Introdução aos jogos combinatórios

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Sobre o curso

Vamos seguir (bem) de perto o seguinte livro:

Sobre o curso

Vamos seguir (bem) de perto o seguinte livro:

Lessons in play - An introduction to combinatorial game theory de Albert, Nowakowski, Wolfe.

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Cap. 0

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);
- 2 jogadores se alternam a cada rodada;

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);
- 2 jogadores se alternam a cada rodada;
- informação completa;

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);
- 2 jogadores se alternam a cada rodada;
- informação completa;
- Número finito de opções por jogada;

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);
- 2 jogadores se alternam a cada rodada;
- informação completa;
- Número finito de opções por jogada;
- sem fatores externos (sorteios etc.).

Sobre quais jogos vamos trabalhar

Vamos ver algumas técnicas para analisar certos tipos de jogos. Em geral, esse jogos terão as seguintes características:

- pura estratégia (sem habilidades etc.);
- 2 jogadores se alternam a cada rodada;
- informação completa;
- Número finito de opções por jogada;
- sem fatores externos (sorteios etc.).

No futuro, podemos restringir ainda mais a classe dos jogos com a qual trabalharemos.

Exemplos

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

- batalha naval;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

- batalha naval;
- dominó;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

- batalha naval;
- dominó;
- gamão;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

- batalha naval;
- dominó;
- gamão;
- truco;

Exemplos

Exemplos de jogos que satisfazem o que listamos até agora:

- xadrez;
- jogo da velha;
- damas.

Exemplos de jogos que **não** satisfazem o que listamos:

- batalha naval;
- dominó;
- gamão;
- truco;
- futebol.

Um primeiro exemplo

Nosso primeiro exemplo (que vai ser bem útil) é o jogo DOMINANDO (DOMINEERING):

Um primeiro exemplo

Nosso primeiro exemplo (que vai ser bem útil) é o jogo DOMINANDO (DOMINEERING): dois jogadores, VERTICAL e HORIZONTAL se alternam jogando num tabuleiro.

Um primeiro exemplo

Nosso primeiro exemplo (que vai ser bem útil) é o jogo DOMINANDO (DOMINEERING): dois jogadores, VERTICAL e HORIZONTAL se alternam jogando num tabuleiro. O tabuleiro é quadriculado e o jogador VERTICAL sempre coloca uma peça de dominó ocupando duas casas consecutivas, alinhadas verticalmente.

Um primeiro exemplo

Nosso primeiro exemplo (que vai ser bem útil) é o jogo Dominando (Domineering): dois jogadores, Vertical e Horizontal se alternam jogando num tabuleiro. O tabuleiro é quadriculado e o jogador Vertical sempre coloca uma peça de dominó ocupando duas casas consecutivas, alinhadas verticalmente. Já o jogador Horizontal, joga também uma peça de dominó também ocupando duas casas consecutivas, mas alinhadas horizontalmente.

Um primeiro exemplo

Nosso primeiro exemplo (que vai ser bem útil) é o jogo DOMINANDO (DOMINEERING): dois jogadores, VERTICAL e HORIZONTAL se alternam jogando num tabuleiro. O tabuleiro é quadriculado e o jogador VERTICAL sempre coloca uma peça de dominó ocupando duas casas consecutivas, alinhadas verticalmente. Já o jogador HORIZONTAL, joga também uma peça de dominó também ocupando duas casas consecutivas, mas alinhadas horizontalmente.

O primeiro que não tiver casas disponíveis para jogar, perde.

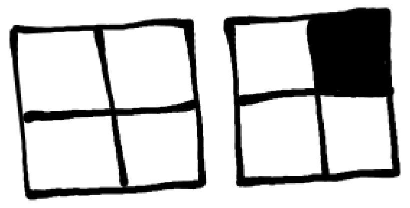
Jogue aqui com um amigo

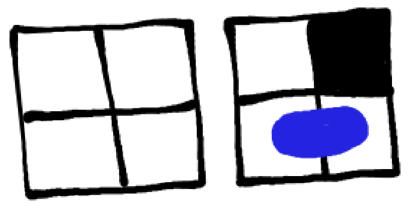
`https://www.jasondavies.com/domineering/`

