 1.1.5) e $a < b$, temos que um intervalo $]a, b[$ é aberto. De fato, dado qualquer $x \in]a, b[$, o próprio conjunto $]a, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. Por outro lado, o conjunto $[a, b[$ não é aberto pois $[a, b[$ não é vizinhança de a.

Exemplo 1.1.10. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia da reta de Sorgenfrey (como no Exemplo 1.1.6 e $a < b$, temos que $]a, b[$ é aberto, pois, para cada $x \in]a, b[$, temos que $[x, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. De maneira análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ também é aberto.

Os abertos tem algumas propriedades a se destacar:

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço topológico. Temos:*

(a) $\emptyset$ e X são abertos;

(b) se A e B são abertos, então $A \cap B$ também é;

(c) se $\mathcal{A}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ é um aberto.

Demonstração. Veja o Alongamento 1.1.40. □

Essas propriedades da última proposição na verdade motivam a definição usual de espaço topológico:

$\wp(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X.

Definição 1.1.12. Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ é uma família que satisfaz:

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(c) se $\mathcal{A} \subset \tau$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de **aberto** e a própria família τ é chamada de **topologia**.

Exemplo 1.1.13. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia caótica**).

Exemplo 1.1.14. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \wp(X)$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia discreta**).

Proposição 1.1.15. *Seja X um conjunto qualquer e σ uma topologia sobre X. Então, σ é a topologia discreta se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.*

Demonstração. Se σ é a topologia discreta, segue da definição que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.

Reciprocamente, dado um conjunto qualquer $A \subset X$, ele pode ser escrito da forma $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Logo, pela definição de topologia, $A \in \sigma$ e, portanto, σ é a topologia discreta. $\square$

Exemplo 1.1.16. O conjunto $\mathbb{R}$ é um espaço topológico, com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in A\}$. Esta é chamada de **topologia usual em** $\mathbb{R}$.

Veja o Alongamento 1.1.42 para notar que diversas maneiras definir a topologia nos reais chegam ao mesmo lugar.

Exemplo 1.1.17. Seja X um conjunto qualquer. Considere $\tau = \{A \subset X : X \smallsetminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X (chamada **topologia cofinita** - veja também o Exercício 1.1.51).

De fato, $X, \emptyset \in \tau$. Seja $\mathcal{A}$ uma família de elementos de τ. Temos que

$$X \smallsetminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \smallsetminus A)$$

Note que o lado direito da equação é finito pois é interseção de conjuntos finitos. Logo, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Note que

$$X \smallsetminus (A_1 \cap A_2) = (X \smallsetminus A_1) \cup (X \smallsetminus A_2)$$

Novamente o lado direito é finito, pois é união finita de conjuntos finitos. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e τ é uma topologia sobre X.

Também podemos definir um espaço "menor" que um já fixado:

Definição 1.1.18. Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $Y \subset X$. A **topologia de subespaço** sobre Y induzida por (X, τ) é dada por $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

Veja Alongamento 1.1.44.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos $Y \subset X$, onde (X, τ) é um espaço topológico, Y será considerado com a topologia de subespaço.

Com uma métrica, é fácil definir uma topologia:

Proposição 1.1.19. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, é uma topologia sobre X, chamada* **topologia induzida pela métrica** *d.*

Demonstração. Note que $X \in \tau$ trivialmente e que $\emptyset \in \tau$ por vacuidade. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente, seja $\mathcal{A} \subset \tau$. Novamente, podemos supor que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ pois caso contrário nada há a provar. Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e, portanto, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. $\square$

Podemos obter a ideia de vizinhança mesmo se começamos com o conceito de aberto:

Definição 1.1.20. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que V é uma **vizinhança** de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

Um importante conceito é o de conjunto fechado:

Definição 1.1.21. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um **conjunto fechado** se $X \smallsetminus F$ é aberto.

Exemplo 1.1.22. Em qualquer espaço topológico (X, τ), X e $\emptyset$ são fechados, pois seus complementares são abertos (em particular, X e $\emptyset$ são abertos e fechados).

