Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

17 de março de 2015

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Espaços topológicos

1.1 Definições básicas

Um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade. Uma maneira de dar uma noção de proximidade é de modo quantitativo, como no caso de espaços métricos:

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico**, se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

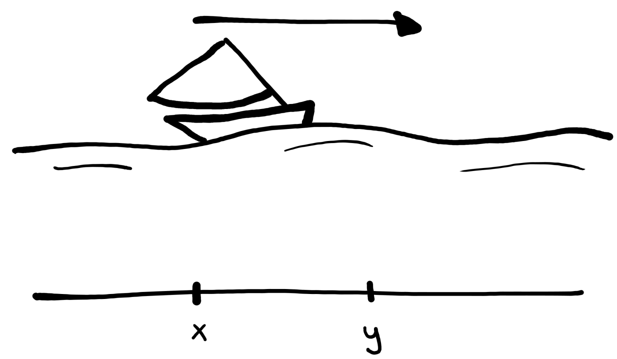
Desta maneira, temos que uma maneira de medir o quanto um ponto está próximo do outro - simplesmente vemos o valor de d neste dois pontos. Um ponto está mais próximo de outro o quanto menor for o valor de d calculado nestes dois pontos.

Exemplo 1.1.2. Uma métrica sobre o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ é a função $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

Para muitos casos, essa noção de proximidade é suficiente. Mas ela não cobre uma gama grande (e importante) de noções em matemática.

Para espaços de funções em geral não é possível definir métricas.

O seguinte exemplo é um caso simples onde o conceito não é aplicável: considere um rio com uma correntenza razoavelmente forte. Para simplificar, pensemos que esta correnteza anda para a direita e seja tão forte que não seja possível andar rio acima (ou seja, andar para esquerda). Podemos representar este rio usando a reta real, mas precisamos de uma noção de proximidade diferente da usual: ao tomarmos dois pontos x, y com $x < y$ queremos que y esteja perto de x mas não que x esteja perto de y (pois a correntenza não permite sair de y e chegar em x). Note que isso não é possível ao usar uma métrica, uma vez que teríamos $d(x, y) = d(y, x)$.



Veja também o Exercício 1.1.26.

Uma maneira de contornar isso é simplesmente abandonar o conceito quantitativo de proximidade dado pela métrica e usarmos um conceito qualitativo. Para isso, vamos precisar de um conceito diferente:

Definição 1.1.3. Seja X um conjunto. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é um **filtro** sobre X se:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(b) se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;

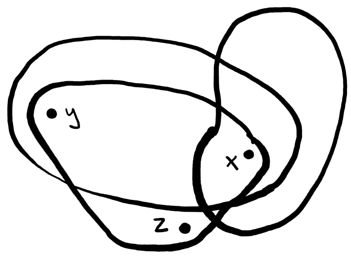
(c) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Agora, em vez de usarmos uma função distância, "atribuimos" a cada ponto um filtro:

Definição 1.1.4. Seja X um conjunto e $x \in X$. Dizemos que uma coleção $\mathcal{V}$ de subconjuntos de X é um **sistema de vizinhanças** para x se $\mathcal{V}$ é um filtro sobre X e cada elemento $V \in \mathcal{V}$ é tal que $x \in V$.

A intuição por trás desta definição é que cada elemento de $\mathcal{V}$ representa uma coleção de pontos "próximos" de x. Você pode pensar que um ponto y fixado está mais próximo de x quanto maior for o conjunto

$$\{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$$



Desta maneira, na situação representada pela figura, o ponto y está mais próximo de x que o ponto z está.

O próximo exemplo dá uma maneira de traduzirmos para a ideia de vizinhanças o conceito de proximidade dado pela métrica usual em $\mathbb{R}$.

Sim, parece estranho agora que isso seja realmente uma tradução. Mas veremos isso mais formalmente no Alongamento 1.1.22.