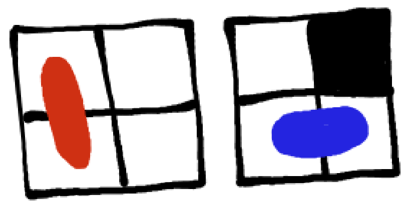
Ou aqui sozinho

http://www.papg.com/show?1TX6

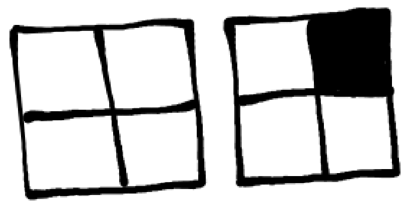
Perdendo



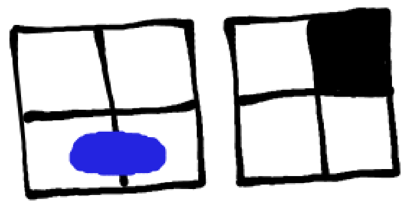


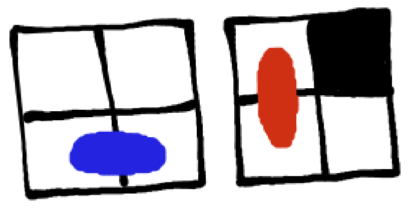


Ganhando

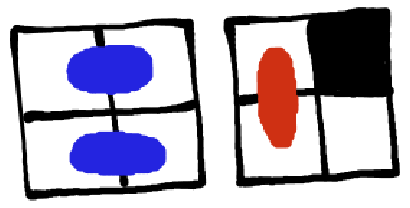


Ganhando





Ganhando



Algumas características do Dominando

Algumas características do Dominando

- Não admite empates;

Algumas características do Dominando

- Não admite empates;
- Último jogador a jogar, vence;

Algumas características do Dominando Cap. 0

- Não admite empates;
- Último jogador a jogar, vence;
- Não há repetição de jogadas;

Algumas características do Dominando Cap. 0

- Não admite empates;
- Último jogador a jogar, vence;
- Não há repetição de jogadas;
- Há um número pré determinado máximo de rodadas;

Algumas características do Dominando

- Não admite empates;
- Último jogador a jogar, vence;
- Não há repetição de jogadas;
- Há um número pré determinado máximo de rodadas;
- As opções de jogadas entre os jogadores são distintas.

Jogos a serem considerados aqui

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos.

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita.

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O “modo normal” (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence.

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor.

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère*

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O “modo normal” (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère* (a menos de menção contrária, estaremos sempre pensando nossos jogos no modo normal).

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère* (a menos de menção contrária, estaremos sempre pensando nossos jogos no modo normal).

Outra característica de DOMINANDO é que as jogadas não se repetem (não entra em *looping*).

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère* (a menos de menção contrária, estaremos sempre pensando nossos jogos no modo normal).

Outra característica de DOMINANDO é que as jogadas não se repetem (não entra em *looping*). E, mesmo antes do jogo começar, podemos dar um número máximo de jogadas possíveis.

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère* (a menos de menção contrária, estaremos sempre pensando nossos jogos no modo normal).

Outra característica de DOMINANDO é que as jogadas não se repetem (não entra em *looping*). E, mesmo antes do jogo começar, podemos dar um número máximo de jogadas possíveis. Jogos assim são chamados de "jogos curtos".

Jogos a serem considerados aqui

Normalmente, os jogos aqui considerados terão esta forma geral: os jogadores se alternam até que um deles não tenha mais movimentos válidos. O critério de vitória será apenas sobre a última jogada feita. O "modo normal" (normal play) é como foi feito no DOMINANDO: o último a jogar, vence. Uma variação comum é simplesmente inverter o critério de vitória: podemos declarar que o último a jogar é o perdedor. Chamamos essa variação de *misère* (a menos de menção contrária, estaremos sempre pensando nossos jogos no modo normal).

Outra característica de DOMINANDO é que as jogadas não se repetem (não entra em *looping*). E, mesmo antes do jogo começar, podemos dar um número máximo de jogadas possíveis. Jogos assim são chamados de "jogos curtos". Em geral, iremos trabalhar com jogos desta forma.

Parcialidade

Outra característica do Dominando é que, dada uma configuração inicial, não é verdade que os jogadores tenham ambos as mesmas opções.

Parcialidade

Outra característica do DOMINANDO é que, dada uma configuração inicial, não é verdade que os jogadores tenham ambos as mesmas opções. Jogos como este são chamados de **partizan**.

Parcialidade

Outra característica do Dominando é que, dada uma configuração inicial, não é verdade que os jogadores tenham ambos as mesmas opções. Jogos como este são chamados de **partizan**.