Exemplo 1.1.23. Em $\mathbb{R}$, $[0, 1]$ é fechado já que $\mathbb{R} \smallsetminus [0, 1] =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exemplo 1.1.24. Na topologia discreta, qualquer conjunto é fechado. Para isso, basta notar que o complementar de qualquer conjunto é ainda um membro de $\wp(X)$ e, portanto, é aberto.

Exemplo 1.1.25. Na reta de Sorgenfrey, $[a, b[$ é fechado, onde $a < b$. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$ é aberto. Se $x \in \mathbb{R} \smallsetminus [a, b[$, então há dois casos a considerar:

- $x \geq b$: basta tomar o aberto $[x, x + 1[$, cuja interseção com $[a, b[$ é vazia;

- $x < a$: podemos considerar o aberto $[x, a[$, que também está contido no complementar de $[a, b[$.

Portanto, o complementar de $[a, b[$ é aberto, como queríamos.

Algo muito comum de se fazer é tomar o menor fechado contendo um determinado conjunto:

Definição 1.1.26. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Definimos $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X : F$ é fechado e $A \subset F\}$ (**fecho** de A, também denotado por $\mathrm{Cl}(A)$).

Definimos $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{V \subset X : V$ é aberto e $V \subset A\}$ (**interior** de A, também denotado por $\mathrm{Int}(A)$).

Proposição 1.1.27. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A}$ é fechado e $\overset{\circ}{A}$ é aberto.*

Demonstração. Decorre diretamente da definição e das propriedades de conjuntos abertos e fechados. □

Pensando que os abertos que contém um ponto são as possíveis noções de "perto do ponto", podemos definir a noção de um ponto estar perto de um conjunto se toda vez que olhamos para "perto do ponto", interceptamos o conjunto:

Definição 1.1.28. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto aderente** a A se para todo aberto V tal que $x \in V$ valer $V \cap A \neq \emptyset$.

Note que esta definição difere da definição que daremos para ponto de acumulação.

Vamos mostrar que o fecho de um conjunto basicamente é a coleção de todos os pontos próximos do conjunto:

Proposição 1.1.29. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = \{x \in X : x$ é ponto aderente de $A\}$.*

Demonstração. Chame de D o conjunto dos pontos aderentes a A. Vamos provar que $\overline{A} \subset D$. Seja $x \in \overline{A}$. Seja V aberto tal que $x \in V$ e suponha $V \cap A = \emptyset$. Logo, $A \subset X \smallsetminus V$ que é fechado. Assim, pela definição de $\overline{A}$, segue que $\overline{A} \subset X \smallsetminus V$, contradição com o fato que $x \in \overline{A}$ e $x \in V$.

Provemos que $D \subset \overline{A}$. Seja $x \in D$ e suponha $x \notin \overline{A}$. Logo, $x \in X \smallsetminus \overline{A}$ que é aberto. Como $x \in D$, temos que $(X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. Contradição, pois $A \subset \overline{A}$. □

Proposição 1.1.30. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $A, B \subset X$. Temos*

Vale um resultado análogo para o interior de um conjunto A. Em particular, A é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{A} = A$ (ver Alongamento 1.1.48).

(a) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(c) $\overline{A} = A$ se, e somente se, A é fechado.

Demonstração. Dado $x \in \overline{A}$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U que contém x. Como $A \subset B$, segue em particular que $U \cap B \neq \emptyset$. Isto prova (a).

Provemos (c). Naturalmente se $\overline{A} = A$, obtemos que A é fechado, pois seu fecho é fechado. Reciprocamente, se A é fechado, segue que $A = \bigcap\{F \subset X : F$ é fechado e $A \subset F\} = \overline{A}$. O item (b) segue então diretamente de (b), por $\overline{A}$ ser fechado. □

Exemplo 1.1.31. Considere um conjunto X com a topologia discreta. Como todo subconjunto A de X é fechado, segue que $\overline{A} = A$ (e também que $\mathring{A} = A$).

