Espaços métricos

Leandro F. Aurichi [1]

28 de novembro de 2019

[1] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP

Sumário

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Métricas

Um espaço métrico nada mais é que um conjunto com uma noção de distância:

Definição 1.1.1. Dado X um conjunto não vazio, chamamos de uma **métrica** sobre X uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para todo $x, y, z \in X$:

A ideia é: distância é algo positivo, só dá 0 se é o próprio lugar, distância da ida e da volta é a mesma e, se você passa por algum lugar no caminho, a distância não pode diminuir.

(a) $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(b) $d(x, x) = 0$;

(c) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Tal função chamamos de **distância** ou **métrica**. A um conjunto X munido de uma métrica d damos o nome de um **espaço métrico** e denotamos por (X, d).

Exemplo 1.1.2. A reta real com a função $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. A métrica d é dita a métrica usual de $\mathbb{R}$. Para exemplificar, vamos mostrar a condição (d) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x, z) & = & |x - z| \\ & = & |x - z + y - y| \\ & \leq & |x - y| + |y - z| \\ & = & |x - y| + |z - y| \\ & = & d(x, y) + d(y, z) \end{array}$$

Esta é a **métrica usual de** $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.3. O conjunto $\mathbb{R}^n$ da n-uplas de números reais admite uma métrica dada por $d(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Como exemplo, vamos mostrar a condição (c) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Temos

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.4. Considere o conjunto das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $a_n \in [0,1]$. Tal conjunto admite uma métrica $d(a,b) = \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$ onde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como exemplo, vamos mostrar a condição (a) de métrica, deixando as outras como exercício. Sejam $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como acima. Suponha $a \neq b$. Isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \neq b_k$. Temos:

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sup\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq |a_k - b_k| \\ &> 0 \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.5. Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, dizemos que uma função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** sobre V se, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$;

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Nestas condições, V admite a métrica dada por $d(u,v) = \|u - v\|$ (chamamos esta métrica de **métrica induzida pela norma** $\|\cdot\|$). Como exemplo, vamos mostrar que d satifaz a condição (b) de métrica. Seja $u \in V$. Temos

$$\begin{aligned} d(u,u) &= \|u - u\| \\ &= \|0\| \\ &= \|0 \cdot 0\| \\ &= 0\|0\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

É claro que sobre um mesmo conjunto podemos ter métricas diferentes:

Exemplo 1.1.6. Se X é um conjunto não vazio, uma métrica sobre X é a função

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

Esta é chamada a **métrica discreta** sobre X.

Definição 1.1.7. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que Y é um **subespaço** de X se $Y \subset X$ e adotarmos em Y a métrica d restrita a Y.

Observação 1.1.8. Note que, de fato, se Y é um subespaço do espaço métrico (X, d), então (Y, d') também é um espaço métrico, onde d' é a restrição de d a Y.

Exemplo 1.1.9. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Definimos sobre $X_1 \times X_2$ a seguinte métrica, que chamamos de **métrica produto**:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

onde $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Vamos agora mostrar que a noção de distância euclidiana que temos sobre o $\mathbb{R}^n$ de fato nos dá uma métrica no sentido considerado aqui. Vamos aproveitar para ver tal resultado dentro de um panorama mais geral:

Definição 1.1.10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamos uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ de um **produto interno** se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

Se o espaço considerado é sobre $\mathbb{C}$, a definição é um pouco diferente. Mas, para o que vamos considerar aqui, não faz muita diferença.

(a) $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$;

(b) $\langle \lambda a, b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$;

(c) $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$;

(d) $\langle a, a \rangle > 0$ se $a \neq 0$

Proposição 1.1.11 (desigualdade de Cauchy-Schwartz). *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, para quaisquer $a, b \in V$, vale a seguinte desigualdade:*

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

Demonstração. Se $a = 0$, a desigualdade vale trivialmente (pois $\langle 0, b\rangle = 0$). Vamos supor $a \neq 0$. Defina $\lambda = \frac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}$ e $c = b - \lambda a$. Note que

$$\begin{aligned} \langle a, c\rangle &= \langle a, b - \lambda a\rangle \\ &= \langle a, b\rangle - \lambda\langle a, a\rangle \\ &= \langle a, b\rangle - \tfrac{\langle a,b\rangle}{\langle a,a\rangle}\langle a, a\rangle \\ &= \langle a, b\rangle - \langle a, b\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle b, b\rangle &= \langle c + \lambda a, c + \lambda a\rangle \\ &= \langle c, c + \lambda a\rangle + \lambda\langle a, c + \lambda a\rangle \\ &= \langle c, c\rangle + \lambda\langle c, a\rangle + \lambda\langle a, c\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle \\ &= \langle c, c\rangle + \lambda^2\langle a, a\rangle \\ &\geq \lambda^2\langle a, a\rangle \\ &= \tfrac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle^2}\langle a, a\rangle \\ &= \tfrac{\langle a,b\rangle^2}{\langle a,a\rangle} \end{aligned}$$

Ou seja, obtemos

$$\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle \geq \langle a, b\rangle^2$$

como queríamos. □

Proposição 1.1.12. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Então a função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ para $a \in V$ é uma norma. Chamamos esta norma de a* **norma induzida pelo produto interno** $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Demonstração. Vamos apenas verificar que, dados $a, b \in V$, temos que $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, deixando as outras condições como exercício. Temos:

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \langle a + b, a + b\rangle \\ &= \langle a, a + b\rangle + \langle b, a + b\rangle \\ &= \langle a, a\rangle + \langle a, b\rangle + \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \\ &= \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle \\ &\overset{1.1.11}{\leq} \langle a, a\rangle + 2\sqrt{\langle a, a\rangle\langle b, b\rangle} + \langle b, b\rangle \\ &= \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 \\ &= (\|a\| + \|b\|)^2 \end{aligned}$$

□

Juntando com o que fizemos anteriormente, obtemos:

Exemplo 1.1.13. O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico com a função

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$. Esta é conhecida como **métrica euclidiana** do $\mathbb{R}^n$. Para verificar este exemplo, basta mostrar que $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ é um produto interno. Depois, é só mostrar que a norma induzida por tal produto interno induz a métrica definida acima.

Vamos terminar esta seção apresentando uma métrica não usual sobre $\mathbb{Q}$:

Definição 1.1.14. Seja p um número primo. Dados $a, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, sejam $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $a = up^m$, $b = vp^n$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e p não divide uv. Considere $v_p : \mathbb{Q}_{\neq 0} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$v_p(\frac{a}{b}) = m - n$$

A ideia aqui é que m seja a maior potência de p que divide a.

Observação 1.1.15. Note que v_p está bem definida, isto é, ela independe de quais valores de a e b foram escolhidos para representar $\frac{a}{b}$. Note também que vale a seguinte igualdade:

$$v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$$

Basta notar que $v_p(1) = 0$, uma vez que $1 = 1p^0$.

Exemplo 1.1.16. $v_7(1) = 0 - 0 = 0$, pois $1 = 1 \cdot 7^0$.
$v_7(7) = 1 - 0 = 7$, pois $7 = 1 \cdot 7^1$.
$v_7(\frac{98}{30}) = 2 - 0 = 2$, pois $98 = 2 \cdot 7^2$ e $30 = 30 \cdot 7^0$.

Proposição 1.1.17. *Sejam p primo e $x, y \in \mathbb{Q}$. Considere $N_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $N_p(q) = p^{-v_p(q)}$ para todo $q \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$ e $N_p(0) = 0$.*

(a) Se $N_p(x) = 0$, então $x = 0$;

(b) $N_p(x + y) \leq \max\{N_p(x), N_p(y)\}$ (note que isso implica que $N_p(x + y) \leq N_p(x) + N_p(y)$).

Note que N_p parece satisfazer propriedades parecidas com a noção de norma apresentada aqui. De fato, ela satisfaz o conceito de norma para um corpo, que não abordaremos aqui.

Demonstração. (a) Basta notar que $p^{-v_p(x)} \neq 0$ para todo $x \neq 0$ (nem definimos $v_p(0)$).

(b) Vamos fazer o caso em que $x, y \neq 0$, os outros casos ficam como exercício. Sejam $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Primeiramente, vamos mostrar que $v_p(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}) \geq \min\{v_p(\frac{a}{b}), v_p(\frac{a'}{b'})\}$. Sejam $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ e $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tais que $a = up^m$, $b = vp^n$, $a' = u'p^{m'}$, $b' = v'p^{n'}$ e tais que p não divide u, v, u', v'. Sem perdade de generalidade, vamos supor que $v_p(\frac{a}{b}) \leq v_p(\frac{a'}{b'})$. Isto é, $m - n \leq m' - n'$. Assim, obtemos

$$m + n' \leq m' + n \tag{1.1}$$

Aqui, pode ser que $(uv' + (u'v)p^{(m'+n)-(m+n')})$ possa ser divisível por p, mas daí temos a desigualdade desejada. Se não for divisível, temos a igualdade.

Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
v_p(\tfrac{a}{b} + \tfrac{a'}{b'}) &= v_p(\tfrac{ab'+a'b}{bb'}) \\
&= v_p(ab' + a'b) - v_p(bb') \\
&= v_p(up^m v'p^{n'} + u'p^{m'}vp^n) - v_p(vp^n v'p^{n'}) \\
&= v_p((uv')p^{m+n'} + (u'v)p^{m'+n}) - v_p((vv')p^{n+n'}) \\
&= v_p(p^{m+n'}(uv' + (u'v)p^{(m'+n)-(m+n')})) - v_p((vv')p^{n+n'}) \\
&\overset{(1.1)}{\geq} m + n' - (n + n') \\
&= m - n \\
&= v_p(\tfrac{a}{b}) \\
&= \min\{v_p(\tfrac{a}{b}, \tfrac{a'}{b'})\}
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado. De fato, suponha $N_p(x) \leq N_p(y)$. Então, $-v_p(x) \leq -v_p(y)$. Ou seja, $v_p(x) \geq v_p(y)$ e, portanto, $v_p(x + y) \geq v_p(y)$. Assim, $N_p(x + y) = p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} = N_p(y)$.

□

Definição 1.1.18. Seja p primo. Definimos $d_p : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $d_p(x, y) = N_p(x - y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

Proposição 1.1.19. *$(\mathbb{Q}, d_p)$ é um espaço métrico para qualquer p primo.*

Demonstração. Ver Exercício 1.1.24. □

Alongamentos de 1.1

Alongamento 1.1.20. Mostre que as funções definidas nos exemplos acima são de fato métricas.

Alongamento 1.1.21. Se (X, d) é um espaço métrico, mostre que (X, d') também é um espaço métrico onde $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$.

Exercícios de 1.1

Exercício 1.1.22. No Exemplo 1.1.4, teríamos algum problema se em vez de tomarmos cada $a_n \in [0,1]$, tomássemos cada $a_n \in \mathbb{R}$?

Exercício 1.1.23. Mostre que uma definição equivalente a que apresentamos de uma métrica é a de que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz, para $a, b, c \in X$:

(a) $d(a,b) = 0$ se, e somente se, $a = b$;

(b) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(c,b)$.

Exercício 1.1.24. Mostre que d_p é de fato uma métrica sobre p.

1.2 Bolas, conjuntos limitados e distâncias entre conjuntos

Comecemos com a noção de bola:

Definição 1.2.1. Sejam (X,d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Chamamos de **bola aberta** de centro x e raio r em X o conjunto

$$B_r^X(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

e chamamos de **bola fechada** de centro x e raio r em X o conjunto

$$B_r^X[x] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Se o X em questão estiver claro no contexto, denotaremos respectivamente por $B_r(x)$ e $B_r[x]$.

A definição importante aqui é a de bola aberta. A de bola fechada vamos utilizar só poucas vezes.
Faça o desenho de $B_1((0,0))$ em $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual para entender o nome. Mas note que se mudar a métrica, o desenho pode ser completamente diferente.

Um vez com a noção de bola, fica fácil definir o conceito de conjuto limitado:

Definição 1.2.2. Sejam (X,d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é **limitado** se existem $x \in X$ e $r > 0$ tais que $Y \subset B_r(x)$.

Exemplo 1.2.3. O subconjunto $[0,1[$ é limitado em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Caber numa bola é equivalente a caber em finitas bolas:

Proposição 1.2.4. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $A \subset X$, são equivalentes:*

(a) A é limitado;

(b) existem $x_1, ..., x_n \in X$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ positivos tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$;

Demonstração. Suponha A limitado. Então existe $r > 0$ e $x \in X$ tal que $A \subset B_r(x)$ e, portanto, temos (b).

Agora suponha que existam $x_1, ..., x_n \in X$ e $r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ positivos tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$. Sejam $j_1 = \max\{r_1, \dots r_n\}$ e $j_2 = \max\{d(x_1, x_i) : i = 2, ..., n\}$. Vamos mostrar que $A \subset B_r(x_1)$, onde $r = j_1 + j_2 + 1$. Seja $a \in A$. Então existe i tal que $a \in B_{r_i}(x_i)$. Temos:

$$\begin{array}{rcl} d(a, x_1) & \leq & d(a, x_i) + d(x_i, x_1) \\ & \leq & r_i + j_2 \\ & \leq & j_1 + j_2 \\ & < & r \end{array}$$

Logo, $A \subset B_r(x_1)$. □

Com isso, obtemos um resultado que facilita na hora de testar se um conjunto é limitado:

Corolário 1.2.5. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A_1, ..., A_n \subset X$ conjuntos limitados. Então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto limitado.*

Demonstração. Para cada A_i existem x_i e $r_i > 0$ tais que $A_i \subset B_{r_i}(x_i)$. Portanto, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$ é um conjunto limitado pela proposição anterior. □

Encerramos esta seção apresentando a ideia de distância entre dois conjuntos:

Definição 1.2.6. Sejam (X, d) um espaço métrico de A e B subconjuntos não vazios de X. Definimos a **distância** entre A e B por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso em que $A = \{a\}$ ou $B = \{b\}$ denotamos por $d(a, B)$ e $d(A, b)$ no lugar de $d(\{a\}, B)$ e $d(A, \{b\})$ respectivamente.

Note que a distância entre dois conjuntos pode ser 0 mesmo que os conjuntos não tenham intersecção (veja os exercícios desta seção).

Alongamentos de 1.2

Alongamento 1.2.7. Dê um exemplo de um espaço métrico X, $x \in X$ e $r > 0$ tais que $B_r(x) = B_r[x]$. Em $\mathbb{R}$ (com a métrica usual) isso pode acontecer?

Alongamento 1.2.8. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. Mostre que, se $s > 0$ e $s < r$, então $B_s(x) \subset B_r(x)$.

Alongamento 1.2.9. Mostre que se trocarmos $B_r(x)$ na definição de conjunto limitado por $B_r[x]$ obtemos uma definição equivalente. Isto é, um conjunto satisfaz a definição "velha" se, e somente se, satisfaz a "nova".

Alongamento 1.2.10. Sejam x, y pontos distintos num espaço métrico e $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Mostre que:

(a) $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$;

(b) Exiba um espaço métrico X e $x, y \in X$ onde $B_\varepsilon[x] \cap B_\varepsilon[y] \neq \emptyset$.

(c) Exiba um espaço métrico X e $x, y \in X$ onde $B_\varepsilon[x] \cap B_\varepsilon[y] = \emptyset$.

Alongamento 1.2.11. Mostre que se (X, d) é um espaço métrico e $x \in X$, então:

(a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{\frac{1}{n+1}}(x) = \{x\}$;

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1}(x) = X$.

Exercícios de 1.2

Exercício 1.2.12. Mostre que são equivalentes para um subconjunto A de um espaço métrico:

(a) A é limitado;

(b) existe $k > 0$ tal que $d(x, y) \leq k$ para todo $x, y \in A$.

Exercício 1.2.13. Mostre que se Y é limitado e $Z \subset Y$, então Z é limitado.

Exercício 1.2.14. Mostre que a intersecção de uma família de conjuntos limitados é um conjunto limitado.

Exercício 1.2.15. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Calcule $d(0, \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\})$.

Exercício 1.2.16. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana. Calcule $d(A, B)$ onde A é o eixo x e B é o gráfico da função $\frac{1}{x}$ para $x \in]0, +\infty[$.

Exercício 1.2.17. Seja (X, d) um espaço métrico. Suponha que para algum $x \in X$ e algum $r > 0$, $A = B_r[x] \smallsetminus B_r(x) \neq \emptyset$. Calcule $d(x, A)$.

1.3 Funções contínuas

Vejamos a definição de função contínua entre espaços métricos. Note que a definição é muito parecida com a aquela vista em Cálculo (veja o Alongamento 1.3.6).

A ideia aqui é a seguinte: se f é contínua em x, dada qualquer "tolerância" que queremos para o valor de $f(x)$ (ε), existe uma "precisão" (δ) que podemos exigir para y de forma que $f(y)$ caia na tolerância.

Definição 1.3.1. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é uma **função contínua** no ponto $x \in X_1$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in X_1$ tal que $d_1(x, y) < \delta$, temos $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Se f é contínua em todo ponto $x \in X$, dizemos simplesmente que f é uma função contínua. Se f é bijetora e sua inversa também é contínua, dizemos que f é um **homeomorfismo**.

Um exemplo fácil de função contínua é o seguinte:

Proposição 1.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então a função $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Defina $\delta = \varepsilon$. Temos, para $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, que $d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \varepsilon$. □

Exemplo 1.3.3. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) dois espaços métricos, sendo que d_1 é a métrica discreta. Então toda $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é contínua. De fato, dado $x \in X_1$ e $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{1}{2}$. Assim, se $d_1(x, y) < \delta$, então $d_2(f(x), f(y)) = 0$, já que para $d_1(x, y) < \delta$, temos que $x = y$.

Nós vamos fazer mais geral e melhor que isso mais para frente, mas fica como um exercício para praticar trabalhar com métricas.

Proposição 1.3.4. *Seja(X, d) um espaço métrico. Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $g : X \longrightarrow X$ funções contínuas. Então $f \circ g : X \longrightarrow X$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para $x \in X$ é uma função contínua*[1].

[1] Note que com a demonstração apresentada aqui, podemos mostrar que $f \circ g$ é contínua em x se f é contínua em $g(x)$ e g é contínua em x.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $y \in X$ tal que, se $d(g(x), y) < \delta_1$, então

$$d(f(g(x)), f(y)) < \varepsilon.$$

Como g é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $z \in X$, se $d(x, z) < \delta$, então

$$d(g(x), g(z)) < \delta_1.$$

Assim, dado $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, temos que $d(g(x), g(y)) < \delta_1$ e, portanto, $d(f(g(x)), f(g(y))) < \varepsilon$. $\square$

Alongamentos de 1.3

Alongamento 1.3.5. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \longrightarrow X_2$ uma função. Dado $x \in X$, mostre que são equivalentes:

(a) f é contínua em x;

(b) para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f[B_\delta^{X_1}(x)] \subset B_\varepsilon^{X_2}(f(x))$.

Alongamento 1.3.6. Mostre que a noção de continuidade apresentada aqui com relação a $\mathbb{R}$ com a métrica usual é equivalente com relação à noção normalmente apresentada em cursos de cálculo.

Alongamento 1.3.7. Mostre o resultado análogo à Proposição 1.3.4 para o caso em que $f : X_2 \longrightarrow X_3$, $g : X_1 \longrightarrow X_2$ e (X_1, d_1), (X_2, d_2) e (X_3, d_3) são espaços métricos.

Alongamento 1.3.8. Mostre que toda função constante é contínua.

Exercícios de 1.3

Exercício 1.3.9. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Seja $f : X_1 \longrightarrow X_2$ sobrejetora tal que $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$. Uma função como essa é dita uma **isometria** entre X_1 e X_2 e, neste caso, (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são ditos **espaços isométricos**. Mostre que:

(a) f é injetora;

(b) a inversa de f também é uma isometria;

(c) f é contínua.

Exercício 1.3.10. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função uniformemente contínua** se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, dados $a, b \in X$, se $d(a, b) < \delta$ então $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Mostre que:

(a) toda função uniformemente contínua é contínua;

(b) a composta de funções uniformemente contínuas também é uniformemente contínua.

(c) Mostre que $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (tudo com a métrica usual) dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua.

Exercício 1.3.11. Sejam (X, d) espaço métrico e $p \in X$. Considere $f : X \to X$ dada por $f(x) = d(x, p)$. Mostre que f é contínua.