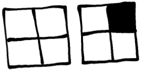
Jogos em que ambos os jogadores têm as mesmas opções são chamados de **imparciais**.

Parcialidade

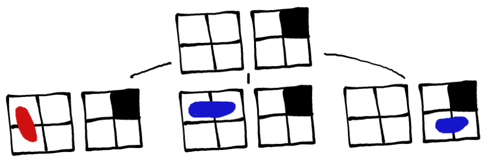
Outra característica do DOMINANDO é que, dada uma configuração inicial, não é verdade que os jogadores tenham ambos as mesmas opções. Jogos como este são chamados de **partizan**.

Jogos em que ambos os jogadores têm as mesmas opções são chamados de **imparciais**. Podemos definir uma versão imparcial de DOMINANDO (chamada de CRAM) simplesmente dizendo que cada jogador pode escolher se joga horizontalmente ou verticalmente a cada rodada.

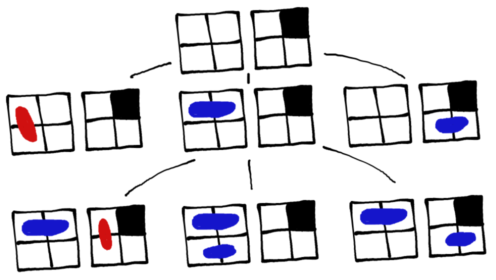
Exibindo a árvore



Exibindo a árvore



Exibindo a árvore



Mas joga duas vezes seguidas?

- Note que não exibimos todas as possibilidades;

Mas joga duas vezes seguidas?

- Note que não exibimos todas as possibilidades;
- Os dois nós da direita inferior mostram o jogador Horizontal jogando duas vezes seguidas.

Mas joga duas vezes seguidas?

- Note que não exibimos todas as possibilidades;
- Os dois nós da direita inferior mostram o jogador Horizontal jogando duas vezes seguidas. Pense cada nó como sendo uma partida com aquela condição inicial - sem dizer de quem é a vez (ou seja, cada nó representa uma nova partida).

Mas joga duas vezes seguidas?

- Note que não exibimos todas as possibilidades;
- Os dois nós da direita inferior mostram o jogador HORIZONTAL jogando duas vezes seguidas. Pense cada nó como sendo uma partida com aquela condição inicial - sem dizer de quem é a vez (ou seja, cada nó representa uma nova partida). Isso vai ajudar no futuro quando quisermos "juntar" árvores.

Algumas heurísticas

Cap. 1

Vamos apresentar algumas ideias gerais que podem ser usadas na prática.

Guloso

Guloso

A cada rodada, tentar o melhor resultado possível.

Guloso

A cada rodada, tentar o melhor resultado possível.

Uma primeira dificulade é como medir qual o melhor resultado? Pontos? Piores escolhas para o adversário?

Um exemplo

Um exemplo

Jogo das jujubas:

Um exemplo

Jogo das jujubas:

Em cada rodada, cada jogador pega quantas jujubas quiser, desde que todas da mesma cor.

Um exemplo

Jogo das jujubas:

Em cada rodada, cada jogador pega quantas jujubas quiser, desde que todas da mesma cor.

Ganha quem tiver pegado mais jujubas até o final.

Um exemplo

Jogo das jujubas:

Em cada rodada, cada jogador pega quantas jujubas quiser, desde que todas da mesma cor.

Ganha quem tiver pegado mais jujubas até o final.

O algoritmo guloso funciona: sempre escolha a cor com mais jujubas disponíveis e pegue todas.

Adaptando um pouco

Adaptando um pouco

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo: QUADRADINHOS (DOTS & BOXES).

Adaptando um pouco

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo:
QUADRADINHOS (DOTS & BOXES).

O tabuleiro consiste em diversos pontos num grid (geralmente quadrado).

Adaptando um pouco

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo: QUADRADINHOS (DOTS & BOXES).

O tabuleiro consiste em diversos pontos num grid (geralmente quadrado). Os jogadores se alternam conectando dois pontos consecutivos horizontalmente ou verticalmente.

Adaptando um pouco

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo: QUADRADINHOS (DOTS & BOXES).

O tabuleiro consiste em diversos pontos num grid (geralmente quadrado). Os jogadores se alternam conectando dois pontos consecutivos horizontalmente ou verticalmente. Quando se completa um quadradinho, ganha-se um ponto e joga-se de novo.