Exemplo 1.1.32. Em $\mathbb{R}$, $\overline{[a,b[} = [a,b]$. De fato, b é o único ponto fora de $[a,b[$ que é aderente a $[a,b[$.

Exemplo 1.1.33. Na reta de Sorgenfrey, $\overline{[a,b[} = [a,b[$. Para isso, basta lembrar que $[a,b[$ é fechado.

Exemplo 1.1.34. Em $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Ambas as igualdades se devem ao fato de que dado qualquer ponto $q \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contém pontos de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. O mesmo vale na reta de Sorgenfrey.

Algumas vezes, um ponto pode estar próximo tanto de um conjunto, como de seu complementar:

Definição 1.1.35. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto de fronteira** de A se para todo $V \subset X$ aberto tal que $x \in V$, temos $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \smallsetminus A) \neq \emptyset$.

Notação 1.1.36. $\partial A = \{x \in X : x$ é ponto de fronteira de $A\}$.

Exemplo 1.1.37. Em $\mathbb{R}$, $\partial[a,b[= \{a,b\}$. Enquanto que na reta de Sorgenfrey temos que $\partial[a,b[= \emptyset$.

Observação 1.1.38. A igualdade acima vale de modo geral. Se A é um subconjunto aberto e fechado de um espaço topológico (X, τ), então $\partial A = \emptyset$.

Exemplo 1.1.39. Em $\mathbb{R}$ (ou na reta de Sorgenfrey), $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.40. Mostre a Proposição 1.1.11.

Alongamento 1.1.41. Mostre que se começamos com abertos, definimos vizinhanças e depois abertos novamente (usando essas vizinhanças), chegamos à mesma topologia. Mostre também o caminho inverso.

Alongamento 1.1.42. Vejamos que os abertos em $\mathbb{R}$ podem ser obtidos de várias maneiras. Mostre que os abertos são os mesmos se fizermos:

(a) como no Exemplo 1.1.16;

(b) usamos as vizinhanças como em 1.1.5

(c) usamos a métrica de 1.1.2 e depois a Proposição 1.1.19.

Alongamento 1.1.43. Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Alongamento 1.1.44. Mostre que, de fato, a topologia de subespaço é uma topologia.

Alongamento 1.1.45. Considere $[0,1]$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$. Mostre que $[0, \frac{1}{2}[$ é aberto em $[0,1]$ mas não é aberto em $\mathbb{R}$.

Alongamento 1.1.46. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que são verdadeiras:

(a) $X, \emptyset$ são fechados;

(b) Se $F, G \subset X$ são fechados, então $F \cup G$ é fechado;

(c) Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de fechados, então $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ é um fechado.

Alongamento 1.1.47. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto interior** de A se existe V aberto tal que $x \in V \subset A$. Mostre que $\mathring{A} = \{x \in X : x \text{ é ponto interior de } A\}$.

Alongamento 1.1.48. Mostre o análogo à Proposição 1.1.30 para o interior.

Alongamento 1.1.49. Sejam (X, τ) espaço topológico e $A \subset X$. Mostre as seguintes afirmações:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \smallsetminus A}$

(b) $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$

(c) $\partial A = \overline{A} \smallsetminus \overset{\circ}{A}$

(d) $\overline{A} = A \cup \partial A$

Alongamento 1.1.50. Mostre que a fronteira de um conjunto sempre é fechada.

Exercícios

Exercício 1.1.51. Na definição da topologia cofinita (Exemplo 1.1.17), poderíamos pedir, em vez que os abertos tivessem complementar finito, que os abertos simplesmente fossem infinitos?

Exercício 1.1.52. Dizemos que duas métricas sobre um mesmo espaço X são **métricas equivalentes** se elas induzem a mesma topologia. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico qualquer, então existe uma outra métrica d' sobre X equivalente a d e que é limitada (isto é, existe $L > 0$ tal que $d'(x, y) \leq L$ para todo $x, y \in X$).