1.4 Exercícios do Capítulo 1

Exercício 1.4.1. Sejam (X, d) um espaço métrico e Y subespaço de X.

(a) Se $y \in Y$ e $r > 0$, então $B_y^Y(r) = B_y^X(r) \cap Y$.

(b) Se $x \in X$ e $r > 0$, então, para qualquer $y \in Y \cap B_r^X(x)$ existe $s > 0$ tal que $y \in B_s^Y(y) \subset Y \cap B_r^X(x)$.

Exercício 1.4.2. Seja (X, d') um espaço métrico dado como no Alongamento 1.1.21. Mostre que X é um conjunto limitado.

Exercício 1.4.3. Sejam (X, d_1) e (Z, d_2) espaços métricos e Y um subespaço de X.

(a) Mostre que, dada $f : X \longrightarrow Z$ contínua, a restrição de f a Y também é uma função contínua.

(b) Mostre um contraexemplo para a afirmação "Dada $g : Y \longrightarrow Z$ contínua, existe $f : X \longrightarrow Z$ contínua tal que g é a restrição de f a Y".

Exercício 1.4.4. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos, onde X_2 é limitado. Mostre que o conjunto $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ de todas as funções $f : X_1 \longrightarrow X_2$ admite uma métrica d dada por $d(f, g) = \sup_{x \in X_1} d(f(x), g(x))$. Obs.: Definimos $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ como o subespaço de $(\mathcal{F}(X, Y), d)$ formado pelas funções contínuas de X_1 em X_2.

Capítulo 2

A topologia nos espaços métricos

2.1 Abertos e fechados

Veremos agora alguns conceitos topológicos. Tais conceitos vão nos auxiliar muito no decorrer do trabalho.

Definição 2.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **aberto** se, para todo $x \in A$, existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(x) \subset A$. Dizemos que $F \subset X$ é **fechado** se $X \smallsetminus F$ é aberto.

A ideia aqui é que os pontos de um aberto cabem com folga dentro dele.

Exemplo 2.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Então os conjuntos $\emptyset$ e X são abertos e fechados.

Proposição 2.1.3. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Então*

(a) $B_r(x)$ é aberto;

(b) $B_r[x]$ é fechado.

Demonstração. (a) Seja $y \in B_r(x)$. Seja $s = r - d(x, y)$ (note que $s > 0$).
Vamos provar que $B_s(y) \subset B_r(x)$. De fato, seja $z \in B_s(y)$. Temos

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) \\ &< s + d(x, y) \\ &= r - d(x, y) + d(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

(b) Seja $a \notin B_r[x]$. Vamos mostrar que existe $s > 0$ tal que $B_s(a) \subset X \smallsetminus B_r[x]$. Como $a \notin B_r[x]$, temos que $d(x,a) > r$. Considere $s = d(x,a) - r$. Note que $s > 0$. Vamos mostrar que $B_s(a) \subset X \smallsetminus B_r[x]$, isto é, que $B_s(a) \cap B_r[x] = \emptyset$. Suponha que exista $b \in B_s(a) \cap B_r[x]$. Então

$$\begin{aligned} d(x,a) &\leq d(x,b) + d(b,a) \\ &< r + s \\ &= d(x,a) \end{aligned}$$

contradição.

□

Isso na verdade, junto com o fato de X e $\emptyset$ serem abertos, é a definição de topologia.

Proposição 2.1.4. *Seja (X,d) espaço métrico. Temos:*

(a) Se A e B são abertos, então $A \cap B$ é aberto;

(b) Se $\mathcal{F}$ é uma família de abertos, então $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ é um aberto.

Demonstração. (a) Seja $x \in A \cap B$. Como A é aberto, existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(x) \subset A$. Como B é aberto, existe $s \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_s(x) \subset B$. Seja $t = \min\{r, s\}$. Vamos motrar que que $B_t(x) \subset A \cap B$. Seja $y \in B_t(x)$. Como $t \leq r$, $B_t(x) \subset B_r(x) \subset A$. Como $t \leq s$, $B_t(x) \subset B_s(x) \subset B$. Logo, $B_t(x) \subset A \cap B$.

(b) Seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. Seja $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A$. Como A é aberto, existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_r(x) \subset A$. Logo, $B_r(x) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

□

Corolário 2.1.5. *Seja (X,d) espaço métrico. Seja $A \subset X$. Se, para todo $a \in A$, existe V_a aberto tal que $a \in V_a \subset A$, então A é aberto.*

Demonstração. Basta notar que $A = \bigcup_{a \in A} V_a$. □

O próximo exemplo mostra que abertos e fechados podem ter comportamento bem diferente do que ocorre em $\mathbb{R}$:

Exemplo 2.1.6. Seja (X,d) onde d é a métrica discreta sobre X. Então, dado $A \subset X$, A é aberto e é fechado.

Um conceito às vezes útil é o de fronteira:

Definição 2.1.7. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Chamamos de **fronteira** de A o conjunto $\partial A = \{x \in X :$ para qualquer $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(x) \cap (X \smallsetminus A) \neq \emptyset\}$.

Exemplo 2.1.8. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então $\partial[0, 1[= \{0, 1\}$.

Exemplo 2.1.9. Considere X com a métrica discreta. Então todo $A \subset X$ é tal que $\partial A = \emptyset$.

Os pontos de um aberto estão "longe" dos de fora:

Proposição 2.1.10. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então A é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ aberto. Seja $x \in A$. Então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Logo, $B_r(x) \cap (X \smallsetminus A) = \emptyset$ e, portanto, $x \notin \partial A$. Assim, $A \cap \partial A = \emptyset$.

Seja $A \subset X$ tal que $\partial A \cap A = \emptyset$. Seja $x \in A$. Temos que mostrar que existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Como $x \notin \partial A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$ ou $B_r(x) \cap (X \smallsetminus A) = \emptyset$. Como $x \in B_r(x) \cap A$, temos que $B_r(x) \cap (X \smallsetminus A) = \emptyset$. Isto é, $B_r(x) \subset A$. $\square$

Proposição 2.1.11. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então ∂A é um conjunto fechado.*

Demonstração. Temos que mostrar que, para qualquer $x \in X \smallsetminus \partial A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset (X \smallsetminus \partial A)$. Seja $x \in X \smallsetminus \partial A$. Então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$ ou $B_r(x) \cap (X \smallsetminus A) = \emptyset$. Suponha que $B_r(x) \cap A = \emptyset$ (o outro caso é análogo). Seja $y \in B_r(x)$, vamos mostrar que $y \notin \partial A$. Note que existe $s > 0$ tal que $s \leq s$ tal que $B_s(y) \subset B_r(x)$. Note também que $B_s(y) \cap A = \emptyset$. Logo, $y \in X \smallsetminus \partial A$ e, portanto, $B_r(x) \subset X \smallsetminus \partial A$. $\square$

Proposição 2.1.12. *Sejam (X, d), (Y, d') espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. São equivalentes:*

(a) f é contínua;

(b) $f^{-1}[A]$ é aberto para qualquer $A \subset Y$ aberto.

Demonstração. Suponha f contínua. Seja A aberto em Y não vazio (o caso vazio é trivial). Seja $x \in f^{-1}[A]$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que

$B_r^Y(f(x)) \subset A$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f[B_\delta^X(x)] \subset B_r^Y(f(x))$. Ou seja, $B_\delta^X(x) \subset f^{-1}[A]$.

Agora suponha que vale (b). Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $B_\varepsilon^Y(f(x))$ é aberto, $f^{-1}[B_\varepsilon^Y(f(x)]$ é aberto. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^X(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon^Y(f(x))]$, isto é, $f[B_\delta^X(x)] \subset B_\varepsilon^Y(f(x))$. □

No que se segue, estaremos considerando a métrica produto usual quando tivermos um produto de dois métricos.

Proposição 2.1.13. *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) métricos. Se $A \subset X_1$ e $B \subset X_2$ são abertos, então $A \times B$ é aberto.*

Demonstração. Seja $(a, b) \in A \times B$. Como A é aberto, existe $r_a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B_{r_a}(a) \subset A$. Analogamente, existe $r_b \in \mathbb{R}_{>b}$ tal que $B_{r_b}(b) \subset B$. Seja $r = \min\{r_a, r_b\}$. Vamos mostrar que $B_r((a, b)) \subset A \times B$. De fato, seja $(x, y) \in B_r((a, b))$. Temos:

$$\begin{array}{rcl} d_1(x,a) & \leq & d_1(x,a) + d_2(y,b) \\ & = & d((x,y),(a,b)) \\ & < & r \\ & \leq & r_a \end{array}$$

Logo, $x \in B_{r_a}(a)$. Analogamente, $y \in B_{r_b}(b)$. Assim, $(x, y) \in B_{r_a}(a) \times B_{r_b}(b) \subset A \times B$. □

Em geral, não vale a volta (veja o Alongamento 2.1.20).

Definição 2.1.14. Sejam (X_1, d_1), (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \longrightarrow X_2$ função. Chamamos de **gráfico** de f o conjunto $\{(x, f(x)) : x \in X_1\} \subset X_1 \times X_2$.

Proposição 2.1.15. *Sejam $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ espaços métricos e $f : X_1 \longrightarrow X_2$ função contínua. Então o gráfico de f é um subconjunto fechado de $X_1 \times X_2$.*

Demonstração. Seja G o gráfico de f. Seja $(x, y) \notin G$. Seja $r = \frac{d_2(y, f(x))}{2}$. Note que, assim, $B_r(y) \cap B_r(f(x)) = \emptyset$. Como f é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset B_r(f(x))$. Note que $(x, y) \in B_\delta(x) \times B_r(y)$ e $B_\delta(x) \times B_r(y) \cap G = \emptyset$. Como $B_\delta(x) \times B_r(y)$ é aberto, temos o resultado. □

Em geral, não vale a volta:

Exemplo 2.1.16. Note que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ considerado com a métrica usual) dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma função com o gráfico fechado mas que não é contínua.

Existe um teorema para espaços de Banach que diz que vale a volta, mas lá as funções consideradas são lineares.

Alongamentos de 2.1

Alongamento 2.1.17. Dados (X, d) um espaço métrico e $x \in X$, mostre que $\{x\}$ é fechado. Mostre que todo subconjunto $F \subset X$ finito é fechado.

Alongamento 2.1.18. Mostre que se $(F_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de fechados de um espaço métrico, então $\bigcap_{i \in I} F_i$ também é fechado.

Alongamento 2.1.19. Mostre que se $F_1, ..., F_n$ são fechados num espaço métrico, então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ também é fechado.

Alongamento 2.1.20. Encontre um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de um aberto que não seja o produto de dois abertos.

Formalmente, para esse exercício ser mais interessante, você deveria considerar em $\mathbb{R}^2$ a métrica do produto (e não a Euclidiana). Mas vamos ver depois que, na verdade, não faz diferença.

Exercícios de 2.1

Exercício 2.1.21. Mostre que composta de funções contínuas é uma função contínua usando a caracterização da Proposição 2.1.12.

Exercício 2.1.22. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos. Mostre que se $F \subset X$ e $G \subset X'$ são fechados, então $F \times G$ é fechado.

Exercício 2.1.23. Mostre, por contraexemplos, que não valem as seguintes afirmações num espaço métrico qualquer:

(a) união qualquer de fechados é um fechado;

(b) intersecção qualquer de abertos é um aberto;

(c) $B_r[x] \setminus B_r(x) = \partial B_r(x)$.

Exercício 2.1.24. Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$.

(a) Encontre $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fechados tais que $B_r(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$;

(b) Encontre $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abertos tais que $B_r[x] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

2.2 Aderência, acumulação e fecho

Note que um ponto que pertence a um conjunto Y é automaticamente aderente a ele - isso não necessariamente ocorre com ser de acumulação.

Definição 2.2.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ e $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto aderente** a A se, para qualquer $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Dizemos que X é um **ponto de acumulação** de A se x é um ponto aderente a $A \setminus \{x\}$.

Exemplo 2.2.2. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{R}$. Temos que os pontos aderentes de $]0,1] \cup \{2\}$ são $[0,1] \cup \{2\}$ enquanto que os de acumulação são $[0,1]$.

Exemplo 2.2.3. Considere X não vazio com a métrica discreta. Então, dado $x \in X$, x é ponto aderente a X mas não é de acumulação de X.

Exemplo 2.2.4. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então qualquer ponto $a \in A$ é ponto aderente de A.

Podemos caracterizar os fechados via aderência:

Proposição 2.2.5. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $F \subset X$ um fechado. Então $x \in F$ se, e somente se, x é aderente a F.*

Demonstração. Seja $x \in F$. Note que x é aderente a F. Agora, seja x aderente a F. Suponha $x \notin F$. Como F é fechado, $X \setminus F$ é aberto. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X \setminus F$. Isto é, $B_r(x) \cap F = \emptyset$. Portanto, x não é aderente a F, contradição. $\square$

Os pontos aderentes a um conjunto são tão úteis que teremos uma notação para eles:

Definição 2.2.6. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Chamamos de **fecho** de A em X o conjunto $\overline{A}^X = \{x \in X : x \text{ é ponto aderente de } A\}$. Quando estiver claro no contexto, omitiremos o X.

Exemplo 2.2.7. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então $\overline{]0,1[} = [0,1]$.

Exemplo 2.2.8. Considere X não vazio com a métrica discreta. Dado $A \subset X$, $\overline{A} = A$.

Vejamos algumas propriedades básicas do fecho:

Proposição 2.2.9. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Temos:*

(a) $A \subset \overline{A}$

(b) $\overline{A}$ *é fechado;*

(c) $\overline{A} = A$ *se, e somente se,* A *é fechado;*

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$*.*

Demonstração. (a) Dado $a \in A$, temos que $a \in B_r(a) \cap A$ para qualquer $r > 0$.

(b) Seja $x \notin \overline{A}$. Então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Note que para todo $y \in B_r(x)$, existe $s > 0$ tal que $B_s(y) \subset B_r(x)$ e, portanto, $y \notin \overline{A}$. Assim, $B_r(x) \subset X \smallsetminus \overline{A}$.

(c) Se $\overline{A} = A$, temos que A é fechado pelo item anterior. Agora suponha A fechado. Seja $x \in X \smallsetminus A$. Como A é fechado, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Logo, $x \notin \overline{A}$. Assim, $\overline{A} \subset A$. Como $A \subset \overline{A}$, temos $\overline{A} = A$.

(d) Como $\overline{A}$ é fechado, o resultado segue do item anterior.

□

O fecho também tem um comportamento bom com relação a inclusões:

Proposição 2.2.10. *Sejam* (X, d) *espaço métrico e* $A, B \subset X$*. Temos:*

(a) Se $A \subset B$*, então* $\overline{A} \subset \overline{B}$*;*

(b) Se $A \subset B$ *e* B *é fechado, então* $\overline{A} \subset B$*.*

Demonstração. (a) Seja $a \in \overline{A}$. Seja $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Como $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$, temos que $B_r(x) \cap B \neq \emptyset$. Logo, $x \in \overline{B}$.

(b) Basta notar que $\overline{A} \subset \overline{B} = B$.

□

Proposição 2.2.11. *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $A \subset X$ *e* $x \in X$*. Então* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se,* $d(x, A) = 0$*.*

Demonstração. Suponha $x \in \overline{A}$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) < \frac{1}{n+1}$. Logo, $d(x, A) \leq \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $d(x, A) = 0$.

Suponha $d(x, A) = 0$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) < \frac{1}{n+1}$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ já que existe n tal que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. □

Note que o resultado análogo para dois conjuntos não é verdadeiro:

Exemplo 2.2.12. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. Note $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ são dois conjuntos fechados, tais que $d(A, B) = 0$ e $A \cap B = \emptyset$.

Outra maneira de se enxergar o fecho é "o conjunto mais sua fronteira":

Proposição 2.2.13. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então $\overline{A} = A \cup \partial A$.*

Demonstração. Seja $a \in \overline{A}$. Suponha que $a \notin A$. Vamos mostrar que $a \in \partial A$. Seja $r > 0$. Então, como $a \in \overline{A}$, temos que $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$. Como $a \notin A$, temos também que $B_r(a) \cap (X \smallsetminus A) \neq \emptyset$. Assim, $a \in \partial A$.

Seja $a \in A \cup \partial A$. Se $a \in A$, então $a \in \overline{A}$ (Proposição 2.2.9). Se $a \notin A$, temos que $a \in \partial A$. Dado $r > 0$, temos que $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$ e, portanto, $a \in \overline{A}$. □

Alongamentos de 2.2

Alongamento 2.2.14. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $A, B \subset X$. Mostre que:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;

(c) Mostre que, em geral, não vale a igualdade no item anterior.

Alongamento 2.2.15. Mostre que, se x é ponto de acumulação de A e $B \supset A$, então x é ponto de acumulação de B.

Exercícios de 2.2

Exercício 2.2.16. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é tal que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercício 2.2.17. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que são equivalentes para um $x \in X$ e $A \subset X$:

(a) x é ponto de acumulação de A;

(b) para qualquer $r > 0$, $B_r(x) \cap A$ é infinito.

Exercício 2.2.18. Mostre um exemplo de espaço métrico onde $\overline{B_r(x)} = B_r[x]$ para todo $x \in X$ e todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Mostre outro exemplo onde isso não ocorre.

Exercício 2.2.19. Sejam (X, d) espaço métrico e $A \subset X$. Mostre que $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ onde $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado e } A \subset F\}$.

2.3 Sequências

Sequência convergente é um dos conceitos mais importantes em espaços métricos:

Definição 2.3.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Damos a uma família $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X o nome de **sequência**. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência convergente** se existe $x \in X$ tal que, para todo $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $x_n \in B_r(x)$. Neste caso, chamamos x de **limite** da sequência e denotamos por $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow x$.

Exemplo 2.3.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $x \in X$. Então a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $x_n = x$ é convergente.

Um teste útil para convergência de sequências é a convergência das distâncias:

Proposição 2.3.3. *Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $x \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Então $x_n \longrightarrow x$ se, e somente se, $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ (considerando-se a métrica usual em $\mathbb{R}$).*

Demonstração. Suponha que $x_n \longrightarrow x$. Seja $\varepsilon > 0$. Temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Isto é, se $n > n_0$, $|d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$. Logo, a sequência $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0.

Agora suponha que $d(x_n, x) \longrightarrow 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, $|d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$. Logo, $d(x_n, x) < \varepsilon$ e, portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. □

Exemplo 2.3.4. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $x_n = \frac{1}{n+1}$ é uma sequência convergente para 0. Considere $Y = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ com a métrica de subespaço de $\mathbb{R}$. Então, em Y, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente.

Temos a unicidade da convergência das sequências:

Proposição 2.3.5. *Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Se $y \in X$ é tal que $y = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$, então $y = x$.*

Demonstração. Suponha $d(x, y) > 0$. Seja $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$. Note que $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, existe n_x tal que, para todo $n > n_x$, $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y, existe n_y tal que, para todo $n > n_y$, $x_n \in B_\varepsilon(y)$. Seja $n > n_x, n_y$. Então $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$, contradição. □

Veremos com os próximos resultados que sequências convergentes são suficientes para caracterizar fechados:

Proposição 2.3.6. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Seja $F \subset X$ fechado. Se cada $x_n \in F$, então $x \in F$.*

Demonstração. Suponha $x \notin F$. Como $X \smallsetminus F$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset X \smallsetminus F$. Isto é, $B_r(x) \cap F = \emptyset$ e, portanto, $x_n \notin B_r(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradição com o fato de que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. □

Proposição 2.3.7. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Então o conjunto $B = \{x \in X :$ existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em A convergente para $x\}$ é igual a $\overline{A}$.*

Demonstração. Seja $x \in B$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de A que converge para x. Note que, para qualquer $r > 0$, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ pois contém pontos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assim, $x \in \overline{A}$.

Seja $x \in \overline{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida assim converge para x. Seja $r > 0$. Seja n_0 tal que $\frac{1}{n_0+1} < r$. Note que todo x_n com $n > n_0$ é tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n+1} < r$. □

Corolário 2.3.8. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ e $x \in X$. Se $x \in \overline{A}$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de A que converge para x.*

Proposição 2.3.9. *Sejam (X, d), (Y, d') espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. São equivalentes:*

(a) f é contínua;

(b) para qualquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em X convergente para $x \in X$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em Y para $f(x)$.