Exemplo 1.1.5. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V : \text{existem } a < x < b \text{ tais que }]a, b[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças para x.

Ao mudarmos ele ligeiramente, obtemos a ideia do exemplo do rio:

Exemplo 1.1.6. Fixado $x \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{V} = \{V : \text{existe } a > x \text{ tal que } [x, a[\subset V\}$ é um sistema de vizinhanças de x. Ao conjunto dos reais munido com tal conceito de vizinhanças damos o nome de **reta de Sorgenfrey**.

Para tentarmos ver que algo da nossa intuição está sendo capturado neste exemplo, vamos analisar um caso específico. Considere as vizinhanças de 0 como definidas acima. Note que números positivos estão muito mais próximos de 0 do que os números negativos. Note também que isso não ocorre no caso mais simétrico do exemplo anterior.

Com todo esse material, podemos finalmente definir um espaço topológico. Intuitivamente, um espaço topológico nada mais é que um conjunto tal que todos os pontos possuem uma medida qualitativa de proximidade:

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto. Fixe, para cada $x \in X$, $\mathcal{V}_x$ um sistema de vizinhanças para x. Chamamos de **espaço topológico** o conjunto X com tal família fixada de sistemas de vizinhanças.

Veja a definição "definitiva" em 1.1.12.

Esta não é a definição mais comum, nem mesmo a que vamos mais trabalhar. A versão mais comum e que é mais "curta" de se definir, veremos adiante. Não a apresentamos diretamente por entendermos que ela esconde muito da intuição do que é um espaço topológico.

Um tipo bastante importante de vizinhança são os abertos, que nada mais são do que conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos:

Definição 1.1.8. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $A \subset X$ é um **aberto** se para todo $a \in A$, temos que A é vizinhança de a.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.9. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia usual (como no Exemplo 1.1.5) e $a < b$, temos que um intervalo $]a, b[$ é aberto. De fato, dado qualquer $x \in]a, b[$, o próprio conjunto $]a, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. Por outro lado, o conjunto $[a, b[$ não é aberto pois $[a, b[$ não é vizinhança de a.

Exemplo 1.1.10. Se considerarmos $\mathbb{R}$ com a topologia da reta de Sorgenfrey (como no Exemplo 1.1.6 e $a < b$, temos que $]a, b[$ é aberto, pois, para cada $x \in]a, b[$, temos que $[x, b[$ atesta que $]a, b[$ é uma vizinhança de x. De maneira análoga, podemos mostrar que $[a, b[$ também é aberto.

Os abertos tem algumas propriedades a se destacar:

Proposição 1.1.11. *Seja X um espaço topológico. Temos:*

(a) $\emptyset$ e X são abertos;

(b) se A e B são abertos, então $A \cap B$ também é;

(c) se $\mathcal{A}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ é um aberto.

Demonstração. Veja o Alongamento 1.1.20. □

Essas propriedades da última proposição na verdade motivam a definição usual de espaço topológico:

$\wp(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X.

Definição 1.1.12. Dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico** se X é um conjunto e $\tau \subset \wp(X)$ é uma família que satisfaz:

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) se $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$;

(c) se $\mathcal{A} \subset \tau$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de **aberto** e a própria família τ é chamada de **topologia**.

Exemplo 1.1.13. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia caótica**).

Exemplo 1.1.14. Seja X um conjunto qualquer. Então $\tau = \wp(X)$ é uma topologia sobre X (chamada **topologia discreta**).

Proposição 1.1.15. *Seja X um conjunto qualquer e σ uma topologia sobre X. Então, σ é a topologia discreta se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.*

Demonstração. Se σ é a topologia discreta, segue da definição que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \sigma$.

Reciprocamente, dado um conjunto qualquer $A \subset X$, ele pode ser escrito da forma $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Logo, pela definição de topologia, $A \in \sigma$ e, portanto, σ é a topologia discreta. □

Exemplo 1.1.16. O conjunto $\mathbb{R}$ é um espaço topológico, com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\in A\}$. Esta é chamada de **topologia usual em** $\mathbb{R}$.