Exercício 1.1.53. Seja X um conjunto. Chamamos de **assimétrica** (na maioria dos livros, **quasi-métrica**), uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(a) Mostre que $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ é uma topologia sobre X (como fizemos com uma métrica);

(b) Considere seguinte função sobre $\mathbb{R}$:

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que d é uma assimétrica sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a topologia induzida por ela é a mesma da reta de Sorgenfrey.

Exercício 1.1.54. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Note que a restrição de d a Y induz uma métrica sobre Y. Mostre que a topologia induzida por tal métrica e a topologia induzida de subespaço de X coincidem.

Exercício 1.1.55. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F = F' \cap Y$.

Exercício 1.1.56. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ subespaço fechado. Mostre que $F \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, F é fechado em X.

Exercício 1.1.57. Encontre o análogo do Exercício 1.1.56 para abertos.

Exercício 1.1.58. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $A \subset X$ não vazio e $x \in X$, definimos $d(x, A)$ (**distância de ponto a conjunto**) como $d(x, A) = \inf(d(x, a) : a \in A\}$. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Exercício 1.1.59. Sejam (X, τ) um espaço topológico, $A \subset X$, $x \in X$ e $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que $x \in \overline{A}$ se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$.

Exercício 1.1.60. Considere $\tau = \{A \subset \mathbb{Z} :$ para todo $a \in A$, existe $b \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\{a + bz : z \in \mathbb{Z}\} \subset A\}$.

(a) Mostre que τ é uma topologia sobre $\mathbb{Z}$.

(b) Mostre que não existe um aberto não vazio que seja finito.

(c) Mostre que, dados $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}_{>0}$, o conjunto $S(a, b) = \{a+bz : z \in \mathbb{Z}\}$ é aberto e fechado.

(d) Mostre que $\mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ é primo}} S(0, p)$.

(e) Mostre que existem infinitos primos.

1.2 Bases

Uma base nada mais é que uma subfamília de abertos que é suficiente para recuperarmos todos os abertos por meio de uniões:

Definição 1.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma **base** para (X, τ) se para todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

Uma importante caracterização para bases é o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2. *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de τ é uma base para (X, τ) se, e somente se, para todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{B}$ seja uma família como no enunciado e seja $A \in \tau$. Para cada elemento $x \in A$, existe um conjunto $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$. Segue, então, que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Reciprocamente, sejam $x \in X$ e $A \in \tau$. Como podemos escrever $A = \bigcup \mathcal{B}'$ com $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, tomamos $B \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B$. Além disso, temos que $B \subset A$. $\square$

Exemplo 1.2.3. $\mathcal{B} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \tau$. Pela definição de τ, existe $\varepsilon > 0$ tal que tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$. Note que existem $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$$

Logo, $B =]a, b[\in \mathcal{B}$ e $x \in B \subset A$.

Exemplo 1.2.4. Seja (X, d) um espaço métrico qualquer. Então, $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é uma base para (X, d) (ver Alongamento 1.2.12).

Exemplo 1.2.5. Seja X um conjunto qualquer. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base para a topologia discreta sobre X (ver Alongamento 1.2.12).

Exemplo 1.2.6. A família $\mathcal{B} = \{[x, y[: x < y\}$ é uma base para a reta de Sorgenfrey (ver Alongamento 1.2.12).

Em algum sentido, uma base é um conjunto suficiente para determinar todos os abertos. Podemos fazer o análogo para vizinhanças:

Veja o Exercício 1.2.17

Definição 1.2.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um **sistema fundamental de vizinhanças** de x se

(a) Para todo $V \in \mathcal{V}$, V é vizinhança de x;

(b) Para todo aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset A$.

No caso em que os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos, chamamos $\mathcal{V}$ de **base local** para x.

Exemplo 1.2.8. Em $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}_1 = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x (mais que isso, como todos os membros de $\mathcal{V}_1$ são abertos, $\mathcal{V}_1$ é uma base local de x).