Demonstração. Suponha f contínua. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência convergente para $x \in X$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f[B_\delta^X(x)] \subset B_\varepsilon^Y(f(x))$. Como $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$, existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$, $x_n \in B_\delta(x)$. Logo, para todo $n > n_0$, $f(x_n) \in B_\varepsilon^Y(f(x))$, isto é, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$.

Suponha que vale (b) e que f não é contínua em x. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $y \in B_\delta^X(x)$ tal que $f(y) \notin B_\varepsilon^Y(f(x))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina x_n tal que $x_n \in B_{\frac{1}{n+1}}^X(x)$ e $f(x_n) \notin B_\varepsilon^Y(f(x))$. Note que $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ (exercício) e que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente para $f(x)$ (exercício), contradição com (b). □

Definição 2.3.10. Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Chamamos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de **subsequência** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números naturais.

Alongamentos de 2.3

Alongamento 2.3.11. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências em X, ambas convergindo para $x \in X$. Mostre que a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ também é uma sequência convergente para x.

Alongamento 2.3.12. Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **quase constante** se existe x e $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x$ se $k > n$. Mostre que, nesse caso, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x.

Exercícios de 2.3

Exercício 2.3.13. Seja X com a métrica discreta. Mostre que as únicas sequências convergentes em X são as quase constantes.

Exercício 2.3.14. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente num espaço métrico, então toda subsequência sua também é convergente (e para o mesmo limite).

Exercício 2.3.15. Mostre que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ num espaço métrico admite duas subsequências convergentes para pontos distintos, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente.

Exercício 2.3.16. Seja (X, d) um espaço métrico. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências convergentes para limites distintos, então existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que $d(x_n, y_n) > r$ para todo $n > n_0$.

2.4 Métricas equivalentes

Vamos terminar este capítulo analisando quando duas métricas induzem a mesma topologia sobre o espaço. Essa é exatamente a definição topológica de duas métricas equivalentes. Daremos uma definição alternativa do ponto de vista das métricas e provaremos a equivalência na Proposição 2.4.3.

Definição 2.4.1. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que as métricas d_1 e d_2 sobre X são equivalentes se, para quaisquer $x \in X$ e $r > 0$:

(a) existe $s > 0$ tal que $\{y \in X : d_1(x, y) < s\} \subset \{y \in X : d_2(x, y) < r\}$;

(b) existe $t > 0$ tal que $\{y \in X : d_2(x, y) < t\} \subset \{y \in X : d_1(x, y) < r\}$;

Veremos mais a frente uma maneira mais econômica de analisar diversas métricas equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.4.2. São métricas equivalentes sobre $\mathbb{R}^2$:

(a) $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;

(b) $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

(c) $d_3(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$;

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. De fato, as equivalências podem ser facimente demonstradas a partir das seguintes desigualdades:

- $$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} &\leq \sqrt{2\max\{(x_1 - y_1)^2, (x_2 - y_2)^2\}} \\ &= \sqrt{2}\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$
- $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq 2\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
- $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
- $$\begin{aligned} \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} &= \sqrt{\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Proposição 2.4.3. *Seja X um conjunto não vazio e d_1 e d_2 duas métricas sobre X. São equivalentes:*

(a) d_1 e d_2 são métricas equivalentes;

(b) (X, d_1) e (X, d_2) têm os mesmos abertos.

Demonstração. Suponha que d_1 e d_2 são equivalentes. Vamos mostrar que todo aberto de (X, d_1) é um aberto de (X, d_2). Que todo aberto de (X, d_2) é aberto de (X, d_1) é análogo. Seja A um aberto de (X, d_1). Seja $x \in A$. Como A é aberto em (X, d_1), existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{y \in X : d_1(x, y) < \varepsilon\} \subset A$. Como d_1 é equivalente a d_2, existe $s > 0$ tal que $\{y \in X : d_2(x, y) < s\} \subset \{y \in X : d_1(x, y) < \varepsilon\}$. Assim, $\{y \in X : d_2(x, y) < t\} \subset A$ e, portanto, A é aberto em (X, d_2).

Agora suponha (b). Seja $x \in X$ e $r > 0$. Como $\{y \in X : d_1(x, y) < r\}$ é um aberto de (X, d_1) e, portanto, de (X, d_2), existe $s > 0$ tal que $\{y \in X : d_2(x, y) < s\} \subset \{y \in X : d_1(x, y) < r\}$. Analogamente, mostramos que, para qualquer $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $\{y \in X : d_1(x, y) < s\} \subset \{y \in X : d_2(x, y) < r\}$. □

Proposição 2.4.4. *Seja (X, d) espaço métrico. Se X é finito, então d é equivalente à métrica discreta.*

Demonstração. Pela Proposição 2.4.3, basta provarmos que (X, d) e (X, d') tem os mesmos abertos, onde d' é a métrica discreta. Já vimos que todo subconjunto de (X, d') é aberto (Exemplo 2.1.6). Então só precisamos mostrar que todo subconjunto de (X, d) é aberto. Para isso, basta mostrarmos que todo subconjunto de (X, d) é fechado. Como todo subconjunto de X é finito, temos o resultado pelo Alongamento 2.1.17. □

Alongamentos de 2.4

Alongamento 2.4.5. Seja X um conjunto não vazio. Mostre que "ser equivalente a" é uma relação de equivalência sobre as métricas sobre X. Isto é, mostre que, dadas d_1, d_2, d_3 métricas sobre X, d_1 é equivalente a d_1; que, se d_1 é equivalente a d_2, então d_2 é equivalente a d_1; que, se d_1 é equivalente a d_2 e d_2 é equivalente a d_3, então d_1 é equivalente a d_3.

Exercícios de 2.4

Exercício 2.4.6. Sejam X um conjunto não vazio e d_1 e d_2 métricas sobre X. São equivalentes:

(a) d_1 e d_2 são equivalentes;

(b) a função $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x$ é contínua se considerada de (X, d_1) em (X, d_2) e se considerada de (X, d_2) em (X, d_1).

Exercício 2.4.7. Sejam X um conjunto não vazio e d_1 e d_2 métricas sobre X. São equivalentes:

(a) d_1 e d_2 são equivalentes;

(b) (X, d_1) e $(X d_2)$ tem as mesmas sequências convergentes.

Exercício 2.4.8. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que as seguintes métricas são equivalentes em $X_1 \times X_2$:

(a) d, onde d é a métrica produto;

(b) d' dada por $d'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$;

(c) d'' dada por $d''((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$.

Exercício 2.4.9. Dizemos que duas normas são equivalentes se suas métricas induzidas também forem equivalentes. Mostre que são equivalentes:

(a) $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ são equivalentes;

(b) existem $m, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tais que, para todo x vale

$$m||v||_1 \leq ||v||_2 \leq M||v||_1.$$

2.5 Exercícios do Capítulo 2

Exercício 2.5.1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Mostre que

$$\{A \subset Y : A \text{ é aberto em } Y\} = \{B \cap Y : B \text{ é aberto em } X\}$$

$$\{F \subset Y : F \text{ é fechado em } Y\} = \{G \cap Y : G \text{ é fechado em } X\}$$

Exercício 2.5.2. Considere $C = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ com a métrica usual induzida por $\mathbb{R}$. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que um sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é convergente para um ponto $x \in X$ se, e somente se, a função $f : C \longrightarrow X$ definida por $f(\frac{1}{n+1}) = x_n$ e $f(0) = x$ é contínua.

Exercício 2.5.3. Mostre que um subconjunto A de um espaço métrico é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de pontos de A converge para um ponto de A.

Exercício 2.5.4. Mostre que todo espaço métrico (X, d) admite uma métrica d' equivalente a d que torna X limitado.

Exercício 2.5.5. Seja uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, se $n \neq m$ então $x_n \neq x_m$ e tal que $x_n \longrightarrow x$. Mostre que x é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Qual o problema se tirarmos a hipótese de que dados $n \neq m$, $x_n \neq x_m$?

Exercício 2.5.6. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em X convergentes para x e y respectivamente. Mostre que:

(a) $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y) = d(x, y)$

(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Exercício 2.5.7. Sejam (X, d) e (X, d') duas métricas sobre um mesmo espaço. Mostre que d e d' são equivalente se, e somente se, para cada $y \in X$, temos que $f_y(x) = d(x, y)$ é contínua em (X, d') e $g_y(x) = d'(x, y)$ é contínua em (X, d).

Exercício 2.5.8. Considere $(\mathbb{Q}, d_7)$ e a sequência $x_n = 2+7^n$. Esta sequência é convergente?

Capítulo 3

Conexidade

3.1 Conjuntos mutuamente separados e conjuntos conexos

Vamos apresentar neste capítulo um importante invariante topológico: a conexidade.

Definição 3.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $A, B \subset X$. Dizemos que A e B são **mutuamente separados** se $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Não tome o fecho de ambos os conjuntos ao mesmo tempo - veja o exemplo abaixo.

Exemplo 3.1.2. Os conjuntos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são mutuamente separados em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Proposição 3.1.3. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A, B \subset X$ dois subconjuntos não vazios. Se $d(A, B) > 0$, então A e B são mutuamente separados.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Mostrar que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ é análogo. Seja $b \in B$. Como $d(A, B) > 0$, $d(b, A) > 0$. Assim, existe $r > 0$ tal que $B_r(b) \cap A = \emptyset$. Logo, $b \notin \overline{A}$. $\square$

Note que o exemplo anterior mostra que não vale a volta.

Definição 3.1.4. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Dizemos que A é **desconexo** se existem B e C não vazios e mutuamente separados tais que $A = B \cup C$. Dizemos que A é **conexo** caso contrário.

Definição 3.1.5. Dizemos que $I \subset \mathbb{R}$ é um **intervalo** se para quaisquer $a, b \in I$ tais que $a < b$, dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$, temos que $x \in I$.

A seguinte caracterização vai ser muito importante mais para frente.

Proposição 3.1.6. *Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Temos que $A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.*

Demonstração. Suponha A conexo e que não seja um intervalo. Então existem $a < b < c$ tais que $a, c \in A$ e $b \notin A$. Considere os seguintes conjuntos $A_1 = \{x \in A : x < b\}$ e $A_2 = \{x \in A : x > b\}$. Note que A_1, A_2 são não vazios e que $A = A_1 \cup A_2$. Note que, $\overline{A_1} \subset]-\infty, b]$ e $\overline{A_2} \subset [b, +\infty[$, $\overline{A_1} \cap A_2$ e $A_1 \cap \overline{A_2}$ são vazios, o que contraria o fato de A ser conexo.

Suponha que A seja um intervalo e que não seja conexo. Então existem $A_1, A_2 \subset A$ não vazios e mutuamente separados tais que $A = A_1 \cup A_2$. Seja $x \in A_1$. Vamos mostrar que todo $y \in A$ tal que $y > x$ é tal que $x \in A_1$. O caso em que $y < x$ é análogo. Note que isso é suficiente já que isso implica que $A_2 = \emptyset$. Seja $y \in A$ tal que $y > x$. Suponha que $y \in A_2$. Seja

Tal supremo existe uma vez que o conjunto é limitado por y e x é um elemento do conjunto.

$$a = \sup\{z \in [x, y] : [x, z] \subset A_1\}.$$

Note que, se $a \in A_1$, então $\overline{A_2} \cap A_1 \neq \emptyset$. E se $a \in A_2$, então $\overline{A_1} \cap A_2 \neq \emptyset$. Em ambos os casos, A_1 e A_2 não são mutuamente separados. □

O seguinte lema, apesar ser fácil de demonstrar, é bastante útil na hora de provar que certas coisas são conexas:

Lema 3.1.7. *Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ mutuamente separados e não vazios. Seja $C \subset A \cup B$ conexo. Então $C \subset A$ ou $C \subset B$.*

Demonstração. Suponha que não. Considere $A' = C \cap A$ e $B' = C \cap B$. Note que $C = A' \cup B'$ e que $\overline{A'} \cap B = \emptyset = A' \cap \overline{B'}$ (pois A e B são separados). Como C é conexo, $A' = \emptyset$ ou $B' = \emptyset$ e temos o resultado. □

Proposição 3.1.8. *Seja (X, d) espaço métrico.*

(a) Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.

(b) Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.

Demonstração. (a) Suponha que X não seja conexo. Sejam $A, B \subset X$ mutuamente separados não vazios tais que $A \cup B = X$. Note que, para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha \subset A$ ou $X_\alpha \subset B$. Suponha que existam $\alpha, \beta \in I$ tais que $X_\alpha \subset A$ e $X_\beta \subset B$. Como $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, temos uma contradição. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X_\alpha \subset A$, para todo $\alpha \in I$. Logo $X \subset A$ e daí $B = \emptyset$, contradição.

(b) Fixe $x \in X$. Para cada $y \in X$, seja A_y conexo tal que $x, y \in A_y$. Por (a), concluímos que $X = \bigcup_{y \in X} A_y$ é conexo.

□

Definição 3.1.9. Sejam (X, d) um espaço métrico e $x \in X$. Chamamos de **componente conexa** de x o conjunto $\bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C$, onde $\mathcal{C}_x = \{C \subset X : C$ é conexo e $x \in C\}$.

Proposição 3.1.10. *Sejam (X, d) espaço métrico, $x \in X$ e C_x a componente conexa de x. Então C_x é conexo e, dado $A \subset X$ conexo tal que $x \in A$, temos que $A \subset C_x$.*

Demonstração. Que a componente conexa contém x é claro já que $\{x\}$ é conexo. Que a componente conexa é de fato um conjunto conexo segue da Proposição 3.1.8. Finalmente, se A é conexo, então pela definição de C_x temos que $A \subset C_x$. □

Proposição 3.1.11. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $x, y \in X$. Se existe um conexo $A \subset X$ tal que $x, y \in A$, então as componentes conexas de x e de y são iguais.*

Demonstração. Sejam C_x e C_y as componentes conexas de x e y respectivamente. Note que $A \subset C_x, C_y$. Logo, $x, y \in C_x \cap C_y$. Assim, $C_x \cup C_y$ é conexo (Proposição 3.1.8). Como $C_x \cup C_y$ é um conexo que contém x, temos que $C_x \cup C_y \subset C_x$. Isto é, $C_y \subset C_x$. Analogamente, $C_x \subset C_y$. Assim, $C_x = C_y$. □

Proposição 3.1.12. *Seja (X, d) espaço métrico. Então o a família $\mathcal{C} = \{C \subset X :$ existe $x \in X$ tal que C é a componente conexa de $x\}$ forma uma partição de X.*

Demonstração. É claro que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$ (pois cada ponto pertence a sua componente conexa (Proposição 3.1.10). Vejamos que tal família é disjunta. Sejam $A, B \in \mathcal{C}$ tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Seja a tal que A é a componente conexa de a. Seja $x \in A \cap B$. Como A é conexo e $x \in A$, temos que a componente conexa de x é igual a A (Proposição 3.1.11). Por outro lado, como B é conexo e $x \in B$, a componente conexa de x é igual a B. Logo, $A = B$. □

Alongamentos de 3.1

Alongamento 3.1.13. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $A, B \subset X$ não vazios e mutuamente separados. Seja $C \subset A \cup B$ tal que $A \cap C$ e $B \cap C$ são não vazios. Mostre que $A \cap C$ e $B \cap C$ são mutuamente separados (isto é, que C não é conexo). Mostre por um contraexemplo que as hipóteses de que $A \cap C$ e $B \cap C$ sejam não vazios é essencial.

Exercícios de 3.1

Exercício 3.1.14. Sejam (X, d) um espaço métrico. Mostre que X é conexo se, e somente se, não existirem dois abertos U, V não vazios, disjuntos e tais que $X = U \cup V$.

Exercício 3.1.15. Mostre que um espaço métrico (X, d) é conexo se, e somente se, os únicos conjuntos que são abertos e fechados em X são o próprio X e o conjunto vazio.

Uma interpretação para este exercício é: X é conexo se, e somente se, não existe uma forma contínua de pintar X com duas cores.

Exercício 3.1.16. Seja (X, d) espaço métrico. Mostre que X é conexo se, e somente se, para toda $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ ($\{0, 1\}$ com a métrica usual) contínua é constante.

Exercício 3.1.17. Mostre que num espaço métrico com a métrica discreta, os únicos conexos não vazios são os conjuntos unitários.

Exercício 3.1.18. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a métrica usual é tal que os únicos conexos não vazios são os conjuntos unitários.

Exercício 3.1.19. Dê um exemplo de um espaço métrico (X, d) tal que $B_r(x)$ não seja conexo para todos os $r > 0$ e $x \in X$.

Exercício 3.1.20. Suponha que cada C_i para $i \in \mathbb{N}$ seja conexo e que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mostre que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ é conexo.

Exercício 3.1.21. Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $A, B \subset X$ não mutuamente separados. Se A é conexo e B é conexo, mostre que $A \cup B$ é conexo (note que isso inclui o caso em que $A \cap B \neq \emptyset$).

Exercício 3.1.22. Dê um exemplo de A, B conexos tais que $A \cap B$ não seja conexo.

Exercício 3.1.23. Mostre que o produto cartesiano de dois conexos é conexo. Sugestão: Considere os conjuntos $C_{(x,y)} = \{(a, y) : a \in X\} \cup \{(x, b) : b \in Y\}$.

3.2 Funções contínuas e conexidade por caminhos

A maior relação entre entre continuidade e conexidade se dá pelo seguinte resultado:

Proposição 3.2.1. *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Seja $f : X_1 \longrightarrow X_2$ uma função contínua. Se X_1 é conexo, então $f[X_1]$ também é.*

A ideia aqui é: "imagem de conexo é conexa".

Demonstração. Suponha que $f[X_1]$ não é conexo. Sejam A, B conjuntos não vazios, mutuamente separados e tais que $f[X_1] = A \cup B$. Note que $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ são dois conjuntos não vazios tais que $X_1 = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$. Vamos mostrar que $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ são separados. Suponha que exista $x \in \overline{f^{-1}[A]} \cap f^{-1}[B]$. O caso em que existe $x \in f^{-1}[A] \cap \overline{f^{-1}[B]}$ é análogo. Como $x \in \overline{f^{-1}[A]}$ existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de $f^{-1}[B]$ que converge para x. Como f é contínua, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Mas isso é contradição com o fato que $f(x) \in A$ e que cada $f(x_n) \in B$. □

Aqui estamos usando a métrica na prova (ao tomarmos as sequências convergentes. Mas o resultado vale para espaço topológico em geral).

Como conexidade é preservada por funções contínuas, podemos ver os casos quando a conexidade de $\mathbb{R}$ pode ser "empurrada" para o espaço:

Definição 3.2.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Dizemos que A é **conexo por caminhos** se, para quaisquer $a, b \in A$, existe $f : [0, 1] \longrightarrow A$ contínua (considerando-se $[0, 1]$ com a métrica usual) tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Proposição 3.2.3. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Se A é conexo por caminhos, então A é conexo.*

Demonstração. Seja $x \in A$. Por hipótese, para cada $y \in A$, existe $f_x : [0, 1] \longrightarrow A$ contínua tal que $f_x(0) = x$ e $f_x(1) = y$. Logo, $C_{x,y} = f_x[[0, 1]]$ é conexo (Proposição 3.2.1). Com isso, basta notar que $A = \bigcup_{y\in A} C_{x,y}$ e que $x \in C_{x,y}$ para todo $y \in A$ e usarmos a Proposição 3.1.8. □

Da mesma forma que a conexidade, a conexidade por caminhos também é preservada por funções contínuas:

Proposição 3.2.4. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Se X é conexo por caminhos e $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua, então $f[X]$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in f[X]$. Sejam $a, b \in X$ tais que $f(a) = x$ e $f(b) = y$. Como X é conexo por caminhos, existe $g : [0,1] \longrightarrow X$ contínua tal que $g(0) = a$ e $g(1) = b$. Note que $f \circ g : [0,1] \longrightarrow f[X]$ é uma função contínua tal que $(f \circ g)(0) = x$ e $(f \circ g)(1) = y$. □

Este espaço é conhecido como "espaço do pente". Faça um desenho dele para entender o motivo.