Adaptando um pouco

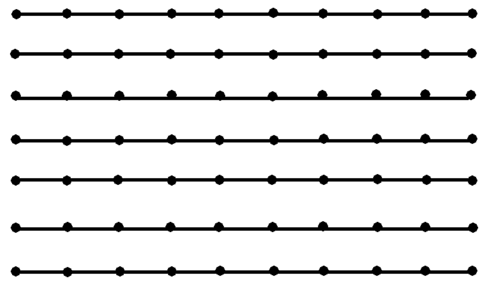
Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo: QUADRADINHOS (DOTS & BOXES).

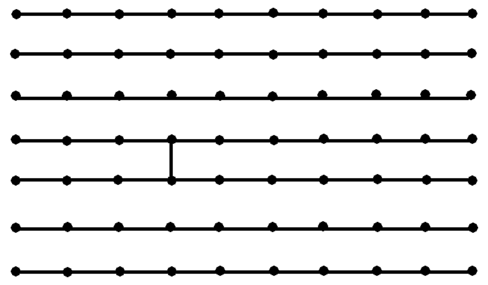
O tabuleiro consiste em diversos pontos num grid (geralmente quadrado). Os jogadores se alternam conectando dois pontos consecutivos horizontalmente ou verticalmente. Quando se completa um quadradinho, ganha-se um ponto e joga-se de novo. Quem tiver mais pontos no final (quando não tiver mais espaço para linhas), vence.