$\mathcal{V}_2 = \{[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.2.9. Na reta de Sorgenfrey, $\mathcal{V} = \{[x, x + \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exemplo 1.2.10. Considere X com a topologia discreta. $\mathcal{V}_1 = \{\{x\}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x, bem como $\mathcal{V}_2 = \{A \subset X : x \in A\}$.

O próximo resultado mostra como bases do espaço original se relacionam com as de um subespaço:

Proposição 1.2.11. *Se $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ), então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $Y \subset X$ com a topologia de subespaço.*

Podemos fazer o análogo com sistemas fundamentais de vizinhanças.

Demonstração. Sejam $A' \in \tau_Y$ e $x \in A'$. Pela definição de topologia de subespaço, existe $A \in \tau$ tal que $A' = A \cap Y$ e, assim, $x \in A$. Logo, pelo fato de $\mathcal{B}$ ser base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. Logo, $x \in B \cap Y \subset A \cap Y$ e, portanto, $\mathcal{B}'$ é uma base para (Y, τ_Y). $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.2.12. Mostre as afirmações dos Exemplos 1.2.4, 1.2.5 e 1.2.6.

Alongamento 1.2.13. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$. Mostre que $\{A \in \tau : x \in A \subset V\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para x.

Alongamento 1.2.14. Sejam (X, τ) espaço topológico, $x \in X$, $\mathcal{V}$ sistema fundamental de vizinhanças de x e $W \subset X$ vizinhança de x. Mostre que $\{V \cap W : V \in \mathcal{V}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Exercícios

Exercício 1.2.15. Seja X um conjunto e sejam τ e σ topologias sobre X. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases para (X, τ) e (X, σ) respectivamente.

(a) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B$ e $x \in C$ existam $C' \in \mathcal{C}$ e $B' \in \mathcal{B}$ tais que $x \in C' \subset B$ e $x \in B' \subset C$. Mostre que $\tau = \sigma$.

(b) Suponha que para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ exista $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset B$. É verdade que $\sigma = \tau$? Se não for verdade, vale alguma das inclusões?

Exercício 1.2.16. Seja (X, τ) espaço topológico. Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhanças para x. Mostre que, dado $A \subset X$, A é aberto se, e somente se, para todo $x \in X$ existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $x \in V \subset A$.

Exercício 1.2.17. Dizemos que (X, τ) é um **espaço zero-dimensional** se ele possui uma base formada por abertos fechados.

(a) Mostre que a reta de Sorgenfrey é zero-dimensional.

(b) Mostre que tanto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ quanto $\mathbb{Q}$ são zero-dimensionais (considerados com a topologia de subsespaço).

(c) Mostre que se Y é subsepaço de um espaço zero-dimensional, então Y também é zero-dimensional.

Exercício 1.2.18. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}$ base para (X, τ). Mostre que τ é a menor topologia que contém $\mathcal{B}$. Isto é, mostre que $\tau = \bigcap_{\sigma \in T} \sigma$ onde $T = \{\sigma : \sigma \text{ é uma topologia para } X \text{ tal que } \mathcal{B} \subset \sigma\}$.

Exercício 1.2.19. Dado um conjunto X e uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X, chamamos de **topologia gerada** por X o conjunto $[\mathcal{B}] = \bigcap_{\tau \in T} \tau$, onde $T = \{\tau \subset \wp(X) : \tau \text{ é topologia sobre } X \text{ e } \mathcal{B} \subset \tau\}$.

(a) Mostre que T definido acima é não vazio (e, portanto, podemos tomar a intersecção).

(b) Mostre que $[\mathcal{B}]$ é uma topologia sobre X.

(c) Mostre que, se $\mathcal{B}$ satisfaz:

  (i) $\forall x \in X$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;

  (ii) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in A \cap B$, $\exists C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subset A \cap B$.

  então $\mathcal{B}$ é uma base para $(X, [\mathcal{B}])$.

