Prova 2 - Topologia - 06/05/2016

Nome: **NUSP:**
Pseudônimo:
Justifique suas respostas

1 Seja X espaço de Hausdorff. Seja $S = \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação de } X\}$.

(a) Mostre que se X é compacto, então S é compacto.

(b) Vale a volta? Isto é, se S é compacto, então X é compacto?

2 Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$ (com a topologia usual): $\{(x,1) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup A$, onde $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ e cada $R_n = \{(q_n, y) : y \geq \frac{1}{n+1}\}$, onde $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ (suponha $q_n \neq q_m$ se $n \neq m$). Tal espaço é conexo? Dica: Faça um desenho.

3 Considere o espaço S das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq 100$ e cada $x_n \in \mathbb{N}$. Com a topologia induzida por $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$, este espaço é compacto?

4 Mostre que, para toda função contínua $f : I\!\!P \longrightarrow \mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$, f tem imagem com interior vazio, onde $I\!\!P$ é o conjunto dos irracionais com a topologia usual e $\mathbb{R}_S$ é a reta de Sorgenfrey. Dica: faça um desenho.

5 Bônus: Seu professor fez em sala uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f[]a, b[] = \mathbb{R}$ para todo $a < b$. E comentou que, aplicando o resultado de Blumberg, existe um denso de $\mathbb{R}$ onde f é contínua. Mostre que seu professor não entende nada da coisa, provando que existe tal denso de maneira bem simples (e sem apelar para o resultado de Blumberg - que nem foi feito em sala). Dica: Não use a construção da função, só a propriedade citada acima.