Exemplo 3.2.5. Este é um exemplo de que conexidade não implica conexidade por caminhos. Considere em $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana os seguintes subespaços $A = \{(\frac{1}{n+1}, y) : n \in \mathbb{N} \text{ e } y \geq 0\} \cup \{((x,0) : x > 0\}$ e $B = \{(0,y) : y > 0\}$. Note que A e B são conexos (na verdade, são conexos por caminhos (exercício)). Defina $S = A \cup B$ (note que $(0,0) \notin S$). Vamos mostrar que S é conexo. Como A e B são conexos, basta mostrarmos que A e B não são mutuamente separados (ver Exercício 3.1.21). Note que $\overline{A} \supset B$, logo A não é separado de B. Vamos agora mostrar que S não é conexo por caminhos. Considere os pontos $(0,1), (1,1) \in S$. Suponha que exista $f : [0,1] \longrightarrow S$ contínua tal que $f(0) = (0,1)$ e $f(1) = (1,1)$. Seja $\alpha = \sup\{x \in [0,1] : f(x) \in B\}$. Temos dois casos:

$f(\alpha) \in B$: Seja $r = d(f(\alpha), (0,0))$. Como f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\alpha) \subset B_r(f(\alpha))$. Seja $\beta \in [0,1]$ tal que $\alpha < \beta < \alpha + \varepsilon$, com $f(\beta) \in A \cap B_r(f(\alpha))$. Então $f(\beta)$ é da forma $(\frac{1}{n+1}, y)$ para algum $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Note que $A' = \{(x,y) : x > \frac{1}{n+1}\} \cap B_r(f(\alpha)) \cap A$ e $B' = \{(x,y) : x < \frac{1}{n+1}\} \cap B_r(f(\alpha)) \cap B$ são dois conjuntos não vazios e mutuamente separados tais que $A' \cup B' = S \cap B_r(f(\alpha))$. Contradição, pois $S \cap B_r(f(\alpha))$ é a imagem de f restrita a $B_\varepsilon(\alpha)$ e, portanto, é conexo.

$f(\alpha) \in A$: Seja $r = d(f(\alpha), B)$. Note que $r > 0$. Como f é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\alpha) \subset B_r(f(\alpha))$. Contradição com o fato que existe $\beta \in B_\varepsilon(\alpha)$ tal que $f(\beta) \in B$.

Alongamentos de 3.2

Alongamento 3.2.6. Seja V um espaço normado e com a métrica induzida pela norma. Dizemos que $A \subset V$ é **convexo** se, para todo $a, b \in A$, $\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\} \subset A$. Mostre que todo conjunto convexo é conexo por caminhos. Dê um exemplo em que não vale a volta.

Alongamento 3.2.7. Considere $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana:

(a) Mostre que $\mathbb{R}^n$ é conexo;

(b) Mostre que $B_r(x)$ é conexo, para qualquer $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Alongamento 3.2.8. Mostre o análogo ao exercício anterior, mas para um espaço normado qualquer.

Exercícios de 3.2

Exercício 3.2.9. Mostre que se $\mathcal{C}$ é uma família de conjuntos conexos por caminhos tal que existe $x \in \bigcap \mathcal{C}$, então $\bigcup \mathcal{C}$ é conexo por caminhos.

Exercício 3.2.10. Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ é conexo por caminhos.

3.3 Algumas aplicações

Juntando algumas coisas que fizemos neste capítulo, temos alguns resultados de Cálculo:

Proposição 3.3.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico conexo e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua considerando $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então a imagem de f é um intervalo.*

Demonstração. Como $f[X]$ precisa ser conexo, basta aplicarmos a Proposição 3.1.6. □

Daí usando que o próprio $\mathbb{R}$ é conexo, obtemos:

Corolário 3.3.2 (Teorema do valor intermediário). *Seja f uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ considerado com a métrica usual). Então, dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) < f(y)$, para qualquer $c \in [f(x), f(y)]$ existe $z \in \mathbb{R}$ entre x e y tal que $f(z) = c$.*

Fica fácil mostrar agora que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são iguais do ponto de vista topológico:

Proposição 3.3.3. *$\mathbb{R}$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (ambos considerados com a métrica euclidiana).*

Demonstração. Suponha que exista $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ homeomorfismo. Escolha $x \in \mathbb{R}^2$ e considere $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ dada por $g(a) = f(a)$ para todo $a \neq x$. Note que g é um homeomorfismo. Mas isso é uma contradição com o fato que $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ ser conexo e $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ não. □

Este resultado é conhecido como Lema da Fronteira ou da Alfândega.

Proposição 3.3.4. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Suponha X conexo e seja $A \subset Y$. Se existem $a, b \in X$ tais que $f(a) \in A$ e $f(b) \in Y \smallsetminus A$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) \in \partial A$.*

Demonstração. Suponha que não. Então $f[X] \cap \partial A = \emptyset$. Considere $U = f[X] \cap A$ e $V = f[X] \smallsetminus A$. Então $f[X] = U \cup V$. Vejamos que U e V são mutuamente separados. Suponha que exista $u \in \overline{U} \cap V$ (o outro caso é análogo). Então $u \in \overline{A}$ e $u \in f[X] \smallsetminus A$. Logo, $u \in \partial A$. Como $u \in V$, $u \in F[X]$, contradição. Assim, temos que U e V são mutuamente separados. Como $f[X]$ é conexo, temos que U ou V é vazio. Mas isso é uma contradição com o fato que $f(a) \in U$ e $f(b) \in V$. $\square$

Exemplo 3.3.5 (no mundo real, literalmente)**.** Considere a superfície da Terra T com a métrica usual. Vamos supor que a função $t : T \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $t(x)$ é a temperatura no local x, seja contínua. Então existem dois pontos antípodas[1] na Terra que possuem a mesma temperatura. De fato, considere $F : T \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = t(x) - t(y)$ onde y é o ponto antípoda de x. Temos que F é uma função contínua (a função que leva x no seu antípoda é contínua). Seja x_0 um ponto qualquer em T e seja y_0 seu antípoda. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow T$ uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = y_0$. Note que $F(f(0)) = -F(f(1))$. Assim, pelo Teorema do valor intermediário 3.3.2, temos que existe $r \in [0, 1]$ tal que $F(f(r)) = 0$. Isto é, $f(r)$ é um ponto em que sua temperatura é a mesma que a do seu antípoda.

Exemplo 3.3.6 (Função base 13 de Conway). Considere os seguintes algarismos numa base 13:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ +\ -\ ;$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere sua expansão na base acima. Defina a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } +a_1a_2\cdots a_n; b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ -a_1a_2\cdots a_n, b_1b_2\cdots b_n\cdots & \text{se a expansão de } x \text{ na base acima fixada} \\ & \text{termina com } -a_1a_2\cdots a_n; b_1b_2\cdots b_n\cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

[1] Isto é, simétricos em relação ao centro da Terra.

Onde os a_n's e b_n's são algarismos entre[2] 0 e 9. Note que f é sobrejetora. Mais que isso, dado qualquer intervalo da forma $[a, b]$ com $a < b$, $f[[a, b]] = \mathbb{R}$. Note também que f é não contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Esta f serve de contraexemplo para a afirmação que se uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ leva conexos em conexos, então ela é contínua.

Alongamentos de 3.3

Alongamento 3.3.7. Mostre que dados X um espaço métrico conexo e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, se existem $f(x) < f(y)$ para algum $x, y \in X$, então para todo $r \in]f(x), f(y)[$ existe $z \in X$ tal que $f(z) = r$.

Exercícios de 3.3

Exercício 3.3.8. Em $\mathbb{R}$, mostre que $[0, 1]$ não é homeomorfo a $[0, 1[$.

Exercício 3.3.9. Mostre que $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a subespaço algum de $\mathbb{R}$.

3.4 Exercícios do Capítulo 3

Exercício 3.4.1. Dizemos que um espaço métrico X é **totalmente desconexo** se os únicos conexos não vazios de X são os unitários.

(a) Mostre que todo espaço com a métrica discreta é totalmente desconexo;

(b) Mostre que $\mathbb{Q}$ é totalmente desconexo

Exercício 3.4.2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, f é constante. Consegue dar uma generalização?

Exercício 3.4.3. Se A é conexo, mostre que $\overline{A}$ é conexo. Mostre que não vale a recíproca.

[2] ao formalizar-se tal exemplo, deve-se tomar cuidado com as expansões decimais que terminem em 9999999... e com as expansões na base 13 fixada que terminem em ; ; ; ; ; ; ; .... Mas isso pode ser feito facilmente.

Capítulo 4

Métricas completas

4.1 Sequências de Cauchy

Um conceito muito importante para espaços métricos é o de sequência de Cauchy:

Essa é uma ideia bem particular de espaços métricos, não se traduzindo (pelo menos não diretamente) para espaços topológicos quaisquer.

Definição 4.1.1. Sejam (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$, então $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Proposição 4.1.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Então toda sequência convergente em X é de Cauchy.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in X$ tais que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sejam $n, m > n_0$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_m) & \leq & d(x_n, x) + d(x_m, x) \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

□

Exemplo 4.1.3. Considere $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ com a métrica usual. Então a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde cada $x_n = \frac{1}{n+1}$ é uma sequência de Cauchy que não é convergente.

A próxima proposição é imediata:

Proposição 4.1.4. *Seja (X,d) um espaço métrico e $Y \subset X$ um subespaço. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de Y, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X se, e somente se, é uma sequência de Cauchy em Y.*

Demonstração. Suponha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em X (em Y), então para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, se $n, m > n_0$, então $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em Y (em X). □

Passando a um subespaço, podemos perder a convergência de uma sequência (deixando o limite de fora) mas não o fato dela ser de Cauchy:

Corolário 4.1.5. *Sejam (X,d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente. Se Y é um subespaço de X tal que todo $x_n \in Y$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Y.*

Exemplo 4.1.6. Considere $\mathbb{Q}$ com a métrica usual. Como $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, para qualquer $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de números racionais tal que $x_n \longrightarrow x$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas que não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 4.1.7. *Sejam (X,d) espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Se $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe n_0 tal que, para todo $m, n > n_0$, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Seja k_0 tal que $n_{k_0} > n_0$. Note que, se $p, q > k_0$, então $d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \varepsilon$. □

Proposição 4.1.8. *Seja (X,d) um espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe n_0 tal que se $m, n > n_0$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Note que, assim, o conjunto $\{x_n : n > n_0\}$ está contido na bola $B_\varepsilon(x_{n_0+1})$. Logo, é limitado. Note que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_n : n \leq n_0\} \cup \{x_n : n > n_0\}$. Como $\{x_n : n \leq n_0\}$ é finito, temos que é ele é limitado. Assim, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado pois é união de dois limitados. □

Se temos uma sequência de Cauchy, basta que uma subsequência sua seja convergente para que a sequência toda também seja:

Proposição 4.1.9. *Sejam (X,d) espaço métrico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Se existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para $x \in X$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe n_1 tal que, para todo $m, n > n_1$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, existe k_0 tal que, se $k > k_0$, então $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sejam $n_0 > n_1, n_{k_0}$ e $n_k > n_0$. Dado $n > n_0$, temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Veja no Alongamento 4.1.11 que a hipótese de ser de Cauchy é essencial.

Alongamentos de 4.1

Alongamento 4.1.10. Dê um exemplo de uma sequência limitada que não seja de Cauchy.

Alongamento 4.1.11. Mostre que a hipótese de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser de Cauchy na Proposição 4.1.9 é essencial.

Exercícios de 4.1

Exercício 4.1.12. Seja (X, d) um espaço métrico e sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências tais que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy;

(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ se, e somente se, $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = x$, para algum $x \in X$.

Exercício 4.1.13. Mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é uniformemente contínua e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em Y. Dê um contraexemplo mostrando que se supormos f contínua, o resultado não vale.

Exercício 4.1.14. Considere os reais com a métrica usual. Neste exercício, vamos supor que todo subconjunto limitado de reais admite supremo[1]

(a) Mostre que toda sequência crescente de Cauchy é convergente.

[1] Alguns lugares colocam na definição dos reais a completude via sequências de Cauchy, mas daí esse exercício ficaria sem graça.

(b) Note que toda sequência decrescente de Cauchy é convergente.

(c) Note que toda sequência admite uma subsequência crescente ou uma decrescente.

(d) Conclua que toda sequência de Cauchy é convergente.

4.2 Completude

Um lugar bom de se morar é um lugar em que os conceitos de ser de Cauchy e de ser completo são equivalentes:

Definição 4.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que (X, d) é um **espaço métrico completo** se toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X.

Exemplo 4.2.2. $\mathbb{R}$ com a métrica usual é um espaço métrico completo (veja o Exercicio 4.1.14).

Proposição 4.2.3. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então um subespaço $A \subset X$ é completo se, e somente se, A é fechado em X.*

Demonstração. Suponha que (A, d) é completo. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de A que converge para $x \in X$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo, como A é completo, o limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a A. Logo, $x \in A$. Portanto, pela Proposição 2.3.7, temos que A é fechado.

Agora suponha que A é fechado. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de pontos de A. Note que tal sequência tem um limite em X, já que X é completo. Tal limite pertence a A pela Proposição 2.3.7 e, portanto, A é completo. □

O seguinte resultado vai ser útil mais tarde - mas já o apresentamos aqui já que a sua solução trabalha bem com os conceitos desta seção:

Proposição 4.2.4. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$. Se toda sequência de Cauchy de A tem limite em X, então X é completo.*

Atenção, estamos pedindo que o limite exista em X, não necessariamente em A - veja o Exercício 4.2.15

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Para cada x_p, seja $(a_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de A tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n^p = x_p$ (tal sequência existe pela Proposição 2.3.8). Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja b_p um ponto de $(a_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_p, b_p) < \frac{1}{p+1}$. Vamos mostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$. Seja n_0 tal que

- $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- dados $m, n > n_0$, $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$;

Temos, dados $m, n > n_0$:

$$\begin{aligned} d(b_m, b_n) &\leq d(b_m, x_m) + d(x_m, b_n) \\ &\leq d(b_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, b_n) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Assim, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de pontos de A. Logo, existe $x \in X$ tal que $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n$. Vamos mostrar que $x = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$. Seja $\varepsilon > 0$. Seja n_0 tal que, se $n > n_0$, $d(b_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ e que $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Temos, dado $n > n_0$:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, b_n) + d(b_n, x) \\ &< \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Proposição 4.2.5. *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos, sendo X_2 limitado. Se X_2 é completo, então $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ é completo (com a métrica usual).*

A gente só usa hipótese da limitação de de X_2 para poder definir a métrica. Mas isso poderia ser contornado de outras maneiras.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{F}(X_1, X_2)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, se $m, n > n_0$, então

$$d(f_m, f_n) = \sup\{d_2(f_m(x), f_n(x)) : x \in X_1\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Note que para cada $x \in X_1$, $d_2(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m, f_n)$. Logo, para cada $x \in X_1$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X_2. Como X_2 é completo, para cada $x \in X_1$, existe $f(x) \in X_1$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Note que $f \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$. Vamos mostrar que $f_n \longrightarrow f$. Dado o ε fixado acima, note que, para cada $x \in X_1$, existe n_x tal que, para todo $m > n_x$, $d_2(f(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Logo, para qualquer $x \in X$, temos

Note que n não depende de x.

$$d_2(f(x), f_n(x)) \leq d_2(f(x), f_m(x)) + d_2(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

se $n > n_0$ e $m > n_0, n_x$. Assim, para $n > n_0$ temos

Note que a primeira desigualdade não é estrita por haver um sup envolvido.

$$d(f, f_n) = \sup\{d_2(f(x), f_n(x)) : x \in X_1\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ou seja, $f_n \longrightarrow f$. □

Proposição 4.2.6. *Sejam* (X_1, d_1) *e* (X_2, d_2) *espaços métricos, sendo* X_2 *limitado. Se* X_2 *é completo, então* $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ *é completo (com a métrica usual).*

Demonstração. Pelas proposições 4.2.5 e 4.2.3, basta mostrarmos que $\mathcal{C}(X_1, X_2)$ é fechado em $\mathcal{F}(X_1, X_2)$. Seja $f \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$ não contínua. Então existe $x \in X_1$ e $\varepsilon > 0$ tais que, para qualquer $\delta > 0$, existe $y \in X_1$ tal que

$$d_1(x, y) < \delta \text{ e } d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Vamos mostrar que $B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f) \cap \mathcal{C}(X_1, X_2) = \emptyset$. Seja $g \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f) \cap \mathcal{C}(X_1, X_2)$. Então $\sup\{d_2(f(x), g(x)) : x \in X_1\} < \frac{\varepsilon}{3}$. Pela continuidade de g, seja $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in X_1$ tal que $d_1(x, y) < \delta$, $d_2(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Seja $y \in X_1$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ e $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Temos

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &\leq d_2(f(x), g(x)) + d_2(g(x), f(y)) \\ &\leq d_2(f(x), g(x)) + d_2(g(x), g(y)) + d_2(g(y), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Contradição com o fato que $d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. □

Definição 4.2.7. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ não vazio. Chamamos de **diâmetro** de A e denotamos por $diam(A)$ o $\sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$.

Essa é a versão para espaços métricos do teorema dos intervalos encaixantes em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.2.8. *Seja* (X, d) *espaço métrico. Então* (X, d) *é completo se, e somente se, para toda família* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

(a) cada $F_n \subset X$ *é fechado e não vazio;*

(b) $diam(F_n) \longrightarrow 0$*;*

(c) $F_n \subset F_m$ *se* $n > m$.

temos que que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponha (X, d) completo. Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como acima. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in F_n$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe n_0 tal que $diam(F_n) < \varepsilon$ se $n > n_0$. Assim, dados $m, n > n_0$ temos $d(x_m, x_n) \leq dim(F_k) < \varepsilon$, onde $k = \min\{m, n\}$ e, portanto, $x_m, x_n \in F_k$. Assim, como (X, d) é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

Vamos mostrar que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Note que $(x_k)_{k>n}$ é uma subsequência de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e, portanto, $(x_k)_{k>n}$ converge para x. Como $\{x_k : k > n\} \subset F_n$ e F_n é fechado, temos que $x \in F_n$. Logo, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Agora suponha que para todo $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como acima, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Vamos mostrar que (X, d) é completo. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$. Vamos mostrar que $diam(F_n) \longrightarrow 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe n_0 tal que, para todo $p, q > n_0$, $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{4}$. Logo, se $n > n_0$, $\{x_k : k > n\} \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_{n+1})$ e, portanto, $\overline{\{x_k : k > n\}} \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}[x_{n+1}]$. Assim, $diam(F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Assim, existe $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow x$. Seja $\varepsilon > 0$. Seja n_0 tal que $diam(F_{n_0}) < \varepsilon$. Então, como $x_n \in F_{n_0}$ se $n > n_0$ e $x \in F_{n_0}$, temos que $x_n \in B_\varepsilon(x)$. $\square$

Alongamentos de 4.2

Alongamento 4.2.9. Mostre que qualquer X não vazio com a métrica discreta é completo.

Alongamento 4.2.10. Mostre que os espaços $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ são não completos com as métricas usuais.

Exercícios de 4.2

Exercício 4.2.11. Mostre que se X e Y são subespaços completos de um mesmo espaço métrico Z (não necessariamente completo), então $X \cap Y$ é completo.

Exercício 4.2.12. Considere $(\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, d)$ onde d é a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $(\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, d)$ não é completo;

(b) Dê um exemplo de uma métrica d' sobre $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ que seja equivalente a d mas tal que $(\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}, d')$ seja completo.

Exercício 4.2.13. Seja (X, d) espaço métrico. Considere d' dada por $d'(x, y) = d(x, y)$ se $d(x, y) < 1$ e $d'(x, y) = 1$ caso contrário. Mostre que d e d' são equivalentes e que (X, d) é completo se, e somente se, (X, d') é completo.

Exercício 4.2.14. Mostre que o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f$ é linear$\}$ é completo em $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (considere em $\mathbb{R}$ a métrica como no Exercício 4.2.13 para que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ esteja bem definido).

Exercício 4.2.15. Mostre que se na Proposição 4.2.4, pedirmos que os limites existam em A, ela continua sendo verdade, mas fica bem sem graça.

4.3 Completamento de espaços

Nesta seção vamos estudar como encontrar um espaço completo que contenha um espaço métrico dado.

