Lista de 17/10/2019

Fixe p primo e $a \in \mathbb{N}$ tais que p não divide a.

1 Mostre que se λ é tal que $1 \leq \lambda < p$, vale a seguinte lei de cancelamento: $\lambda x \equiv_p \lambda y$ implica $x \equiv_p y$.

2 Note que precisamos que p seja primo no item anterior - dê um contraexemplo.

3 Note que, dado n tal que $1 \leq n < p$, não é verdade que $an \equiv_p 0$.

4 Note que o item anterior implica que an é congruente a um elemento de $\{1, 2, ..., p-1\}$ mod p.

5 Dados n, m distintos tais que $1 \leq n, m < p$, mostre que não é verdade que $na \equiv_p ma$.

6 Note que $1a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv_p 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$. Dica: note que cada um dos fatores da esquerda é um fator da direita e observe as quantidades de fatores.

7 Note como o argumento do item anterior é bacana.

8 Conclua que $a^{p-1} \equiv_p 1$.

9 Parabéns, você provou o Pequeno Teorema de Fermat!