Prova 2 - Espaços métricos - 16/10/2019

Nome: **NUSP:**

Pseudônimo:

1. Seja X espaço métrico e C seu completamento.

   (a) Se F é fechado em X, então F é fechado em C?

   (b) Se C é compacto, X é totalmente limitado?

2. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\pi_1[A]$ e $\pi_2[A]$ são completos. A é completo?

3. Suponha (X, d) espaço compacto. Dado $x \in X$, mostre que $X \setminus \{x\}$ é compacto se, e somente se, x é isolado (isto é, $\{x\}$ é aberto).

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função contínua. Suponha que não existam $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $f_n[B_r(x)] = \{0\}$. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(x, y) < r$ e $f_n(y) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Na primeira prova, mostramos que (num espaço métrico (X, d)), se $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto tal que existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $d(d_n, d_m) > r$ para todo d_n, d_m distintos, então D não tem pontos de acumulação. Vale a volta? Quer dizer, se $\inf\{d(d_n, d_m) : d_n \neq d_m\} = 0$, necessariamente D tem algum ponto de acumulação? E se X for compacto?