Definição 4.3.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que (Y, d') é um **completamento** de (X, d) se (X, d) é um subsespaço de (Y, d'), (Y, d') é completo e $\overline{X} = Y$.

A ideia é expandir o espaço, mas não exagerar.

Proposição 4.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam (Y, d') e (Z, d'') dois completamentos de (X, d). Então (Y, d') e (Z, d'') são isométricos.*

Demonstração. Para cada $y \in Y$, existe $(x_n^y)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em X tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^y = y$ (pois $\overline{X} = Y$ e pela Proposição 2.3.8). Defina $f : Y \longrightarrow Z$ por, para cada $y \in Y$, $f(y) = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^y$. Note que a função está bem definida já que $(x_n^y)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (Z, d'') e, portanto, tem limite. Vamos mostrar que f é uma isometria.

Formalmente, não precisaríamos provar este item, já que toda isometria sobre a imagem é injetora, mas a demonstração é pedagógica.

injetora: Sejam $a, b \in Y$ distintos. Como $a \neq b$, existem n_0 e $r > 0$ tais que $d'(x_n^a, x_n^b) > r$ para todo $n > n_0$ (Exercício 2.3.16). Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $d'(x_n^a, x_n^b) = d(x_n^a, x_n^b) = d''(x_n^a, x_n^b)$ já que cada $x_n^a, x_n^b \in X$. Logo, $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^a \neq \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^b$ e, portanto, $f(a) \neq f(b)$.

sobrejetora: Seja $z \in Z$. Pela Proposição 2.3.8, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de X tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = z$. Seja $y \in Y$ tal que $y = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ em (Y, d'). Vamos mostrar que $f(y) = z$. Para isso, basta mostrarmos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^y = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ em (Z, d''). Note que, em (Y, d'), a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_{2n} = x_n$ e $a_{2n+1} = x_n^y$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência convergente para y (Alongamento 2.3.11). Logo, é uma sequência de Cauchy em (X, d). Portanto, é uma sequência de Cauchy em (Z, d'') e, portanto, convergente. Como $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência sua convergindo para z, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência convergente para z.

isometria: Sejam $a, b \in Y$. Temos:

$$\begin{array}{rcl} d''(f(a), f(b)) & = & d''(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^a, \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^b) \\ & \overset{(*)}{=} & \lim_{n\longrightarrow\infty} d''(x_n^a, x_n^b) \\ & = & \lim_{n\longrightarrow\infty} d'(x_n^a, x_n^b) \\ & \overset{(*)}{=} & d'(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^a, \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n^b) \\ & = & d'(a, b) \end{array}$$

onde $(*)$ vale pelo Exercício 2.5.6.

□

Definição 4.3.3. Seja X um conjunto não vazio. Dizemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma **pseudométrica** se, dados $x, y, z \in X$, temos:

Para ser métrica só falta que $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$.

(a) $d(x, x) = 0$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $d(x, y) \geq 0$;

(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Lema 4.3.4. *Seja X um conjunto não vazio e d uma pseudométrica sobre X. Então, dados $x, y, z \in X$, se $d(x, y) = 0$, então $d(x, z) = d(y, z)$.*

Demonstração. Temos que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(y, z)$. Por outro lado, temos que $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, z)$. Assim, $d(x, z) = d(y, z)$. □

Exercício 4.3.5. Seja X um conjunto não vazio e d uma pseudométrica sobre X. Então a relação $\sim$ sobre X dada por $x \sim y$ se $d(x, y) = 0$ é uma relação de equivalência.

Proposição 4.3.6. *Seja X um conjunto não vazio e d' uma pseudométrica sobre X. Então $(X/\sim, d)$ onde $d([x], [y]) = d'(x, y)$ e $\sim$ é a relação de equivalência definida no Exercício 4.3.5 é um espaço métrico. Neste caso, chamamos d de* **métrica induzida pela pseudométrica** *d'.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que d está bem definida. Isto é, que se $x \sim y$ e $z \sim w$, então $d([x],[z]) = d([y],[w])$. Temos

$$\begin{aligned} d([x],[z]) &= d'(x,z) \\ &\overset{4.3.4}{=} d'(y,z) \\ &\overset{4.3.4}{=} d'(y,w) \\ &= d([y],[w]) \end{aligned}$$

Sejam $x, y, z \in X$. Temos que

(a) se $x \not\sim y$, então $d([x],[y]) = d'(x,y) > 0$;

(b) $d([x],[x]) = d'(x,x) = 0$;

(c) $d([x],[y]) = d'(x,y) = d'(y,x) = d([y],[x])$;

(d) $d([x],[y]) = d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(y,w) = d([x],[z]) + d([y],[z])$.

□

Definição 4.3.7. Seja (X,d) um espaço métrico. Seja $S(X) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de pontos de $X\}$.

Proposição 4.3.8. *Seja (X,d) um espaço métrico. Então a função d' : $S(X)\times S(X)$ dada por $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,y_n)$, para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(X)$ é uma pseudométrica sobre $S(X)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que d' está bem definida, isto é, que dados $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(X)$, $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é um valor real. Para isso, basta mostrarmos que $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon > 0$. Seja n_1 tal que, para todos $n, m > n_1$,

$$d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja n_2 tal que, para todos $n, m > n_2$,

$$d(y_n,y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se $n, m > n_0$, temos (supondo $d(x_n, y_n) > d(x_m, y_m)$, o caso $d(x_n, y_n) < d(x_m, y_m)$ é análogo):

$$\begin{aligned}
|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &= d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \\
&\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\
&\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\
&= d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Agora só resta mostrar as condições para d ser uma pseudométrica. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(X)$:

(a) $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_n) = 0$

(b) $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(y_n, x_n) = d'((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$;

(c) $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n) \geq 0$;

(d) $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}(d(x_n, z_n)+d(z_n, y_n)) = d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}) + d'((z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

□

Proposição 4.3.9. *Considere (X, d) um espaço métrico e $(S(X)/\sim, d')$ onde d' é a métrica induzida pela pseudométrica definida na Proposição 4.3.8. Então (X, d) e (Y, d') são isométricos, onde $Y = \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : \text{cada } x_n = x, x \in X\}$. Além disso, $\overline{Y} = S(X)/\sim$.*

Demonstração. Seja $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(x) = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ onde cada $x_n = x$. Note que f é uma isometria (exercício). Vamos mostrar que $\overline{Y} = S(X)/\sim$. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(X)$. Seja $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que $B_\varepsilon([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \cap Y \neq \emptyset$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe n_0 tal que, para todo $m, n \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Então a sequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ onde todo $y_k = x_{n_0}$ é tal que $d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \varepsilon$ já que $d(x_m, y_m) = d(x_m, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m \geq n_0$. □

Proposição 4.3.10. *Dado (X, d) um espaço métrico, $(S(X)/\sim, d')$ é um espaço métrico completo onde d' é a métrica induzida pela pseudométrica definida na Proposição 4.3.8.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que se $([s_n])_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $S(X)/\sim$ onde cada s_n é uma sequência constantemente igual a um elemento $x_n \in X$, então $([s_n])_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente. De fato, considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tal sequência é de Cauchy em X (exercício). Vamos mostrar que $\lim_{n\longrightarrow\infty}[s_n] = [(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $([s_n])_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe n_0 tal que, se $m, n > n_0$, $d'([s_m],[s_n]) < \frac{\varepsilon}{2}$. Isto é, $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, se $k > n_0$, $d'([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[s_k]) = \lim_{p\longrightarrow\infty} d(x_p, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Como, na notação da Proposição 4.3.9, $\overline{Y} = S(X)/\sim$, concluímos que $S(X)/\sim$ é completo pela Proposição 4.2.4. $\square$

Alongamentos de 4.3

Alongamento 4.3.11. Mostre que se X é completo então X é isométrico ao seu completamento.

Alongamento 4.3.12. Determine um completamento para os seguintes espaços (com suas respectivas métricas usuais):

(a) $[0,1[$;

(b) $[0,1]$;

(c) $\mathbb{Q}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1\}$.

Exercícios de 4.3

Exercício 4.3.13. Seja (X,d) espaço métrico. Sejam $A, B \subset X$ tais que $\overline{A} = \overline{B} = X$. Sejam A^*, B^* e X^* os completamentos de A, B e X respectivamente. Mostre que eles são todos isométricos.

4.4 Exercícios do Capítulo 4

Exercício 4.4.1. Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em X_1 e X_2 respectivamente. Mostre que $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(X_1 \times X_2, d)$ (onde d é a métrica produto) se, e somente se, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy.

Exercício 4.4.2. Mostre que o produto de dois espaços completos é completo.

Exercício 4.4.3. Dê um exemplo de dois espaços métricos X e Y não homeomorfos mas que o completamento de X e o completamento de Y são homeomorfos.

Exercício 4.4.4. Mostre que um espaço métrico X é completo se, e somente se, para todo espaço métrico Y tal que X é subespaço de Y, X é fechado em Y.

Exercício 4.4.5. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Mostre que se x é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, então $x_n \longrightarrow x$. Dê um contraexemplo para mostrar que a hipótese de que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy é necessária.

Capítulo 5

Compactos

5.1 Definição e exemplos

Definição 5.1.1. Seja (X, d) espaço métrico. Dizemos que uma família de subconjuntos $\mathcal{C}$ é uma **cobertura** para X se $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$. Dizemos que é uma **cobertura aberta** se cada elemento de $\mathcal{C}$ é aberto. Dizemos que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ é uma **subcobertura** de $\mathcal{C}$ se $\mathcal{C}'$ é também uma cobertura.

Definição 5.1.2. Dizemos que um espaço métrico (X, d) é **compacto** se toda cobertura aberta para X admite subcobertura finita.

Exemplo 5.1.3. O conjunto $[0, 1]$ é um compacto de $\mathbb{R}$ com métrica usual. De fato, seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para $[0, 1]$. Considere

$$S = \{x \in [0,1] : \text{ existe } \mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \text{ finito tal que } [0, x] \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C\}$$

Note que $0 \in S$ (que, portanto, é não vazio) e que $S \subset [0, 1]$. Logo, existe $\alpha = \sup S$.

Note que $\alpha > 0$, já que o próprio $C \in \mathcal{C}$ que atesta o fato que $0 \in S$, atesta que $[0, \varepsilon[\subset S$ para algum $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que $\alpha = 1$. Suponha que não. Seja $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha \in C$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset C_\alpha$. Seja $x \in]\alpha - \varepsilon, \alpha[$. Note que, como $x \in S$, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $\bigcup_{C \in \mathcal{C}'} C \supset [0, x]$. Logo,

$$[0, \alpha + \varepsilon] \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}^*} C$$

onde $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}' \cup \{C_\alpha\}$ que finito e, portanto, $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \in S$, contradição com a definição de α. De maneira análoga, podemos provar que $1 \in S$ de onde segue o resultado (veja o Exercício 5.1.11).

Note a volta deste resultado não vale em geral, veja mais abaixo.

Proposição 5.1.4. *Seja (X, d) espaço métrico. Se $A \subset X$ é compacto, então A é limitado.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $a \in A$. Então $\{B_n(a) \cap A : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é uma cobertura aberta para A sem subcobertura finita. □

Exemplo 5.1.5. Todo espaço métrico finito é compacto.

O próximo resultado é bastante útil na hora de mostrar que determinados espaços são compactos: basta encontrar um espaço maior em que o original seja compacto.

Proposição 5.1.6. *Seja (X, d) espaço métrico compacto. Se $Y \subset X$ é fechado, então Y é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta para Y. Para cada $C \in \mathcal{C}$, seja C^* aberto de X tal que $C = C^* \cap Y$. Note que $\mathcal{C}^* = \{C^* : C \in \mathcal{C}\} \cup \{X \smallsetminus Y\}$ é uma cobertura para X. Logo, existe A subcobertura finita. Note que $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} : C^* \in A\}$ é uma subcobertura finita para Y. □

Proposição 5.1.7. *Seja (X, d) espaço métrico. Se $Y \subset X$ é compacto, então Y é fechado.*

Note que nesta demonstração só usamos que para cada $x, y \in X$ distintos, existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$

Demonstração. Seja $x \in X \smallsetminus Y$. Vamos mostrar que existe V aberto tal que $x \in V$ e $V \cap Y = \emptyset$ (e, portanto, $x \notin \overline{Y}$ e, portanto, Y é fechado). Para cada $y \in Y$, existem A_y e B_y abertos disjuntos tais que $x \in A_y$ e $y \in B_y$. Note que $\{B_y \cap Y : y \in Y\}$ é uma cobertura para Y. Logo, existem $y_1, ..., y_n \in Y$ tais que $\bigcup_{i=1}^n B_{y_i}$. Vamos mostrar que $V = \bigcap_{i=1}^n A_{y_i}$ é o aberto desejado. Claramente, $x \in V$. Agora seja $y \in Y$. Seja i tal que $y \in B_{y_i}$. Como $B_{y_i} \cap A_{y_i} = \emptyset$, temos que $y \notin V$. □

Proposição 5.1.8. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Se X é compacto e $f : X \longrightarrow Y$ contínua, então $f[X]$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta para $f[X]$. Para cada $y \in f[Y]$, seja $C_y \in \mathcal{C}$ tal que $y \in C_y$. Note que, pela continuidade de f, $f^{-1}[C_y]$ é aberto em X. Logo, $\{f^{-1}[C_y] : y \in f[Y]\}$ é uma cobertura aberta para X. Como X é compacto, existem $y_1, ..., y_n \in f[X]$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}[C_{y_i}]$ e, portanto, $\{C_{y_i} : i = 1, ..., n\}$ é subcobertura para $f[X]$. □

Proposição 5.1.9. *Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Dado $A \subset X$, temos que A é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Demonstração. Suponha A compacto. Note que A é limitado pela Proposição 5.1.4 e fechado pela Proposição 5.1.7.

Agora suponha A fechado e limitado. Note que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset [-n, n]$. Como $[0, 1]$ é compacto (Exemplo 5.1.3), pela Proposição 5.1.8, temos que $[-n, n]$ é compacto Logo, como A é fechado, temos que A é compacto pela Proposição 5.1.6. □

Se preferir, prove que $[-n, n]$ da mesma forma que provamos que $[0, 1]$ é compacto.

O resultado anterior não vale em geral. Por exemplo, $\mathbb{N}$ não é compacto, apesar de, na métrica discreta, ele ser fechado e limitado. Podemos mesmo trocar a métrica usual de $\mathbb{R}$ por uma equivalente e limitada. Daí os compactos permanecem os mesmos (exercício) mas todos os fechados passam as ser limitados (em particular, o próprio $\mathbb{R}$).

Alongamentos de 5.1

Alongamento 5.1.10. Seja X um espaço com a métrica discreta. Mostre que X é compacto se, e somente se, X é finito.

Exercicios de 5.1

Exercício 5.1.11. Mostre que $1 \in S$ no Exemplo 5.1.3.

Exercício 5.1.12. Sejam X espaço métrico e $A, B \subset X$ compactos. Mostre que $A \cup B$ é compacto.

Exercício 5.1.13. Seja $\mathcal{K}$ família de compactos em (X, d) espaço métrico. Mostre que $\bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$ é compacto.

Exercício 5.1.14.

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjunto de X é uma **família centrada** se, para todo $F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$, temos que $F_1 \cap \cdots \mathcal{F}_n \neq \emptyset$. Mostre que são equivalentes:

(a) X é compacto;

(b) Para toda família $\mathcal{F}$ centrada de fechados de X, temos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

5.2 Algumas equivalências

Nesta seção vamos apresentar algumas equivalências à propriedade de compacidade.

Proposição 5.2.1. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Então todo subconjunto infinito de X admite um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ infinito. Suponha que B não admite ponto de acumulação. Então, para cada $a \in X$, existe C_a aberto tal que $a \in C_a$ e $|C_a \cap B| \leq 1$. Note que $(C_a)_{a \in X}$ é uma cobertura aberta sem subcobertura infinita por B é infinito (e há, no máximo, um ponto de B para cada C_a). □

$C_a \cap B$ tem um ponto se o próprio $a \in B$ ou então é vazio.

Proposição 5.2.2. *Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que todo conjunto infinito de X admite ponto de acumulação. Então toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.*

Demonstração. Primeiramente, note que se existirem infinitos n's tais que x_n sejam iguais a um mesmo x, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência constante e, portanto, convergente. Assim, podemos supor $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto infinito. Seja $x \in X$ tal que x seja ponto de acumulação de S. Defina por indução n_k de forma que $n_0 = 0$ e n_{k+1} é tal que

$$x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x)$$

com $n_{k+1} > n_k$. Note que $x_{n_k} \longrightarrow x$. □

O próximo resultado será auxiliar num resultado posterior, mas ele também é a chave para mostrar um resultado bastante importante conhecido como a existência do número de Lebesgue de uma cobertura - veja o Exercicio 5.2.16.

Proposição 5.2.3. *Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ cobertura e suponha que não vale o enunciado. Então para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, existe $x_n \in X$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente, contrariando nossa hipótese. Suponha que $x_{n_k} \longrightarrow x$ para algum x. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset C$ (existe pois C é aberto). Seja n_k tal que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ com $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{n}$ (existe pela convergência). Seja $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$. Temos

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & \leq & d(x,x_{n_k}) + d(x_{n_k},y) \\ & < & \frac{1}{n} + \frac{1}{n_k} \\ & < & \frac{2}{n} \end{array}$$

Ou seja, $y \in B_{\frac{2}{n_k}}(x) \subset C$ para todo $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$ contrariando a escolha de x_{n_k}. □

Proposição 5.2.4. *Seja (X,d) métrico tal que toda sequência admite subsequência convergente. Então X é compacto.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $\mathcal{C}$ sem subcobertura finita. Seja $r > 0$ dado pelo resultado anterior. Seja $x_0 \in X$. Para cada $n > 0$, seja

$$x_n \in X \smallsetminus (B_r(x_0) \cup \cdots \cup B_r(x_{n-1}))$$

Note que sempre podemos tomar tal x_n pois, para cada $i = 0, ..., n-1$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x_i) \subset C_i$ e $\bigcup_{i=0}^{n} C_i \neq X$ por ser um subconjunto finito de $\mathcal{C}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente pois $d(x_n, x_m) \geq r$ para todo $m \neq n$ e, portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem subsequências de Cauchy. □

Juntando os resultados anteriores, temos:

Corolário 5.2.5. *Seja (X,d) espaço métrico. São equivalentes:*

(a) (X,d) é compacto;

(b) Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X;

(c) Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.

Corolário 5.2.6. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy. Então existe subsequência $x_{n_k} \longrightarrow x$, onde $x \in X$. Note que, portanto, $x_n \longrightarrow x$. □

Para tentar dar uma caracterização para compactos como a feita em $\mathbb{R}$, podemos dar a seguinte definição:

Definição 5.2.7. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 5.2.8. *Seja (X, d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como X é totalmente limitado, existe $F \subset X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Para cada $x \in F$, se $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y \neq \emptyset$, defina $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Considere F' o conjunto de tais y_x's. Note que $F' \subset Y$ é finito. Vamos mostrar que $Y \subset \bigcup_{y \in F'} B_\varepsilon(y)$. Seja $a \in Y$. Como $Y \subset X$, existe $x \in F$ tal que $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Assim, existe $y_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap Y$. Note que $a \in B_\varepsilon(y_x)$. □

Proposição 5.2.9. *Seja (X, d) espaço métrico. Então (X, d) é compacto se, e somente se, (X, d) é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha (X, d) compacto. Já temos que (X, d) é completo. O totalmente limitado segue diretamente do fato que cada $B_\varepsilon(x)$ é um aberto.

Agora suponha (X, d) completo e totalmente limitado. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de X. Vamos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite subsequência convergente. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergente. Vamos supor então que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Como X é totalmente limitado, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ também é. Considere $\varepsilon_0 = 1$ e $F_0 \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ finito tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{x \in F_0} B_{\varepsilon_0}(x)$. Note que, para algum $x_{n_0} \in F_0$,

$$A_0 = B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é infinito. Continuamos este processo fazendo, para cada $k + 1$, tomando $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+2}$, escolhendo $F_{k+1} \subset A_k \setminus \{x_{n_0}, ..., x_{n_k}\}$ finito de forma que $A_k \setminus \{x_{n_0}, ..., x_{n_k}\} \subset \bigcup_{x \in F_{k+1}} B_{\varepsilon_{k+1}}(x)$. Daí escolhemos $x_{n_k+1} \in F_{k+1}$ de forma que

$$A_{k+1} = B_{\varepsilon_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \cap A_k$$

seja infinito. Note que a sequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente. □

Corolário 5.2.10. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.*

Alongamentos de 5.2

Alongamento 5.2.11. Dê um exemplo de um conjunto limitado mas que não seja totalmente limitado.

