Prova 2 - Aplicações de teoria dos conjuntos - 2016

Nome: **NUSP:**
Pseudônimo:
Justifique suas respostas

1 O jogo de Choquet é jogado da seguinte forma. Dado um espaço topológico X, o jogador I escolhe A_0 aberto não vazio e o jogador II escolhe B_0 aberto não vazio tal que $B_0 \subset A_0$. Na rodada $n+1$, o jogador I escolhe $A_{n+1} \subset B_n$ aberto não vazio e o jogador II escolhe $B_{n+1} \subset A_{n+1}$ aberto não vazio. O jogador I vence se $\bigcap_{n\in\omega} B_n = \emptyset$.

(a) Mostre que, nas condições do jogo, $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} B_n$ (não importa que venceu).

(b) Mostre que se X não é de Baire, então o jogador I tem estratégia vencedora no jogo.

2 Considere $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ a coleção de todos os intervalos abertos de extremos racionais. Dado I intervalo de extremos reais, denotamos por $diam(I) = |a-b|$ onde a e b são os extremos. Fixado $\varepsilon > 0$, seja $(x_n)_{n\in\omega}$ sequência de reais positivos tais que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \varepsilon$. Considere

$$\mathbb{P}_\varepsilon = \{f \in Fn(\omega, \omega) : diam(I_{f(n)}) < x_n\}$$

com a ordem usual de $Fn(\omega, \omega)$ (extensão de função).

(a) Note que $\mathbb{P}_\varepsilon$ é ccc (sim, é fácil)

(b) Seja $r \in \mathbb{R}$. Mostre que $D_r = \{f \in \mathbb{P}_\varepsilon : r \in \bigcup_{n\in dom(f)} I_{f(n)}\}$ é denso em $\mathbb{P}_\varepsilon$.

(c) Lembre-se (ou aprenda) que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se $\inf\{\sum_{n=0}^{\infty} diam(J_n) :$ cada J_n é um intervalo aberto de extremos reais e $X \subset \bigcup_{n\in\omega} J_n\} = 0$. Mostre que, supondo MA_κ, se $X \subset \mathbb{R}$ é tal que $|X| = \kappa$, então X tem medida nula.

(d) Conclua (era para ser fácil) que a afirmação "todo $X \subset \mathbb{R}$ tal que $|X| = \aleph_1$ tem medida nula" é independente de ZFC.