1 Seja X espaço métrico. Sejam F, G subset X.

(a) Mostre que a afirmação "se F e G são fechados disjuntos, então $d(F, G) > 0$" pode ser falsa.

(b) Mostre que se pedirmos que F e G são compactos, então o resultado do item anterior vale.

(c) Note que então, se X é compacto, o resultado do primeiro item vale.

Na aula, provamos que, em $\mathbb{R}^n$, os fechados limitados são compactos. Na prática, isso implica que para espaços vetoriais normados de dimensão finita, o fecho da bola unitária é compacto. Vejamos abaixo que isso caracteriza o fato da dimensão ser finita. Isto é, vamos mostrar que se o fecho da bola unitária é compacto, então a dimensão é finita.

2 Considere $U = \overline{B_1(0)}$. Suponha U compacto.

(a) Mostre que existem $x_1, ..., x_n \in U$ tais que $\{B_{\frac{1}{2}}(x_i) : i = 1, ..., n\}$ forma uma cobertura para U.

(b) Seja S o subespaço gerado por $\{x_1, ..., x_n\}$. Note que S é fechado e de dimensão finita.

(c) Se mostrarmos que $B_1(0) \subset S$, terminamos (certo?)

(d) Note que, dado $a \in B_1(0)$, existe x_i tal que $d(a, x_i) < \frac{1}{2}$.

(e) Note que, dado $a \in B_1(0)$, existem $s \in S$ e $w \in B_{\frac{1}{2}}(0)$ tais que $a = s + w$.

(f) Note que $w = \frac{1}{2}2w$ e que $2w \in B_1(0)$. Assim, use o item anterior para escrever $a = s' + w'$, de forma que $s' \in S$ e $w' \in B_{\frac{1}{4}}(0)$.

(g) Generalize e conclua que existem $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $a = s_n + w_n$, cada $s_n \in S$ e cada $w_n \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(0)$.

(h) Mostre que $s_n \to a$. Conclua que $a \in S$.

(i) Note que acabamos.