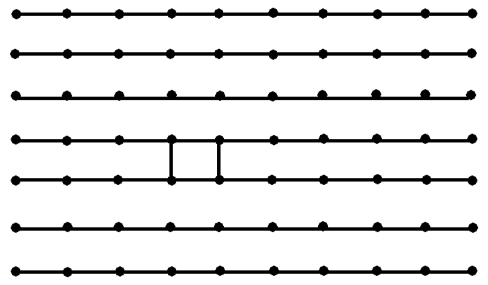
Você pode jogar aqui

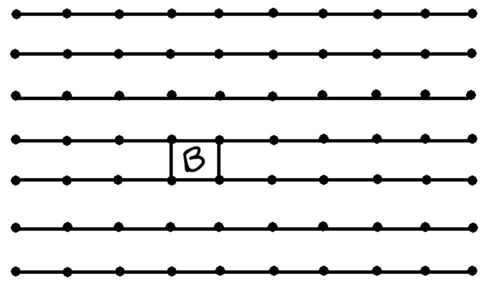
`http://dotsgame.co/games`

Sendo gulosos

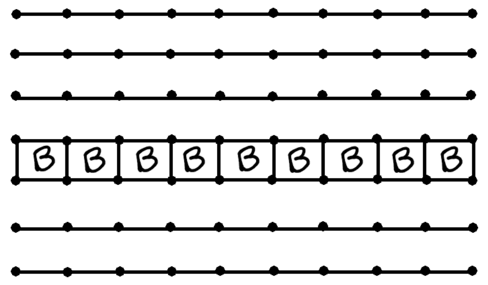


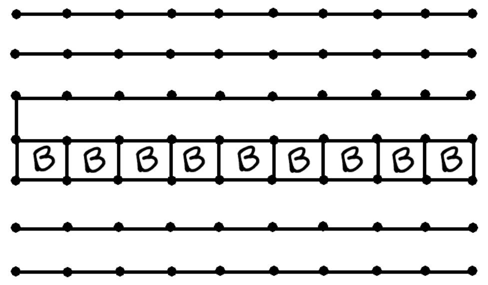


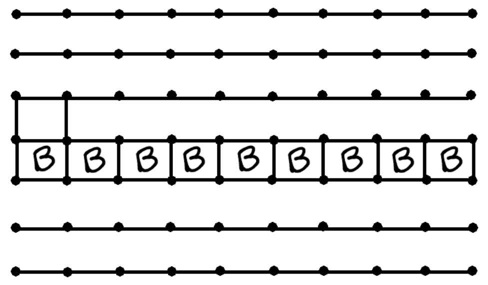


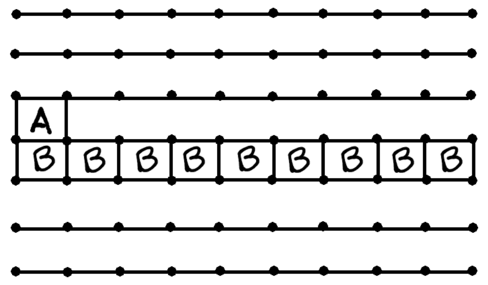

B

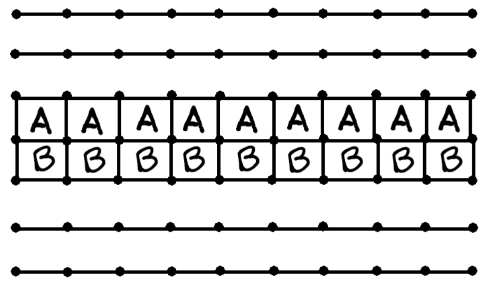
Sendo gulosos



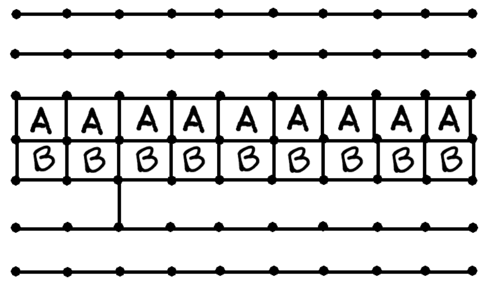

B
B
B
B
B
B
B
B
B


B
B
B
B
B
B
B
B
B

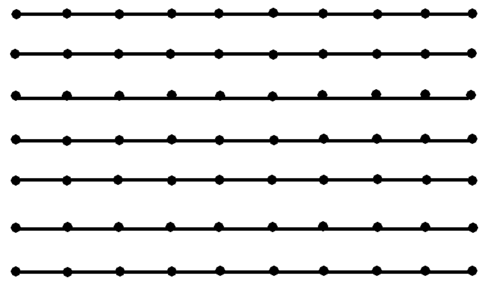

A
B
B
B
B
B
B
B
B
B


A
A
A
A
A
A
A
A
A
B
B
B
B
B
B
B
B
B

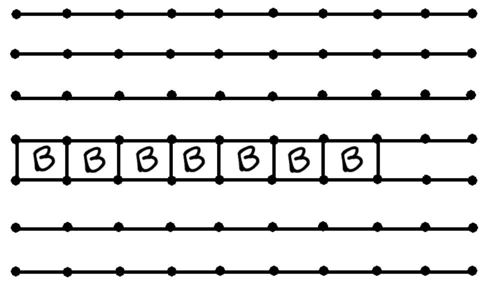
Sendo gulosos



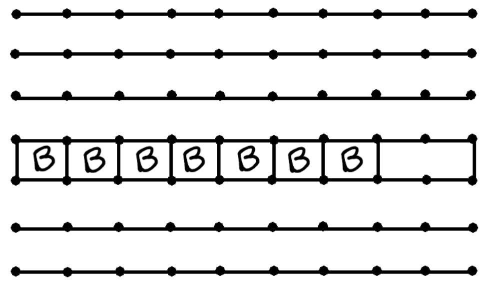
Melhorando



Melhorando



Melhorando



Simetria

Uma estratégia pode ser apenas uma espécie de cópia do que o outro jogador faz.

Uma estratégia pode ser apenas uma espécie de cópia do que o outro jogador faz.

Suponha que você faça uma aposta contra os dois melhores jogadores de xadrez do mundo.

Simetria

Uma estratégia pode ser apenas uma espécie de cópia do que o outro jogador faz.

Suponha que você faça uma aposta contra os dois melhores jogadores de xadrez do mundo. A aposta consiste no seguinte: você joga contra os dois simultaneamente, numa partida com as peças pretas, na outra com as brancas.

Uma estratégia pode ser apenas uma espécie de cópia do que o outro jogador faz.

Suponha que você faça uma aposta contra os dois melhores jogadores de xadrez do mundo. A aposta consiste no seguinte: você joga contra os dois simultaneamente, numa partida com as peças pretas, na outra com as brancas. Você vence a aposta se pelo menos empatar uma das partidas.

Mais um exemplo

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo - este vai ser bem importante para frente: NIM.

Mais um exemplo

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo - este vai ser bem importante para frente: NIM.

O jogo começa com n pilhas de fichas (as pilhas podem ter tamanhos diferentes).

Mais um exemplo

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo - este vai ser bem importante para frente: NIM.

O jogo começa com n pilhas de fichas (as pilhas podem ter tamanhos diferentes). A cada rodada, um jogador escolhe uma pilha e retira quantas fichas quiser dela (pelo menos uma).

Mais um exemplo

Para o próximo exemplo, precisamos explicar mais um jogo - este vai ser bem importante para frente: NIM.