Alongamento 5.2.12. Dê um exemplo de um conjunto limitado mas que não seja compacto.

Exercícios de 5.2

Exercício 5.2.13. Seja X um espaço métrico completo. Mostre que se $A \subset X$ é totalmente limitado, então $\overline{A}$ é compacto.

Exercício 5.2.14. Seja X um espaço compacto. Dados $A, B \subset X$ fechados, mostre que, se $d(A, B) = 0$, então $A \cap B \neq \emptyset$. Dê um exemplo que mostra que a hipótese de que X é compacto é necessária.

Exercício 5.2.15. Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é limitado se, e somente se, A é totalmente limitado.

Exercício 5.2.16. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para um espaço métrico X. Dizemos que ε é um **número de Lebesgue** para $\mathcal{C}$ se, para todo conjunto $A \subset X$ com diâmetro menor que ε, temos que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subset C$. Mostre que se X é um espaço compacto, então toda cobertura admite um número de Lebesgue.

5.3 Algumas aplicações

Vejamos agora nesta seção algumas aplicações de compacidade.

Proposição 5.3.1. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos compactos. Então $X \times Y$ também é compacto.*

Aqui vamos adotar a métrica produto em $X \times Y$ - mas o resultado vale em outras métricas também. Veja o Exercício 5.3.8.

Demonstração. Seja $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de $X \times Y$. Vamos mostrar que tal sequência admite subsequência convergente. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em X. Logo, admite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência convergente para algum $x \in X$. Note que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admite subsequência convergente para algum $y \in Y$. Para não carregar a notação, indiquemos tal subsequência por $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Vamos mostrar que $(x_{n_p}, y_{n_p}) \to (x, y)$ em $X \times Y$. De fato, note que

Estamos usando a notação d_1 para a métrica produto.

$$d_1((x_{n_p}, y_{n_p}), (x, y)) = d(x_{n_p}, x) + d'(y_{n_p}, y).$$

Disso, como cada uma das subsequências é convergente em seus respectivos espaços, temos o resultado. □

Proposição 5.3.2. *Seja $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, onde K é um espaço métrico compacto e $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Então f atinge seu máximo e mínimo (isto é, existem $a, b \in K$ tais que, para qualquer $x \in K$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$).*

Demonstração. Como K é compacto, temos que $f[K]$ é compacto. Logo, é fechado e limitado e, portanto, podemos tomar seu máximo e seu mínimo. □

Proposição 5.3.3. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos, sendo X compacto. Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$, existe $\delta_x > 0$ tal que $f[B_{\delta_x}(x)] \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$. Note que $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ é um recobrimento aberto para X. Logo, pela Proposição 5.2.3, temos que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $a \in X$, existe $x_a \in X$ tal que $a \in B_\delta(a) \subset B_{\delta_{x_a}}(x_a)$. Logo, dados $a, b \in X$ tais que $d(a, b) < \delta$, $d(a, x_a), d(x_a, b) < \delta_{x_a}$ e, portanto, $d'(f(a), f(x)), d'(f(x), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, dados $a, b \in X$ tais que $d(a, b) < \delta$, temos

$$\begin{aligned} d'(f(a), f(b)) &\leq d'(f(a), f(x_a)) + d'(f(x_a), f(b_a)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 5.3.4. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração. Suponha K compacto. Então K é fechado e limitado. Agora suponha K fechado e limitado. Note que $\pi_i[K]$ é limitado em $\mathbb{R}$ para todo $i = 1, ..., n$. Assim, $\overline{\pi_j[K]}$ é compacto (pois é compacto e limitado). Note que

π_i é a projeção na i-ésima coordenada

$$K \subset \prod_{i=1}^{n} \overline{\pi_i[K]}.$$

Assim, K é um fechado dentro de um compacto e, portanto, compacto. □

Proposição 5.3.5 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^n$, ela admite subsequência convergente.*

Demonstração. Como a sequência é limitada, seu fecho é limitado. Logo, compacto (por estarmos em $\mathbb{R}^n$). Assim, segue o resultado pela caracterização de compacidade apresentada em 5.2.5. $\square$

Teorema 5.3.6. *Todas as normas sobre $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Vamos usar aqui a caracterização apresentada no Exercício 2.4.9.

Demonstração. Vamos apresentar a prova para o caso $n = 2$, os outros ficam como exercício. Primeiramente, considere a norma $||\cdot||_1$ dada por

$$||(x, y)||_1 = |x| + |y|.$$

Fixe $||\cdot||$ um norma qualquer. Vamos mostrar que $||\cdot||$ é uma função contínua em $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Considere

$$K = \max\{||(1, 0)||, ||(0, 1)||.\}$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Assim, se $||(x, y) - (a, b)||_1 < \delta$, temos

$$\begin{array}{rcl} ||(x,y) - (a,b)|| & = & ||(x-a,0) + (0,y-b)|| \\ & \leq & ||(x-a,0)|| + ||(0,y-b)|| \\ & = & |x-a|||(1,0)|| + |y-b|||(0,1)|| \\ & \leq & K(|x-a| + |y-b|) \\ & = & K||(x,y) - (a,b)||_1 \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

Considere $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_1 = 1\}$. Note que tal conjunto é compacto. Assim, existem m e M valores mínimo e máximo respectivamente para $||\cdot||$ calculada em U. Assim, dado $(x, y) \in U$, temos

$$m \leq ||(x, y)|| \leq M$$

Lembrando que, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, $\frac{1}{||(x,y)||_1}(x, y) \in U$. Assim, obtemos que

$$m||(x, y)||_1 \leq ||(x, y)|| \leq M||(x, y)||$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Alongamentos de 5.3

Alongamento 5.3.7. Seja K espaço compacto e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua ($\mathbb{R}$ com a métrica usual). Se $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, mostre que existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$. Dê um exemplo mostrando que a hipótese de que K é compacto é necessária.

Exercícios de 5.3

Exercício 5.3.8. Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços compactos. Mostre que $X \times Y$ é consideran-do as métricas $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{d_1(x, a)^2, d_2(y, b)^2}$, $d((x, y), (a, b) = \max\{d_1(x, a), d_2(y, b)\}$.

Exercício 5.3.9. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função fechada** se, para todo $F \subset X$ fechado, temos que $f[F]$ é fechado em Y. Analogamente, dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma **função aberta** se $f[A]$ é aberto para todo $A \subset X$ aberto.

(a) Mostre que se X é compacto e $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, então f é fechada. Dê um exemplo que mostre que a hipótese de que X é compacto é necessária.

(b) Mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é fechada e bijetora, então f é aberta.

(c) Mostre que se X é compacto e $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e bijetora, então f é um homeomorfismo.

Exercício 5.3.10. Mostre que a métrica discreta sobre $\mathbb{R}^2$ não é induzida por nenhuma norma.

Exercício 5.3.11. Seja (K, d') um espaço métrico compacto. Considere o conjunto $\mathcal{C}(K)$ de todas as funções contínuas de K em $\mathbb{R}$, considerando $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Mostre que $d : \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}$ é uma métrica sobre $\mathcal{C}(K)$. Esta é a métrica usual sobre $\mathcal{C}(K)$. Dica: Atenção na hora de mostrar que $d(f, g) \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.3.12. Mostre que $\mathcal{C}(K)$ com a métrica usual não é limitado.

5.4 Exercícios do Capítulo 5

Exercício 5.4.1. Mostre que (X, d) é totalmente limitado se, e somente se, seu completamento é compacto.

Exercício 5.4.2. Dizemos que (X, d) é **localmente compacto** se para todo $x \in X$ existe V aberto tal que $x \in V$ e $\overline{V}$ é compacto. Assim, dado (X, d) localmente compacto:

(a) Mostre que para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $B_r[x]$ é compacto.

(b) Mostre que para qualquer $x \in X$ e qualquer aberto A tal que $x \in A$, existe V aberto tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset A$ e tal que $\overline{V}$ é compacto.

Exercício 5.4.3. Dê um contraexemplo para a afirmação: Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e X é localmente compacto, então $f[X]$ é localmente compacto.

Exercício 5.4.4. Mostre que se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então X é localmente compacto se, e somente se, Y é localmente compacto.

Capítulo 6

Subespaços densos

6.1 Conceitos básicos

Definição 6.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $Y \subset X$ é **denso** em X se $\overline{Y} = X$.

Exemplo 6.1.2. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (com a métrica usual).

Proposição 6.1.3. *Seja (X, d) espaço métrico. Então X é denso em algum espaço métrico completo.*

Demonstração. Basta tomar o completamento de X. $\square$

Proposição 6.1.4. *Sejam (X, d), (Y, d') espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas. Seja $S \subset X$ denso em X. Se, para todo $s \in S$, $f(s) = g(s)$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Temos que, como $x \in \overline{S}$, existe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de pontos de S tal que $s_n \longrightarrow x$ (Corolário 2.3.8). Como f e g são contínuas, temos, pela proposição 2.3.9, que $f(s_n) \longrightarrow f(x)$ e $g(s_n) \longrightarrow g(x)$. Como cada $f(s_n) = g(s_n)$ temos, pela unicidade dos limites, que $f(x) = g(x)$. $\square$

Proposição 6.1.5. *Sejam (X, d) espaço métrico e $S \subset X$ denso em X. Se $D \subset S$ é denso em S, então D é denso em X.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Vamos mostrar que, para todo $r > 0$, existe $d \in D$ tal que $d \in B_r(x)$ (note que isso mostra que $\overline{D} = X$). Seja $r > 0$. Como S é denso em X, existe $s \in S$ tal que $s \in B_{\frac{r}{2}}(x)$. Como D é denso em S, existe $d \in D$ tal que $d \in B_{\frac{r}{2}}(s)$. Assim, $d(x, d) \leq d(x, s) + d(s, d) < r$. Logo, $d \in B_r(x)$ como queríamos. $\square$

O próximo resultado vai ser particularmente útil quando discutirmos espaços de Baire:

Proposição 6.1.6. *Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ abertos densos em X. Então $A \cap B$ é um aberto denso em X.*

Demonstração. É claro que $A \cap B$ é aberto. Vamos mostrar que é denso. Sejam $x \in X$ e $r > 0$. Precisamos mostrar que $B_r(x) \cap A \cap B \neq \emptyset$. Como A é denso, existe $a \in A \cap B_r(x)$. Como A e $B_r(x)$ são abertos (e, portanto, $A \cap B_r(x)$ também), existe $s > 0$ tal que $B_s(a) \subset A \cap B_r(x)$. Como $a \in \overline{B}$ (pois B é denso), existe $b \in B_s(a) \cap B$. Note que $b \in B_r(x) \cap A \cap B$ (pois $B_s(a) \subset A \cap B_r(x)$). $\square$

Exemplo 6.1.7. $\mathbb{R} \smallsetminus F$, onde F é um conjunto finito, é um aberto denso em $\mathbb{R}$.

Definição 6.1.8. Dizemos que um espaço métrico (X, d) é **separável** se existe um subconjunto enumerável denso em X.

Exemplo 6.1.9. $\mathbb{R}$ é um espaço separável já que $\mathbb{Q}$ é um denso enumerável em $\mathbb{R}$.

Dos resultados a seguir, uma importante conclusão é que a propriedade de ser separável é hereditária - isto é, todo subespaço de um espaço separável é também separável. Note que tal resultado não é de todo trivial: quando passamos ao subespço, ele pode simplesmente ser disjunto do denso enumerável que tomamos para testemunhar o fato que o espaço origina é separável. Desta forma, algum trabalho precisa ser feito. Isto pode ser feito diretamente (com algum trabalho), mas optamos por apresentar alguns resultados de caráter mais topológico que também implicarão no resultado.

Definição 6.1.10. Seja (X, d) espaço métrico. Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}$ de abertos é uma **base** para X se, para qualquer A aberto e qualquer $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.

Exemplo 6.1.11. A coleção de todas as bolas abertas num espaço forma uma base.

Exemplo 6.1.12. O conjunto $\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}\}$ forma uma base em $\mathbb{R}$.

Proposição 6.1.13. *Seja (X, d) métrico. Se X admite uma base enumerável, então X é separável.*

Demonstração. Seja $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ base para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in B_n$. Vamos mostrar que $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso. Seja A aberto não vazio e seja $x \in A$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset A$. Note que, assim, $x_n \in A$. □

Proposição 6.1.14. *Seja (X, d) um espaço métrico separável. Então X admite uma base enumerável.*

Demonstração. Seja D denso enumerável em X. Para cada $d \in D$, seja $\mathcal{B}_d = \{B_q(d) : q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$. Note que cada $\mathcal{B}_d$ é enumerável e, portanto, $\mathcal{B} = \bigcup_{d \in D} \mathcal{B}_d$ é enumerável. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ satisfaz o enunciado. Sejam $A \subset X$ aberto e $x \in A$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Como $x \in \overline{D}$, existe $d \in B_{\frac{r}{2}}(x) \cap D$. Seja $q \in \mathbb{Q}$ tal que $d(d, x) < q < \frac{r}{2}$. Note que $B_q(d) \in \mathcal{B}_d$, $x \in B_q(d)$ e $B_q(d) \subset B_r(x) \subset A$. □

Proposição 6.1.15. *Seja (X, d) um espaço métrico separável. Então para qualquer $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ subcobertura enumerável.*

Esta propriedade é conhecida como a propriedade de Lindelöf para espaços topológicos

Demonstração. Pela proposição anterior, existe $\mathcal{B}$ base enumerável para X. Para cada $x \in X$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ e $C_x \in \mathcal{C}$ tais que $x \in B_x \subset C_x$. Note que $\{B_x : x \in X\}$ é um conjunto enumerável (talvez $B_x = B_y$ com $x \neq y$, mas isso não importa). Escreva $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} = \{B_x : x \in X\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $C_n \in \mathcal{C}$ de forma que $A_n \subset C_n$ (podemos fazer isso pela definição de B_x). Note que $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ é enumerável. Resta mostrar que é cobertura. Seja $x \in X$. Por construção, existe $A_n = B_x$. Note que $x \in A_n \subset C_n$. □

Proposição 6.1.16. *Seja (X, d) espaço métrico tal que toda cobertura admite subcobertura enumerável. Então X admite base enumerável.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{B}_n = \{B_{\frac{1}{n+1}}(x) : x \in X\}$. Note que $\mathcal{B}_n$ é um recobrimento aberto para X. Por hipótese, existe $\mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n$ enumerável que é recobrimento aberto para X. Seja $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}'_n$. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ satisfaz o enunciado. Primeiramente, note que $\mathcal{B}$ é enumerável (pois é união enumerável de enumeraveis). Sejam $x \in X$ e A aberto tais que $x \in X$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n+1} < r$. Como $\mathcal{B}'_n$ é recobrimento para X, existe $B_{\frac{1}{n+1}}(y) \in \mathcal{B}'_n$ tal que $x \in B_{\frac{1}{n+1}}(y)$. Note que $B_{\frac{1}{n+1}}(y) \subset A$. □

Com os resultados anteriores, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 6.1.17. *Seja (X, d) espaço métrico. São equivalentes:*

(a) X é separável.

(b) X admite base enumerável.

(c) toda cobertura aberta para X admite subcobertura enumerável.

Um aplicação interessante deste último resultado é o seguinte: a propriedade "ter base enumerável" é facilmente provada ser hereditária para subespaços. Logo, as outras também são (ver os exercícios).

Alongamentos de 6.1

Alongamento 6.1.18. Seja X com a métrica discreta. Mostre que o único denso em X é o próprio X.

Alongamento 6.1.19. Dê um contraexemplo para a afirmação "intersecção de dois densos é denso".

Alongamento 6.1.20. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Mostre que são equivalentes:

(a) Y é denso;

(b) para todo $x \in X$ e $r > 0$, $B_r(x) \cap Y \neq \emptyset$.

Alongamento 6.1.21. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Mostre que são equivalentes:

(a) Y é denso;

(b) para todo $A \subset X$ aberto não vazio, $A \cap Y \neq \emptyset$.

Alongamento 6.1.22. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Mostre que são equivalentes:

(a) Y é denso;

(b) para todo $x \in X$ $d(x, Y) = 0$.

Exercícios de 6.1

Exercício 6.1.23. Mostre que $X \smallsetminus \{x\}$ é denso em X se, e somente se, $\{x\}$ não é aberto.

Exercício 6.1.24. Mostre que todo subespaço de um espaço separável é separável.

Exercício 6.1.25. Mostre que $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ é separável.

Exercício 6.1.26. Mostre que todo espaço compacto é separável.

Exercício 6.1.27. Mostre que todo subespaço de um espaço compacto é separável.

6.2 Espaços de Baire

Um conceito bastante importante é o de um espaço de Baire:

Definição 6.2.1. Dizemos que um espaço métrico (X, d) é um **espaço de Baire** se, para qualquer família $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ é denso.

Muitas vezes, os tais "abertos densos" representam condições que queremos. Daí, ao garantirmos a densidade da intersecção, temos um conjunto "espalhado" de pontos satisfazendo todas as condições impostas.

Vamos mostrar que todo métrico completo é de Baire. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares:

Lema 6.2.2. *Seja (X, d) um espaço métrico e seja $q > 0$. Se A é aberto e $x \in A$ então existe $r > 0$, tal que $\overline{B_r(x)} \subset A$ com $r < q$.*

Demonstração. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_{2r}(x) \subset A$. Note que podemos tomar $r < q$. Assim, temos $\overline{B_r(x)} \subset B_r[x] \subset B_{2r}(x) \subset A$. □

Lema 6.2.3. *Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de X e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de números reais positivos tais que:*

(a) $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) $r_n \longrightarrow 0$.

Então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $r_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Note que, para todo $n > n_0$, $x_n \in B_{r_0}(x_{n_0})$. Assim, dados $n, m > n_0$, temos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

Teorema 6.2.4 (de Baire para espaços completos). *Se (X, d) é um espaço métrico completo, então (X, d) é um espaço de Baire.*

Demonstração. Seja $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ família de abertos densos. Seja A aberto não vazio. Pelo Alongamento 6.1.21, basta mostrarmos que $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$. Vamos definir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de X e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de reais positivos de forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset D_n$;

(b) $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$;

(c) $r_n < \frac{1}{n+1}$;

(d) $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset A$.

Como $A \cap D_0$ é aberto não vazio, pelo Lema 6.2.2 existem $x_0 \in A$ e $r_0 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r < 1$ tais que $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset A \cap D_0$. Suponha definidos $x_0, ..., x_n$ e $r_0, ..., r_n$. Vamos definir x_{n+1} e r_{n+1}. Como $B_{r_n}(x_n) \cap D_{n+1}$ é aberto não vazio, existem x_{n+1} e r_{n+1} tais que $0 < r_{n+1} < \frac{1}{n+2}$ e $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n) \cap D_{n+1}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assim definidas satisfazem as condições desejadas.

Note que, pelo Lema 6.2.3, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Vamos mostrar que $x \in A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Note que isso termina a demonstração. Por (a) e (d), basta mostrarmos que $x \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in \overline{\{x_k : x > n\}}$, temos o resultado. □

Veremos algumas aplicações deste teorema de decorrer do texto. Para terminar esta seção, vamos apresentar uma aplicação simpática.

Definição 6.2.5. Seja (X, τ) um espaço métrico. Chamamos de **Jogo de Banach-Mazur** o seguinte jogo entre os jogadores I e II. Na rodada 0, o jogador I escolhe um aberto $A_0 \neq \emptyset$. Então o jogador II escolhe um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$. Depois, na rodada $n+1$, o jodador I escolhe um aberto não vazio $A_{n+1} \subset B_n$ e então o jogador II escolhe um aberto não vazio $B_{n+1} \subset A_{n+1}$. Depois de jogadas todas as rodadas(!), o jogador I é considerado o vencedor do jogo se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Uma versão deste jogo estava no *The Scottish Book* e a solução para o problema relacionado valia uma garrafa de vinho.