Veja o Alongamento 1.1.22 para notar que diversas maneiras definir a topologia nos reais chegam ao mesmo lugar.

Exemplo 1.1.17. Seja X um conjunto qualquer. Considere $\tau = \{A \subset X : X \smallsetminus A \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Temos que τ é uma topologia sobre X (chamada **topologia cofinita** - veja também o Exercício 1.1.24).

De fato, $X, \emptyset \in \tau$. Seja $\mathcal{A}$ uma família de elementos de τ. Temos que

$$X \smallsetminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \smallsetminus A)$$

Note que o lado direito da equação é finito pois é interseção de conjuntos finitos. Logo, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Note que

$$X \smallsetminus (A_1 \cap A_2) = (X \smallsetminus A_1) \cup (X \smallsetminus A_2)$$

Novamente o lado direito é finito, pois é união finita de conjuntos finitos. Portanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau$ e τ é uma topologia sobre X.

Com uma métrica, é fácil definir uma topologia:

Proposição 1.1.18. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então, $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, é uma topologia sobre X, chamada* **topologia induzida pela métrica** *d.*

Demonstração. Note que $X \in \tau$ trivialmente e que $\emptyset \in \tau$ por vacuidade. Agora, sejam $A_1, A_2 \in \tau$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, seja $x \in A_1 \cap A_2$. Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$ e $B_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente, seja $\mathcal{A} \subset \tau$. Novamente, podemos supor que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ pois caso contrário nada há a provar. Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Note que $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e, portanto, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$. □

Finalmente, podemos obter a ideia de vizinhança mesmo se começamos com o conceito de aberto:

Definição 1.1.19. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que V é uma **vizinhança** de x se existe A aberto tal que $x \in A \subset V$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.20. Mostre a Proposicao 1.1.11.

Alongamento 1.1.21. Mostre que se começamos com abertos, definimos vizinhanças e depois abertos novamente (usando essas vizinhanças), chegamos à mesma topologia. Mostre também o caminho inverso.

Alongamento 1.1.22. Vejamos que os abertos em $\mathbb{R}$ podem ser obtidos de várias maneiras. Mostre que os abertos são os mesmos se fizermos:

(a) como no Exemplo 1.1.16;

(b) usamos as vizinhanças como em 1.1.5

(c) usamos a métrica de 1.1.2 e depois a Proposição 1.1.18.

Alongamento 1.1.23. Mostre que todo aberto usual nos reais é um aberto na reta de Sorgenfrey.

Exercícios

Exercício 1.1.24. Na definição da topologia cofinita (Exemplo 1.1.17), poderíamos pedir, em vez que os abertos tivessem complementar finito, que os abertos simplesmente fosse infinitos?

Exercício 1.1.25. Dizemos que duas métricas sobre um mesmo espaço X são **métricas equivalentes** se elas induzem a mesma topologia. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico qualquer, então existe uma outra métrica d' sobre X equivalente a d e que é limitada (isto é, existe $L > 0$ tal que $d'(x, y) \leq L$ para todo $x, y \in X$).

Exercício 1.1.26. Seja X um conjunto. Chamamos de **assimétrica** (na maioria dos livros, **quasi-métrica**), uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(a) Mostre que $\tau = \{A \subset X : \forall x \in A, \exists r > 0, B_r(x) \subset A\}$, onde $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ é uma topologia sobre X (como fizemos com uma métrica);

(b) Considere seguinte função sobre $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{se } y \geq x \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que d é uma assimétrica sobre $\mathbb{R}$. Mostre que a topologia induzida. Mostre que a topologia induzida por ela é a mesma da reta de Sorgenfrey.

Dicas de alguns exercícios

Soluções de alguns exercícios

Notação

Índice Remissivo