O jogo começa com n pilhas de fichas (as pilhas podem ter tamanhos diferentes). A cada rodada, um jogador escolhe uma pilha e retira quantas fichas quiser dela (pelo menos uma). Perde quem não tiver mais fichas para tirar.

Pequenas observações

Note que o jogo QUADRADINHOS não segue exatamente o padrão que queremos aqui - há contagem de pontos e jogadores podem jogar duas vezes seguidas.

Pequenas observações

Note que o jogo QUADRADINHOS não segue exatamente o padrão que queremos aqui - há contagem de pontos e jogadores podem jogar duas vezes seguidas.

Enquanto que o jogo NIM segue fielmente o que queremos (até o critério de vitória está no modo normal).

Nim de duas pilhas

Nim de duas pilhas

Vamos dividir em dois casos:

Nim de duas pilhas

Vamos dividir em dois casos:

- As duas pilhas tem a mesma quantidade de fichas.

Nim de duas pilhas

Vamos dividir em dois casos:

- As duas pilhas tem a mesma quantidade de fichas. Daí basta o segundo jogador imitar o que o primeiro fez (na outra pilha).

Nim de duas pilhas

Vamos dividir em dois casos:

- As duas pilhas tem a mesma quantidade de fichas. Daí basta o segundo jogador imitar o que o primeiro fez (na outra pilha).
- As duas pilhas têm quantidades diferentes de fichas.

Nim de duas pilhas

Vamos dividir em dois casos:

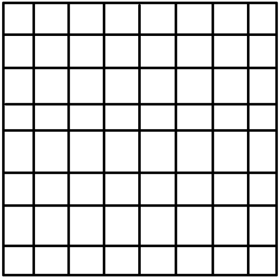
- As duas pilhas tem a mesma quantidade de fichas. Daí basta o segundo jogador imitar o que o primeiro fez (na outra pilha).
- As duas pilhas têm quantidades diferentes de fichas. Daí o primeiro retira fichas da maior de forma que ela fique do mesmo tamanho que a outra.

Nim de duas pilhas

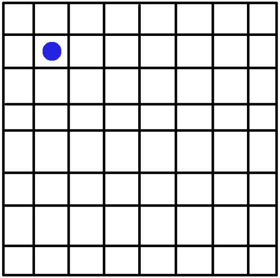
Vamos dividir em dois casos:

- As duas pilhas tem a mesma quantidade de fichas. Daí basta o segundo jogador imitar o que o primeiro fez (na outra pilha).
- As duas pilhas têm quantidades diferentes de fichas. Daí o primeiro retira fichas da maior de forma que ela fique do mesmo tamanho que a outra. Daí ele aplica a estratégia anterior (fingindo ser o segundo).

