Prova 1 - Espaços métricos - 11/09/2019

Nome: **NUSP:**

- Responda às questões junto aos respectivos enunciados. Utilize os versos das folhas como rascunho. Justifique suas respostas.

1. Fixe um alfabeto (por exemplo, "a, b, c, ..., z"). Considere M o conjunto de todas as palavras (finitas) deste alfabeto. Por exemplo, "arara", "pato" etc. Dadas $x_1...x_m, y_1...y_n \in M$, defina $d(x_1...x_m, y_1...y_n)$ como a quantidade de j's tais que $x_j \neq y_j$. Por exemplo, $d(pato, arara) = 5$ enquanto $d(ta, t) = 1$. Mostre que d é uma métrica sobre M.

2. Seja (X, d) espaço métrico. Suponha que $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja um conjunto tal que existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ de forma que para quaisquer n, m distintos, $d(d_n, d_m) > r$. Mostre que D não admite pontos de acumulação.

3. Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \to Y$ contínua. Seja $A \subset Y$. Suponha que exista $x \in X$ tal que $f(x) \notin \partial A$. Mostre que existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $f[B_r(x)] \cap \partial A = \emptyset$.

4. Seja (X, d) métrico conexo tal que existem $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e $x \in X$ tais que $\{y \in X : d(x, y) = r\} = \emptyset$. Mostre que (X, d) é limitado.

5. Existe uma métrica d sobre $\mathbb{R}$, equivalente à usual, de forma que $d(x, y) \in \mathbb{Q}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$?