Lista de 01/10/2019

Definição 0.1. Dizemos que $I \subset \mathbb{Z}$ não vazio é um **ideal** se

(a) I é fechado para soma (*i.e.*, dados $a, b \in I$, temos que $a + b \in I$).

(b) para todo $\lambda \in \mathbb{Z}$ e todo $a \in I$, temos que $\lambda a \in I$.

1 Mostre que os seguintes conjuntos são ideais: $\mathbb{Z}$, $\{0\}$. Estes são os ideais triviais.

2 Ficando um pouco mais interessante, mostre que, dado $z \in \mathbb{Z}$, $I_z = \{kz : k \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal.

3 Vamos mostrar uma espécie de volta do item anterior. Suponha I um ideal tal que $I \neq \{0\}$.

   (a) Mostre que existe $a \in I$ tal que $a > 0$;
   (b) Considere $m = \min\{x \in I : x > 0\}$ - podemos fazer isso, certo?
   (c) Dado $k \in \mathbb{Z}$, mostre que $km \in I$. Note que isso implica que $I_m \subset I$;
   (d) Mostre que se $a \in I$, então $a - mq \in I$ para qualquer $q \in \mathbb{Z}$;
   (e) Seja $a \in I$. Mostre que $m|a$. Dica: peça ajuda a um grego.
   (f) Conclua que $I = I_m$.

   Daqui para frente, fixe $a, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$.

4 Considere $I = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Mostre que I é um ideal;
   (b) Note que $a, b \in I$;
   (c) Mostre que $I = I_d$ onde $d = \min\{x \in I : x > 0\}$. Dica: não faça contas. Talvez leia o exercício anterior novamente.

   Nos próximos, use sempre o d definido acima.

5 Seja λ divisor positivo de a e b.

   (a) Mostre que $a, b \in I_\lambda$;
   (b) Mostre que $ax, by \in I_\lambda$;
   (c) Mostre que $d \in I_\lambda$;
   (d) Conclua que $\lambda \leq d$.

6 Mostre que d divide a. Dica: $a \in I_d$. Note que argumento análogo mostra que d divide b.

7 Mostre que d é o maior entre os divisores comuns de a e b.

8 Fique feliz.