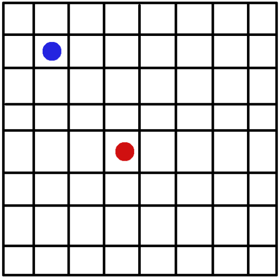
Pintar um quadrado



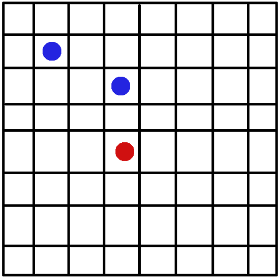
Pintar um quadrado



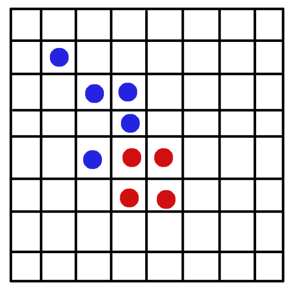
Pintar um quadrado

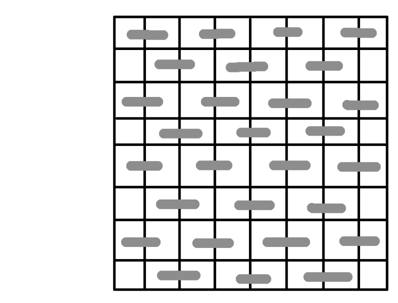


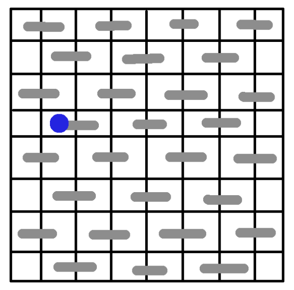
Pintar um quadrado



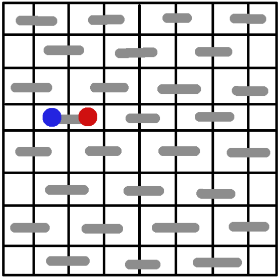
Pintar um quadrado



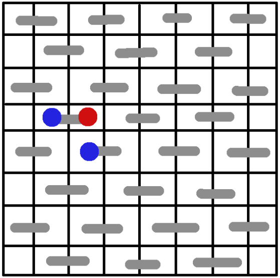


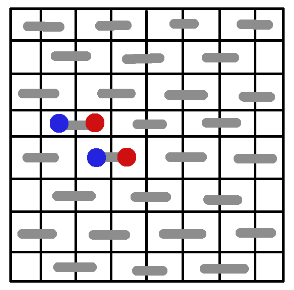


Pintar um quadrado



Pintar um quadrado





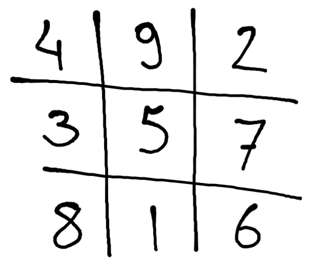
Mude o jogo

O jogo 3-PARA-15 consiste no seguinte: há 9 cartas, numeradas de 1 a 9.

Mude o jogo

O jogo 3-PARA-15 consiste no seguinte: há 9 cartas, numeradas de 1 a 9. Cada jogador escolhe uma por turno, o primeiro que tiver 3 que juntas somem 15, vence.

Já vi esse desenho antes



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Mais um exemplo

O jogo CHOMP consiste num tabuleiro $m \times n$, com a casa inferior esquerda sendo venenosa.

Mais um exemplo

O jogo CHOMP consiste num tabuleiro $m \times n$, com a casa inferior esquerda sendo venenosa. O jogadores se alternam, sempre escolhendo uma casa.

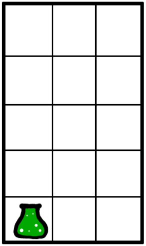
Mais um exemplo

O jogo CHOMP consiste num tabuleiro $m \times n$, com a casa inferior esquerda sendo venenosa. O jogadores se alternam, sempre escolhendo uma casa. Quando escolhem uma casa, todas as casas acima ou para direita da escolhida (inclusive a própria) são removidas.

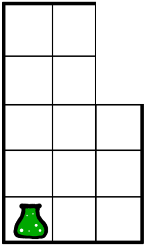
Mais um exemplo

O jogo CHOMP consiste num tabuleiro $m \times n$, com a casa inferior esquerda sendo venenosa. O jogadores se alternam, sempre escolhendo uma casa. Quando escolhem uma casa, todas as casas acima ou para direita da escolhida (inclusive a própria) são removidas. O jogador que remover a casa venenosa perde.

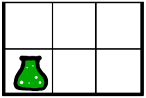
Jogando um pouco



Jogando um pouco



Jogando um pouco



Spoilers

Spoilers

Vamos formalizar essas coisas mais para frente:

Spoilers

Vamos formalizar essas coisas mais para frente:

- Uma estratégia para um jogador nada mais é que uma descrição de como ele vai jogar (levando em conta as possibilidades do que o outro jogador fizer no decorrer da partida).

Spoilers

Vamos formalizar essas coisas mais para frente:

- Uma estratégia para um jogador nada mais é que uma descrição de como ele vai jogar (levando em conta as possibilidades do que o outro jogador fizer no decorrer da partida).
- Uma estratégia é dita vencedora se ela garante vitória para o jogador - não importando o quão bem o outro jogue.

Spoilers

Vamos formalizar essas coisas mais para frente:

- Uma estratégia para um jogador nada mais é que uma descrição de como ele vai jogar (levando em conta as possibilidades do que o outro jogador fizer no decorrer da partida).
- Uma estratégia é dita vencedora se ela garante vitória para o jogador - não importando o quão bem o outro jogue.
- Certas hipóteses sobre jogos garantem que algum dos jogadores tenha uma estratégia vencedora (sem dizer qual deles necessariamente).

Spoilers

Vamos formalizar essas coisas mais para frente:

- Uma estratégia para um jogador nada mais é que uma descrição de como ele vai jogar (levando em conta as possibilidades do que o outro jogador fizer no decorrer da partida).
- Uma estratégia é dita vencedora se ela garante vitória para o jogador - não importando o quão bem o outro jogue.
- Certas hipóteses sobre jogos garantem que algum dos jogadores tenha uma estratégia vencedora (sem dizer qual deles necessariamente).
- CHOMP é um desses jogos.