Dicas de alguns exercícios

1.1.49

d Para o lado $\overline{A} \subset A \cup \partial A$, considere $x \in \overline{A}$. Note que se $x \in A$, é trivial. No caso que $x \notin A$, mostre que $x \in \partial A$.

1.1.60

e Suponha que não e use os itens anteriores.

1.2.15

a Comece com $A \in \tau$ e $x \in A$. Use o fato que $\mathcal{B}$ é base. Depois use a propriedade do enunciado. Mostre que $A \in \sigma$.

Soluções de alguns exercícios

1.1.46

b Vamos mostrar que $X \smallsetminus (F \cup G)$ é aberto. Se mostrarmos que $X \smallsetminus (F \cup G) = (X \smallsetminus F) \cap (X \smallsetminus G)$, seguirá que o complementar de $F \cup G$ é aberto por ser a interseção (finita) de abertos, o que acarretará que $F \cup G$ é fechado. De fato, se $x \in X \smallsetminus (F \cup G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, e daí decorre que $x \in (X \smallsetminus F) \cap (X \smallsetminus G)$. Reciprocamente, se $x \in (X \smallsetminus F) \cap (X \smallsetminus G)$, segue que $x \in X$ e $x \notin F$ e $x \notin G$, ou equivalentemente, $x \in X$ e $x \notin F \cup G$, acarretando a igualdade desejada.

c Note que se $\mathcal{A}$ é uma família não vazia de conjuntos, então

$$X \smallsetminus \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} X \smallsetminus A$$

Da igualdade acima, e do fato de que cada membro de $\mathcal{F}$ possui o complementar aberto, o temos (c).

1.1.47 Por definição, $\mathring{A}$ é a reunião dos abertos contidos em A. Daí, se $x \in V$ para algum V aberto contido em A, temos $x \in \mathring{A}$. A recíproca é imediata.

1.1.55 Seja $F \subset Y$ fechado em Y. Então $Y \smallsetminus F$ é aberto em Y. Logo, existe $A \subset X$ um aberto em X tal que $A \cap Y = Y \smallsetminus F$. Vamos mostrar que $F' = X \smallsetminus A$ satisfaz o que desejamos. Primeiramente, note que F' é fechado em X (pois é complementar de um aberto). Agora só precisamos mostrar que, de fato,

$$F = F' \cap Y$$

Seja $y \in F$. Então $y \notin Y \smallsetminus F$ e, portanto, $y \notin A$. Assim, $y \in X \smallsetminus A$ e, portanto, $y \in Y \cap (X \smallsetminus A) = F'$. A outra inclusão segue de maneira análoga (e é um bom alongamento para o leitor).

Agora precisamos mostrar que, dado F' fechado em X, $F' \cap Y$ é fechado em Y. Isso decorre imediatamente do fato que $Y \smallsetminus (Y \cap F') = Y \cap (X \smallsetminus F')$. Logo, $Y \smallsetminus (Y \cap F')$ é aberto em Y e, portanto, $Y \cap F'$ é fechado em Y.

1.1.56 Suponha $F \subset Y$ fechado em Y. Então existe $F' \subset X$ fechado em X tal que $F' \cap Y = F$. Logo, F é fechado em X (por ser interseção de fechados). Agora suponha $F \subset Y$ fechado em X. Note que $F = F \cap Y$ e, portanto, F é fechado em Y.

1.1.57 Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço aberto. Então $A \subset Y$ é aberto em Y se, e somente se, for aberto em X.

A demonstração é análoga a da Proposição **1.1.56**.

1.1.59 Suponha $x \in \overline{A}$. Seja $V \in \mathcal{V}$, então existe $U \subset V$ aberto tal que $x \in U$. Como $x \in \overline{A}$, obtemos $U \cap A \neq \emptyset$ e, portanto, $V \cap A \neq \emptyset$.

Suponha que para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap A \neq \emptyset$. Seja $U \subset X$ aberto tal que $x \in U$. Como $\mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subset U$. Logo, como $V \cap A \neq \emptyset$, segue que $U \cap A \neq \emptyset$.

Notação

Índice Remissivo