Vamos apresentar um resultado sobre tal jogo que o relaciona com espaços de Baire:

Proposição 6.2.6. *Se o jogador I não tem uma estratégia vencedora no jogo de Banach-Mazur sobre X, então X é de Baire.*

Demonstração. Suponha que X não seja de Baire. Então existe $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de abertos densos tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ não é denso. Logo, existe A aberto não vazio tal que $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \emptyset$. Assim, o jogador I escolhe $A_0 = A \cap D_0$. A cada aberto B_n escolhido por II, o jogador I joga

$$A_{n+1} = B_n \cap D_{n+1}$$

Note que esta é uma jogada válida pela densidade de D_{n+1}. Note que, ao final, temos

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \emptyset.$$

Logo, jogando desta maneira, o jogador I vence (isto é, ele tem uma estratégia vencedora). □

Na verdade, vale a volta de tal resultado (ou seja, tal jogo dá uma caracterização para a propriedade de Baire). Formulações via jogos muitas vezes apresentam vantagens. Por exemplo, não é verdade que produto de espaços de Baire seja de Baire. Mas se trocarmos a hipótese "ser de Baire" por "II ter estratégia vencedora" o resultado vale.

Alongamentos de 6.2

Alongamento 6.2.7. Mostre que se X é compacto, então X é de Baire.

Exercícios de 6.2

Exercício 6.2.8. Mostre que $\mathbb{Q}$ com a métrica usual não é um espaço de Baire.

Exercício 6.2.9. Mostre que todo espaço localmente compacto é um espaço de Baire.

6.3 Exercícios do Capítulo 6

Exercício 6.3.1. Seja (X, d) tal que toda cobertura aberta admite subcobertura enumerável. Mostre que todo subespaço de X tem a mesma propriedade.

Exercício 6.3.2. Mostre que todo subespaço de um compacto é separável.

Exercício 6.3.3. Seja (X, d) espaço métrico não separável. Mostre que X não é subespaço de nenhum Y métrico compacto.

Exercício 6.3.4. Dizemos que $Y \subset X$ é um **conjunto raro** se, para todo $x \in \overline{Y}$, não existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \overline{Y}$. Dizemos que $Z \subset X$ é um **conjunto magro** se existe uma família $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos raros em X tais que $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Alternativamente, dizemos que um conjunto magro é um **conjunto de primeira categoria** e todo conjunto não magro é dito um **conjunto de segunda categoria**.

1. Mostre que $Y \subset X$ é raro em X se, e somente se, $X \setminus \overline{Y}$ é denso em X.

2. (**Teorema de Baire em termos de Categoria**) Mostre que todo espaço de Baire é de segunda categoria.

Exercício 6.3.5. Dê um exemplo de um espaço enumerável de segunda categoria. Como são os conjuntos raros neste exemplo?

Capítulo 7

Algumas aplicações

7.1 Espaços completamente metrizáveis

Definição 7.1.1. Dizemos que um espaço métrico (X, d) é **completamente metrizável** se existe d' métrica sobre X tal que d e d' são equivalentes e (X, d') é completo.

Cuidado com a diferença com o completamento: lá a gente acrescenta pontos e estende a métrica para obter um espaço completo. Aqui, a gente muda a métrica (mantendo os abertos) de forma que se fique completo na nova métrica (não se acrescenta pontos).

Exemplo 7.1.2. Todo espaço métrico completo é completamente metrizável.

Exercício 7.1.3. Mostre que se (X, d) é homeomorfo a (Y, d') e (Y, d') é completo, então (X, d) é completamente metrizável.

Exemplo 7.1.4. Considere o conjunto $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$. Note que tal espaço não é completo. Mas, se considerarmos tal espaço com a métrica discreta, temos que ele é completo. Note que ambas as métricas são equivalentes (pois tem os mesmos abertos). Assim, este é um exemplo de um espaço não completo que admite uma métrica completa equivalente.

Proposição 7.1.5. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $A \subset X$ aberto. Então A com a métrica de subespaço é completamente metrizável.*

Demonstração. Considere $g : X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d\,(x, X \setminus A)$. Note que g é contínua (exercício) e, para todo $a \in A$, $g(a) > 0$ (pois A é aberto). Assim, $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(a) = \frac{1}{g(a)}$ é contínua e positiva. Considere então

$$G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset X \times \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que G é completo. Para isso, basta mostrar que G é fechado em $X \times \mathbb{R}$. Definindo $l : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $l(x, y) = y \cdot g(x)$ (que é contínua), vemos que

$$G = \{(x, y) : y \cdot g(x) = 1\} = l^{-1}[\{1\}],$$

isto é, G é a imagem inversa de um fechado via função contínua, logo G é fechado, como queríamos.

Por fim, note que $h : A \to G$ definida por $h(x) = (x, f(x))$ é um homeomorfismo: h é claramente bijetora; por ser contínua nas coordenadas, segue que h é contínua; a inversa de h é a projeção $\pi : G \to A$ dada por $\pi((x, f(x)) = x$, que é contínua por ser restrição de π_X. Portanto, A é completamente metrizável. $\square$

Exercício 7.1.6. Sejam (X, d) espaço métrico completo e $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Mostre que existe d' métrica completa e equivalente a d tal que, para todo $a, b \in X$, $d'(a, b) \leq k$.

Exercício 7.1.7. Seja $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços métricos tal que, se $a_n, b_n \in X_n$, então $d_n(a_n, b_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Mostre que $d : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \times \prod_{i\in\mathbb{N}} X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} d_n(a_n, b_n)$, onde $a = (a_0, ..., a_n, ...), b = (b_0, ..., b_n, ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, é uma métrica sobre $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Exercício 7.1.8. Seja $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de espaços métricos tal que, se $a_n, b_n \in X_n$, então $d_n(a_n, b_n) \leq \frac{1}{2^n}$. Considere d a métrica sobre $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ definida no Exercício 7.1.7. Se cada d_n é uma métrica completa, então $(\prod_{n=0}^{\infty} X_n, d)$ é completo.

Proposição 7.1.9. *Seja (X, d) espaço métrico completo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n \subset X$ aberto. Então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é completamente metrizável.*

Demonstração. Pela Proposição 7.1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe d_n métrica equivalente à induzida por d que torna A_n completo. Pelo exercicio 7.1.6, podemos supor cada d_n limitada por $\frac{1}{2^n}$. Assim, sendo d' a métrica definida no exercício 7.1.7, temos que $(\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n, d')$ é completo (Exercício 7.1.8).

Considere $\Delta = \{(a, ..., a, ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} : a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$. Note que Δ é fechado (exercício) e, portanto, completo. Note que $f : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \Delta$ dada por $f(a) = (a, ..., a, ...)$ é um homeomorfismo. Logo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ admite uma métrica completa equivalente à induzida por d. □

Proposição 7.1.10. *Considerando $\mathbb{R}$ com a métrica usual, $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ é completamente metrizável (e, em particular, é um espaço de Baire).*

Demonstração. Note que ser um espaço de Baire pode ser definido em termos de abertos, logo, se (X, d) e (X, d') são tais que d e d' são equivalentes, então (X, d) é de Baire se, e somente se, (X, d') é de Baire (exercício). Assim, só precisamos mostrar que existe uma métrica d sobre $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ equivalente a usual de forma que $(\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}, d)$ seja completo. Pela Proposição 7.1.9, basta mostrarmos que existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abertos em $\mathbb{R}$ tais que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. De fato, escreva $\mathbb{Q} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \mathbb{R} \smallsetminus \{x_n\}$. Note que $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

Exercícios de 7.1

Exercício 7.1.11. Mostre que $\mathbb{R} \smallsetminus E$ onde E é um conjunto enumerável qualquer é um espaço completamente metrizável.

Exercício 7.1.12. Mostre que não existe uma métrica completa sobre os racionais que seja equivalente a usual.

Exercício 7.1.13. Mostre que não existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ família de abertos em $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

7.2 Espaços de funções

Definição 7.2.1. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções de X em Y. Seja $f : X \longrightarrow Y$. Dizemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** para f se, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$ e $x \in X$, $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Proposição 7.2.2. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções que converge uniformemente para $f : X \longrightarrow Y$. Se cada f_n é contínua, então f é contínua.*

Demonstração. Vamos mostrar que f é contínua em $x \in X$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$,

$$d'(f(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $y \in X$. Fixe $n > n_0$. Como f_n é contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, temos

$$d'(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, dado $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, temos:

$$\begin{aligned} d'(f(y), f(x)) &\leq d'(f(y), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(x)) \\ &\leq d'(f(y), f_n(y)) + d'(f_n(y), f_n(x)) + d'(f_n(x), f(x)) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

No próximo resultado, vamos trabalhar com as definições feitas no Exercício 5.3.11.

Proposição 7.2.3. *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Então $\mathcal{C}(K)$ é um espaço completo.*

Note que só usamos a compacidade de K para termos que a métrica está bem definida - se conseguirmos isso sob outra hipótese, o resultado continua valendo.

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy de funções de $\mathcal{C}(K)$. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para todo $m, n > n_0$,

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in K\} < \varepsilon.$$

Note que, para cada $x \in K$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Portanto, para cada $x \in K$, existe $f(x)$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$. Vamos mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f. Seja $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe n_0 tal que, para todo $m, n \geq n_0$,

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in K\} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Fixe $x \in K$. Como $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, existe $n_x \geq n_0$ tal que, se $m \geq n_x$, $|f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Note que, dado $n \geq n_0$ temos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, para $n \geq n_0$, temos

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in K\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Assim, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente. Logo, f é contínua (Proposição 7.2.2), isto é, $f \in C(K)$. Note também que

$$d(f, f_n) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in K\},$$

logo $f_n \longrightarrow f$ em $C(K)$. □

No que se segue, quando trabalharmos com $C(X)$, considere $\mathbb{R}$ com uma métrica limitada (para $C(X)$ ser um espaço métrico). Mas, ao aplicarmos de fato os resultados, trabalharemos sempre com $C(K)$, onde K é compacto e esse truque não é necessário.

Definição 7.2.4. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $\mathcal{A} \subset C(X)$ é uma **álgebra** se, para cada $f, g \in \mathcal{A}$, e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que:

(a) $fg \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ é fechado pelo produto de funções);

(b) $\alpha f, f + g \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$).

Dados $f, g \in C(X)$, definimos, para cada $x \in X$:

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Note que $f \wedge g, f \vee g \in C(X)$ (ver os exercícios).

Definição 7.2.5. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $\mathcal{F} \subset C(X)$ **separa pontos** se, dados $x, y \in X$ distintos existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Lema 7.2.6. *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma álgebra que separa pontos. Então, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y \in K$ distintos, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ separa pontos, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Note que $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(z) = \frac{\alpha(g(z) - g(y)) + \beta(g(x) - g(z))}{g(x) - g(y)}$$

para $z \in K$ é tal que $f \in \mathcal{A}$ e $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$. □

Lema 7.2.7. *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma álgebra que separa pontos, que contém as funções constantes e tal que, se $f, g \in \mathcal{A}$, então $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{A}$. Sejam $\alpha \leq \beta \in \mathbb{R}$, $F \subset K$ fechado e $p \in K \setminus F$. Então existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in K$, $f(p) = \alpha$ e $f(x) > \beta$ se $x \in F$.*

Demonstração. Para cada $x \in F$, pelo Lema 7.2.6, existe $f_x \in \mathcal{A}$ tal que $f_x(p) = \alpha$ e $f_x(x) = \beta + 1$. Seja $U_x = \{y \in K : f_x(y) > \beta\}$. Note que cada U_x é aberto (exercício) e que $\mathcal{C} = \{U_x : x \in F\}$ é um recobrimento aberto para F. Como F é compacto (Proposição 5.1.6), temos que existem $x_1, ..., x_n \in F$ tais que $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supset F$. Considere $g \in \mathcal{A}$ dada por $g = f_{x_1} \vee \cdots \vee f_{x_n}$. Note que $g(x) > \beta$ para todo $x \in F$ e que $g(p) = \alpha$. Considere $h \in \mathcal{A}$ constante igual a α. Note que $f = g \vee h$ satisfaz o enunciado. □

Lema 7.2.8. *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{F} \subset C(K)$ uma família de funções tais que, se $f, g \in \mathcal{F}$, então $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{F}$. Suponha que a função $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$h(x) = \inf_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

seja contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{F}$ tal que

$$0 \leq g(x) - h(x) < \varepsilon$$

para todo $x \in K$.

Demonstração. Para cada $x \in K$, existe uma função $f_x \in \mathcal{F}$ tal que $f_x(x) < h(x) + \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_x e h são contínuas, existe um aberto U_x que contém x tal que

$$|f_x(y) - f_x(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } |h(y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $y \in U_x$. Assim, dado $y \in U_x$, temos

$$\begin{array}{rcl} f_x(y) - h(y) & = & |f_x(y) - h(y)| \\ & \leq & |f_x(y) - f_x(x)| + |f_x(x) - h(x)| + |h(x) - h(y)| \\ & < & \varepsilon \end{array}$$

Note que $\mathcal{C} = \{U_x : x \in K\}$ é uma cobertura aberta para K, que é compacto. Logo, existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = K$. Seja $g = f_{x_1} \wedge \cdots \wedge f_{x_n}$. Note que $g \in \mathcal{F}$. Seja $y \in K$. Vamos mostrar que $g(y) - h(y) < \varepsilon$. De fato, seja x_i tal que $y \in U_{x_i}$. Temos

$$g(y) - h(y) \leq f_{x_i}(y) - h(y) < \varepsilon.$$

□

Lema 7.2.9. *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma álgebra que separa pontos, que contenha as funções constantes e tal que, se $f, g \in \mathcal{A}$, então $f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{A}$. Então, para qualquer $g \in C(K)$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $x \in K$,*

$$0 \leq f(x) - g(x) < \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $g \in C(K)$. Considere

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{A} : f(x) \geq g(x) \text{ para todo } x \in K\}.$$

Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (exercício). Vamos mostrar que $g(p) = \inf_{f \in \mathcal{F}} f(p)$ para cada $p \in K$. Fixe $p \in K$ e seja $\varepsilon > 0$. Como g é contínua, o conjunto

$$F = \{x \in K : g(x) \geq g(p) + \varepsilon\}$$

é fechado. Como K é compacto, g é limitada em K. Seja M tal que $g(x) < M$ para todo $x \in K$. Pelo Lema 7.2.7, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

- $f(p) = g(p) + \varepsilon$;
- $f(x) \geq g(p) + \varepsilon$ para todo $x \in K$;

- $f(x) > M$ para todo $x \in F$.

Como $g(x) < g(p) + \varepsilon$ para todo $x \in K \setminus F$, temos que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in K$. Assim, $f \in \mathcal{F}$ e $f(p) \leq g(p) + \varepsilon$. Como ε é arbitrário, $g(p) = \inf\{f(p) : f \in \mathcal{F}\}$.

Assim, podemos aplicar o Lema 7.2.8 e obtemos o resultado. $\square$

Lema 7.2.10. *Dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $x \in [-1, 1]$, $|p(x) - |x|| < \varepsilon$.*

Teorema 7.2.11 (de Stone-Weierstrass). *Seja (K, d) um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{A} \subset C(K)$ uma álgebra que separa pontos e que contenha as funções constantes. Sejam $f \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $g \in \mathcal{A}$ tal que, para todo $x \in K$, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Demonstração. Note que $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $C(K)$. Assim, se mostrarmos que, dados $f, g \in \mathcal{A}$, $f \wedge g, f \vee g \in \overline{\mathcal{A}}$, teremos o resultado pelo lema 7.2.9. Seja $f \in \mathcal{A}$ tal que $\sup\{|f(x)| : x \in K\} \leq 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, se $p(x)$ é o polinômio dado pelo lema 7.2.10, temos que $||f(x)| - p(f(x))| < \varepsilon$. Como $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra que contém as funções constantes, temos que $p \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$. Assim, como $\overline{\mathcal{A}}$ é fechado, temos que a função dada por $|f(x)|$ para $x \in K$ é um elemento de $\overline{\mathcal{A}}$.

Resolvemos o caso que f é limitada por 1. Mas note que, se $f \in \overline{\mathcal{A}}$ é não nula, então a função

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sup\{|f(y)| : y \in K\}}$$

é tal que $\sup\{|g(x)| : x \in K\} \leq 1$. Assim, a função dada por $|g(x)|$ para $x \in K$ é um elemento de $\overline{\mathcal{A}}$ e, portanto, a função dada por $|f(x)|$ para $x \in K$ também. Ou seja, se $f \in \overline{\mathcal{A}}$, então a função dada por $|f(x)|$ para $x \in K$ também é um elemento de $\overline{\mathcal{A}}$.

Finalmente, dadas $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$. Note que, dado $x \in K$, temos

$$(f \vee g)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$$

$$(f \wedge g)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) - \frac{1}{2}|f(x) - g(x)|$$

Assim, pelo fato de $\overline{\mathcal{A}}$ ser uma álgebra, temos que $f \vee g, f \wedge g \in \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Corolário 7.2.12 (Teorema de Weierstrass). *Toda função contínua definida num subespaço fechado e limitado de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma sequência de polinômios.*

Demonstração. Basta notar que o conjunto dos polinômios satisfaz as hipóteses para $\mathcal{A}$ no teorema anterior. □

Exercícios de 7.2

Exercício 7.2.13. Mostre que se $f, g \in \mathcal{C}(X)$, então $f \wedge g$, $f \vee g \in \mathcal{C}(X)$.

Exercício 7.2.14. Considere $F \subset \mathbb{R}$ com a métrica usual e tal que F seja fechado e limitado.

(a) Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio. Para cada a_i, seja $(q_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de racionais tal que $q_k^i \longrightarrow a_i$. Mostre que $p_k \longrightarrow p$ em $\mathcal{C}(F)$, onde $p_k(x) = q_k^0 + q_k^1 x + \cdots + q_k^n x^n$.

(b) Use o item anterior e fato que $\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}\}$ é enumerável para concluir que $\mathcal{C}(F)$ é separável.

Exercício 7.2.15. Seja (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Considere $LTD(X, Y) = \{f : X \to Y | f$ é contínua e limitada$\}$. Mostre que se Y é completo, então $LTD(X, Y)$ é completo.

7.3 Teoremas de ponto fixo

Definição 7.3.1. Seja X um conjunto não vazio. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma função. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto fixo** de f se $f(x) = x$.

Proposição 7.3.2. *Considere* $[0, 1]$ *com a métrica usual. Então toda* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *contínua admite um ponto fixo.*

Demonstração. Considere $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Note que $g(0) = f(0) \geq 0$. Se $g(0) = 0$, terminamos (já que $f(0) = 0$). Note também que $g(1) \leq 0$ e que, se $g(1) = 0$, terminamos já que $f(1) = 1$. Assim, só nos resta o caso em que $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$. Como g é contínua, temos, pelo Teorema do valor intermediário (3.3.2), que existe $x \in [0, 1]$ tal que $g(x) = 0$. Note que $f(x) = x$. □

Definição 7.3.3. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é uma **contração** se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq k < 1$ e, para quaisquer $x, y \in X$, temos $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Chamamos k de grau da contração f.

A necessidade da existência de tal k vai ser discutida num exemplo abaixo.

Teorema 7.3.4 (do ponto fixo de Banach). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \longrightarrow X$ uma contração. Então existe $x \in X$ ponto fixo de f. Além disso, tal x é o único ponto fixo de f e, dado $x_0 \in X$ qualquer, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n > 0$ é convergente para x.*

Demonstração. Vejamos primeiramente a unicidade. Note que se $k = 0$, então f é constante e, portanto, tem apenas um ponto fixo (que é a própria constante). Então podemos supor $k \neq 0$. Suponha que $x, y \in X$ sejam pontos fixos. Temos que $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Como $0 < k < 1$, temos que $d(x, y) = 0$. Ou seja, $x = y$.

Vamos mostrar que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no enunciado é uma sequência de Cauchy. Comecemos mostrando que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Vamos mostrar isso por indução sobre n. Caso $n = 0$, é imediato. Agora suponha o resultado para n. Vamos mostrar para $n + 1$. Temos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ &\leq kd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq k^{n+1}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$. Vamos estimar a distância entre x_n e x_{n+p}. Temos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + \cdots + k^{n+p-1}d(x_0, x_1) \\ &= k^n(1 + \cdots + k^{p-1})d(x_0, x_1) \\ &= k^n \tfrac{k^n-1}{k-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Assim, como o úlltimo valor tende a 0 quando $n \to +\infty$, temos que $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ se tomarmos $n, m > n_0$ e fazendo $n_0 \longrightarrow \infty$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, seja x o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Exercício 7.3.9, temos que f é contínua. Assim

$$f(x) = f(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_{n+1} = x$$

□

Exemplo 7.3.5. Considere $X = [1, +\infty[$ com a métrica usual (note que X é completo). Seja $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Note que não existe x tal que $x = f(x)$. Note também que, dados $x, y \in X$ com $x > y$, temos que $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$. Note que $(x - y) > 0$ e que $xy - 1 > 0$. Assim, temos que

$$(x - y)(xy - 1) > 0$$

Distribuindo, obtemos:

$$x^2 y - x - xy^2 + y > 0$$

Colocando xy em evidência e notando que $xy > 0$, obtemos:

$$x - \frac{1}{y} - y + \frac{1}{x} > 0$$

Ou seja, que $f(x) - f(y) > 0$. Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} d(f(x), f(y)) & = & |f(x) - f(y)| \\ & = & f(x) - f(y) \\ & \leq & x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \\ & < & x - y \\ & = & d(x, y) \end{array}$$

Ou seja, não é possível supor apenas que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para $x \neq y$ no teorema anterior. Mas se X é compacto, nem tudo está perdido, como no próximo teorema.

Proposição 7.3.6. *Seja (X, d) compacto e seja $f : X \longrightarrow X$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ se $x \neq y$. Então f tem um único ponto fixo.*

Demonstração. A unicidade é análoga ao Teorema 7.3.4. Para a existência, considere $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = d(x, f(x))$$

Note que g é contínua (exercício) e que $g(x) \geq 0$. Como X é compacto, existe $a = \min\{g(x) : x \in X\}$. Seja x tal que $g(x) = a$. Vamos mostrar que $f(x) = x$. Suponha que não, então

$$d(f(x), f(f(x))) < d(x, f(x)).$$

Mas note que

$$g(f(x)) = d(f(x), f(f(x))) < d(x, f(x)) = a = \min\{g(x) : x \in X\}$$

contradição. $\square$

Pode parecer que o último resultado deveria seguir do Teorema do ponto fixo de Banach - isto é, que uma função satisfazendo a hipótese da proposição, ela deveria ser de fato uma contração (pela compacidade). Isso não é verdade, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 7.3.7. Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Note que, para quaisquer x, y distintos, temos

A ultima desigualdade segue do fato que pelo menos entre x e y é estritamente não nulo.

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}| \\ & = & \frac{|(1+y)-(1+x)|}{(1+x)(1+y)} \\ & = & \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \\ & < & |x-y| \end{array}$$

Ou seja, tal função satisfaz a hipótese da proposição anterior. Por outro lado, f não é uma contração: dado qualquer $k \in]0,1[$, sejam x, y de forma que $(1+x)(1+y) \leq \frac{1}{k}$ (assim, $\frac{1}{(1+x)(1+y)} \geq k$). Assim, temos que

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \geq k|x-y|$$

assim a f não pode ser uma contração.

Exercícios de 7.3

Exercício 7.3.8. Mostre que se $f : X \longrightarrow X$ tem ponto fixo, então $f^2 = f \circ f$ também tem.

Exercício 7.3.9. Mostre que toda contração é uma função contínua.

Exercício 7.3.10. Mostre que a hipótese de que X seja completo é necessária no Teorema 7.3.4.

Exercício 7.3.11. Seja (X, d) completo e seja $f : X \longrightarrow X$ contínua. Suponha que, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n+1} = f(x_n)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja de Cauchy. Mostre que f tem ponto fixo.

Exercício 7.3.12. Seja K espaço compacto. Sejam $f : K \longrightarrow K$ e $g : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funções contínuas tais que, se $x \neq f(x)$, então $d(x, f(x)) < g(x)$ e, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in K$ tal que $g(x) < \varepsilon$. Mostre que f tem ponto fixo.

7.4 Duas curiosidades

Começamos essa seção com uma espécie de volta do Teorema do ponto fixo de Banach:

Teorema 7.4.1. *Seja X um conjunto qualquer. Suponha que $f : X \to X$ seja uma função tal que exista $a \in X$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a é o único ponto fixo de f^n. Então para cada $k \in]0,1[$ existe uma métrica completa d sobre X onde f é uma contração de grau k.*

Demonstração. Considere

$$A = \{x \in X : \exists n\ f^n(x) = a\}.$$

Vamos definir uma relação de equivalência $\equiv$ sobre $X \backslash A$ dada por $x \equiv y$ se existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $f^n(x) = f^m(y)$. Para cada classe de esquivalência, fixe um representante para a classe. Fixe $x \in X \setminus A$. Suponha que $f^k(x) = f^p(x)$. Note que isso implica que $k = p$. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $k < p$. Então

$$f^{p-k} f^k(x) = f^p(x) = f^k(x)$$

Ou seja, f^k é um ponto fixo de f^{p-k} e, portanto, $f^k(x) = a$. Assim, $x \in A$, contradição. Suponha que $y \in X$ sejam tais que $f^n(x) = f^m(y)$ e que $f^{n'}(x) = f^{m'}(y)$. Então

$$\begin{array}{rcl} f^{n+m'}(x) & = & f^{m+m'}(y) \\ & = & f^{m+n'}(x) \end{array}$$

Pela observação acima, $n + m' = m + n'$. Ou seja, $n - m = n' - m'$.

Defina $d(a, a) = 0$, Dado $x \in A$, seja

$$n = \min\{m \in \mathbb{N} : f^m(x) = a\}$$

Defina $d(a, x) = k^{-n}$. Dado $x \in X \setminus A$, seja $\tilde{x}$ o representante da classe de x fixado acima. Defina $d(a, x) = k^{n-m}$ onde $f^n(x) = f^m(\tilde{x})$ (note que isso está bem definido pelo comentário acima). Finalmente, dfefina

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, a) + d(y, a) & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que d é uma métrica (exercício). Note que d é completa (exercício - dica: mostre que as únicas sequências de Cauchy que existem ou convergem para a, ou são quase constantes). Resta a parte sobre ser uma contração. Seja $x \in X$ com $x \neq a$ (no caso $x = a$ não há nada a ser mostrado). Se $x \in A$, temso

$$d(f(x), f(a)) = d(f(x), a) \leq k^{-n} = kk^{-n-1} = kd(x, a)$$

Enquanto que, se $x \notin A$, temos

$$d(f(x), f(a)) = d(f(x), a) = k^{n-m} = kk^{n-(m+1)} = kd(x, a)$$

já que $x \equiv f(x)$. O caso geral segue da definição de d. □

Dizemos que um espaço métrico X é de Blumberg se, para toda função $f : X \to \mathbb{R}$ existe $D \subset X$ denso tal que $f \restriction D$ é contínua.

Teorema 7.4.2. *Todo espaço de Blumberg é de Baire.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe uma família $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos densos e um aberto V não vazio tais que $V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Considere $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } k = \max\{x \in V \cap \bigcap_{n=0}^{k} A_n\} + 1 \\ 0 & \text{se não existe o máximo acima} \end{cases}$$

Vamos mostrar que não existe denso onde tal função seja contínua. Seja D denso. Seja $x \in D \cap V \cap A_0$. Vamos mostrar que f não é contínua em x.. Note que $f(x) \geq 1$. Seja W um aberto tal que $x \in W$. Seja $y \in D \cap V \cap W \cap A_0 \cap \cdots A_{f(x)}$. Note que $f(y) \geq f(x) + 1$ - ou seja, f não é contínua no ponto x. □

A volta do teorema acima vale para espaços métricos (mas não em geral).

7.5 Paracompacidade

Vamos apresentar nesta seção um conceito topológico que é comum a todos os espaços métricos (ou seja, você pode substituir os termos "espaço topológico" por "espaço métrico", mas a situação fica um tanto trivial).

Definição 7.5.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que uma família $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ é **localmente finita** se, para todo $x \in X$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $\{F \in \mathcal{F} : V \cap F \neq \emptyset\}$ é finito.

Definição 7.5.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um **refinamento** para $\mathcal{C}$ se $\mathcal{F}$ é uma cobertura e para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $F \subset C$.

Definição 7.5.3. Dizemos que (X, τ) é um **espaço paracompacto** se toda cobertura aberta admite refinamento aberto localmente finito.

Observação 7.5.4. Note que todo espaço compacto é paracompacto.

A ideia do próximo resultado é dizer que, para famílias localmente finitas, união dos fechos é o fecho da união:

Lema 7.5.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma família localmente finita. Então, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$. Em particular, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ é fechado.*

Demonstração. Note que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}} = \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$. Por outro lado, sejam $x \in \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F}$ e A aberto tal que $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que $x \in \overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F}$ pela definição de $\mathcal{F}_0$. Pelo fato de $\mathcal{F}_0$ ser finito, temos $\overline{\bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_0} \overline{F} \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$. Logo, $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$ como queríamos. $\square$

Vamos terminar esta seção mostrando que todo espaço métrico é paracompacto. A demonstração que apresentaremos é baseada na feita em [1][1]. Antes, precisamos de um definição e um resultado bastante conhecido de teoria dos conjuntos:

Definição 7.5.6. Dizemos que $\leq$ é uma **boa ordem** sobre X se todo subconjunto não vazio de X admite mínimo (segundo $\leq$).

O seguinte fato é equivalente ao axioma da escolha (em alguns livros modernos, ele inclusive fica no lugar do axioma da escolha na lista dos axiomas básicos).

Teorema 7.5.7 (Princípio da boa ordem). *Todo conjunto não vazio admite uma boa ordem.*

[1]Note que é um artigo de uma única página, que apresenta uma nova demonstração para um teorema já conhecido anteriormente.

Agora passamos à demonstração do teorema:

Teorema 7.5.8. *Todo espaço métrico é paracompacto.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathcal{C}$. Para cada $C \in \mathcal{C}$, vamos definir uma família $(D_n(C))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ por indução sobre n. Para cada $C \in \mathcal{C}$, defina $D_1(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2}}(x)$, onde

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\} \text{ e } B_{\frac{3}{2}}(x) \subset C\}$$

A é o conjunto dos pontos x's tais que, além de C ser o "primeiro" aberto da cobertura a contê-lo, x cabe com certa folga em C.
Formalmente, a cada passo n e aberto C, teríamos um A_n^C, mas isso só aumentaria a quantidade de índices aqui.

Suponha definidos $D_k(C)$ para todo $k < n$ e todo $C \in \mathcal{C}$. Defina $D_n(C) = \bigcup_{x\in A} B_{\frac{1}{2^n}}(x)$, onde

$$A = \{x \in C : C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}, x \notin D_k(C')$$

$$\text{para qualquer } k < n \text{ e } C' \in \mathcal{C} \text{ e } B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C\}$$

Vamos mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é o refinamento desejado. Primeiramente, note que, de fato, $D_n(C) \subset C$ diretamente da definição de cada $D_n(C)$. Vejamos que, de fato, isso forma uma cobertura. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in C'\}$. Assim, existe algum $n \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{3}{2^n}}(x) \subset C$. Desta forma, $x \in D_n(C)$ ou $x \in D_k(C')$ para algum $k \leq n$ e $C' \in \mathcal{C}$ - de qualquer forma, x foi coberto.

Resta mostrar que $\{D_n(C) : n \in \mathbb{N}_{>0}, C \in \mathcal{C}\}$ é localmente finito. Seja $x \in X$. Seja $C = \min\{C' \in \mathcal{C} : x \in D_n(C')$ para algum $n \in \mathbb{N}\}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ de forma que $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, onde n é tal que $x \in D_n(C)$. Note que é suficiente mostrarmos que:

(a) Se $i \geq n+j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ não intercepta $D_i(C')$ para qualquer $C' \in \mathcal{C}$.

(b) Se $i < n + j$, então $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x)$ intercepta $D_i(C')$ para, no máximo, um $C' \in \mathcal{C}$.

Vamos provar (a). Como $n \leq i$, toda bola utilizada na criação de $D_i(C')$ tem centro fora de $D_n(C)$. Como $B_{\frac{1}{2^j}}(x) \subset D_n(C)$, temos que $d(x, y) \geq \frac{1}{2^j}$ para todo y centro de alguma bola utilizada na criação de $D_i(C')$. Como $i \geq j + 1$ e $n + j \geq j + 1$, temos que $B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y) = \emptyset$. De fato, se existisse $z \in B_{\frac{1}{2^{n+j}}}(x) \cap B_{\frac{1}{2^i}}(y)$, teríamos:

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & \leq & d(x,z)+d(z,y) \\ & < & \frac{1}{2^{n+j}}+\frac{1}{2^i} \\ & \leq & \frac{1}{2^{j+1}}+\frac{1}{2^{j+1}} \\ & = & \frac{1}{2^j} \end{array}$$

o que é uma contradição.

Agora vamos provar (b). Sejam $p \in D_i(E)$ e $q \in D_i(F)$ com $E \prec F$. Vamos mostrar que $d(p,q) \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. Note que isso é suficiente. Como $p \in D_i(E)$, existe y tal que $p \in B_{\frac{1}{2^i}}(y) \subset D_i(E)$ e $B_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset E$. Como $q \in D_i(F)$, existe z tal que $q \in B_{\frac{1}{2^i}}(z) \subset D_i(F)$. Note que $z \notin E$ (pois $E \prec F$). Logo, $d(y,z) \geq \frac{3}{2^i}$. Logo, temos

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{2^i} & \leq & d(y,z) \\ & \leq & d(y,p)+d(p,q)+d(q,z) \\ & \leq & \frac{2}{2^i}+d(p,q) \end{array}$$

Assim, $d(p,q) \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^{n+j-1}}$. □

Alongamentos

Alongamento 7.5.9. Se $\mathcal{F}$ é uma família localmente finita, então $\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$ também é.

Alongamento 7.5.10. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura para X. Seja $\mathcal{A}$ um refinamento de $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{B}$ um refinamento de $\mathcal{A}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é um refinamento de $\mathcal{A}$.

7.6 Partição da unidade

Definição 7.6.1. Seja (X,d) um espaço métrico. Uma família $(f_s)_{s\in S}$ de funções contínuas de X em $[0,1]$ é chamada de uma **partição da unidade** se $\sum_{s\in S} f_s(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Observação 7.6.2. Se $(f_s)_{s\in S}$ é uma partição da unidade, então, para todo $x \in X$, $\{s \in S : f_s(x) \neq 0\}$ é enumerável.

Definição 7.6.3. Dizemos que uma partição da unidade $(f_s)_{s\in S}$ é **localmente finita**, se $\{f_s^{-1}[]0,1]] : s \in S\}$ é localmente finito.

Observação 7.6.4. Nesse caso, $\{f_s^{-1}[]0,1]] : s \in S\}$ é uma cobertura aberta e $\sum_{s \in S} f_s(x)$ é, na verdade, uma soma finita para cada ponto fixado.

Definição 7.6.5. Uma partição da unidade $(f_s)_{s \in S}$ é dita **subordinada** a uma cobertura $\mathcal{C}$ se para todo $s \in S$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f_s^{-1}[]0,1]] \subset C$.

Antes de provar o resultado principal, precisamos de alguns resultados auxiliares:

Proposição 7.6.6. *Dados F e G subespaços fechados disjuntos de um espaço X, existe $f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.*

Este é um caso particular do resultado de topologia geral conhecido como Lema de Urysohn.

Demonstração. Considere f como

$$f(x) = \frac{d(x,F)(1 - d(x,G))}{d(x,F) + d(x,G)}.$$

□

O próximo lema nos dá algum controle sobre o índice dos refinamentos:

Lema 7.6.7. *Para toda cobertura aberta $\{U_s : s \in S\}$, existe cobertura fechada localmente finita $\{F_s : s \in S\}$ tal que para todo $s \in S$, $F_s \subset U_s$.*

Demonstração. Seja $\{U_s : s \in S\}$ cobertura aberta. Note que existe uma cobertura aberta $\mathcal{W}$ tal que $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ refina $\{U_s : s \in S\}$. Seja $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ refinamento de $\mathcal{W}$ localmente finito. Para cada $t \in T$, seja $s(t) \in S$ tal que $\overline{A_t} \subset U_{s(t)}$. Para cada $s \in S$, seja $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$. Como $\{A_t : t \in T\}$ é localmente finito, temos que F_s é fechado. Note, também, que $F_s \subset U_s$. Resta mostrar que $\{F_s : s \in S\}$ é localmente finito (é cobertura, pois $(A_t)_{t \in T}$ é cobertura). Seja $x \in X$. Como $\{\overline{A_t} : t \in T\}$ é localmente finito, existe A aberto tal que $x \in A$ e $T' = \{t \in T : \overline{A_t} \cap A \neq \emptyset\}$ é finito. Note que se mostrarmos que

$$\{s(t) : t \in T'\} \supset \{s \in S : F_s \cap A \neq \emptyset\}$$

teremos o resultado, já que T' é finito. Assim, seja $s \in S$ tal que $F_s \cap A \neq \emptyset$. Como $F_s = \bigcup_{s(t)=s} \overline{A_t}$, temos que existe t tal que $s(t) = s$ tal que $A \cap \overline{A_t} \neq \emptyset$. Assim, $t \in T'$. □

Agora vamos ao principal teorema da seção:

Teorema 7.6.8. *Toda cobertura aberta de X admite partição da unidade subordinada a ela localmente finita.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ cobertura aberta para X. Seja $(U_s)_{s\in S}$ refinamento aberto localmente finito (decorrente da paracompacidade) para $\mathcal{A}$. Seja $(F_s)_{s\in S}$ refinamento fechado localmente finito de $(U_s)_{s\in S}$ (que existe pelo lema anterior). Assim, pelo Lema **??**, para cada $s \in S$, existe $g_s : X \to [0,1]$ contínua tal que $g_s[X \setminus U_s] = \{0\}$ e $g_s[F] = \{1\}$.

Defina $g(x) = \sum_{s\in S} g_s(x)$. Como $(U_s)_{s\in S}$ é localmente finita, g está bem definida e é contínua (dado $x \in X$ qualquer, existe um número finito de abertos de $(U_s)_{s\in S}$ tais que $x \in U_s$ e assim g é localmente uma soma finita de funções contínuas). Para cada $s \in S$, defina $f_s(x) = \frac{g_s(x)}{g(x)}$. Note que $(f_s)_{s\in S}$ é a partição desejada. $\square$

Exercícios

Exercício 7.6.9. Mostre que existe uma partição da unidade $(f_i)_{i\in I}$ sobre $\mathbb{R}$ onde para cada $i \in I$, $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é compacto.

Dicas de alguns exercícios

1.1.23 Mostre que $d(a,b) \leq d(b,a)$.
Pode ser útil também que $d(a,a) \leq d(a,b) + d(a,b)$.

1.1.24 Ver Exemplo 1.1.5.

1.2.7 Considere a métrica discreta.

1.3.10

c Considere $\varepsilon = 1$ e dado $\delta > 0$, tome $x = \min\{\delta, 1\}$, $y = \frac{x}{2}$.

2.2.16 Use que entre dois reais distintos sempre existe um racional.

2.5.7 Use que as métricas são equivalentes se, e somente se, tem as mesmas sequências convergentes.

3.1.22 Procure por exemplos em $\mathbb{R}^2$.

5.1.11 Comece com um aberto que contenha 1, pegue x menor que 1 no aberto e que esteja em S. Estenda a cobertura que atesta que $x \in S$ e estenda para cobrir 1.

5.2.13 Mostre que $\overline{A}$ é totalmente limitado. Dado $\varepsilon > 0$, considere $\bigcup_{x \in \overline{A}} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A$ e cubra essa parte do conjunto com bolas finitas bolas de raio ε.

5.2.15 Mostre que $\overline{A}$ é limitado se A é limitado e use a caracterização de compacidade.

7.3.10 Considere $f(x) = \frac{x}{2}$.

Resolução de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] M. E. Rudin. A new proof that metric spaces are paracompact. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20:603, 1969.