Nosso primeiro teorema!

Nosso primeiro teorema!

Teorema
O primeiro jogador a jogar no CHOMP *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Nosso primeiro teorema!

Teorema

O primeiro jogador a jogar no Chomp *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Demonstração.

O primeiro jogador remove a casa superior direita do tabuleiro.

Nosso primeiro teorema!

Teorema
O primeiro jogador a jogar no CHOMP *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Demonstração.
O primeiro jogador remove a casa superior direita do tabuleiro. Se após isso ele tem vitória garantida, terminamos.

Nosso primeiro teorema!

Teorema
O primeiro jogador a jogar no CHOMP *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Demonstração.
O primeiro jogador remove a casa superior direita do tabuleiro. Se após isso ele tem vitória garantida, terminamos. Caso contrário, o segundo jogador tem um jeito de jogar que garante sua vitória.

Nosso primeiro teorema!

Teorema
O primeiro jogador a jogar no CHOMP *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Demonstração.
O primeiro jogador remove a casa superior direita do tabuleiro. Se após isso ele tem vitória garantida, terminamos. Caso contrário, o segundo jogador tem um jeito de jogar que garante sua vitória. Considere a jogada do segundo jogador que faria isso.

Nosso primeiro teorema!

Teorema
O primeiro jogador a jogar no CHOMP *num tabuleiro retangular maior que* 1×1 *admite uma estratégia vencedora.*

Demonstração.
O primeiro jogador remove a casa superior direita do tabuleiro. Se após isso ele tem vitória garantida, terminamos. Caso contrário, o segundo jogador tem um jeito de jogar que garante sua vitória. Considere a jogada do segundo jogador que faria isso. Note que ela era uma jogada possível para o primeiro, na primeira rodada. $\square$

Provando de outro jeito

Cap. 1

Provando de outro jeito

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora.

Provando de outro jeito

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora.

Considere dois tabuleiros idênticos.

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora.

Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita.

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora.

Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita.

Aplique a estratégia vencedora contra essa jogada.

Provando de outro jeito

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora. Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita. Aplique a estratégia vencedora contra essa jogada. No segundo tabuleiro, copie o resultado do primeiro como sendo você o primeiro a jogar (note que é possível).

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora. Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita. Aplique a estratégia vencedora contra essa jogada. No segundo tabuleiro, copie o resultado do primeiro como sendo você o primeiro a jogar (note que é possível).

Daí em diante, sempre aplique a estratégia vencedora no segundo tabuleiro e jogue a resposta no primeiro tabuleiro.

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora. Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita. Aplique a estratégia vencedora contra essa jogada. No segundo tabuleiro, copie o resultado do primeiro como sendo você o primeiro a jogar (note que é possível).

Daí em diante, sempre aplique a estratégia vencedora no segundo tabuleiro e jogue a resposta no primeiro tabuleiro. Depois que a estratégia jogar no primeiro, repita a jogada dela no segundo.

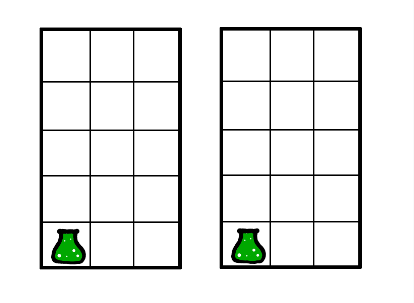
Provando de outro jeito

Demonstração.
Suponha que seja o segundo jogador a ter uma estratégia vencedora. Considere dois tabuleiros idênticos. Num, remova a casa superior direita. Aplique a estratégia vencedora contra essa jogada. No segundo tabuleiro, copie o resultado do primeiro como sendo você o primeiro a jogar (note que é possível).

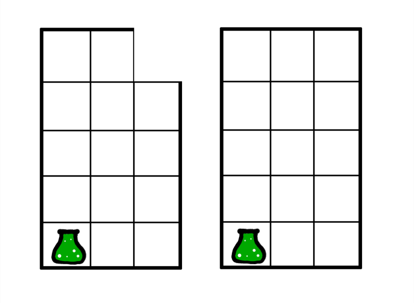
Daí em diante, sempre aplique a estratégia vencedora no segundo tabuleiro e jogue a resposta no primeiro tabuleiro. Depois que a estratégia jogar no primeiro, repita a jogada dela no segundo.

Note que a estratégia está jogando em ambos os tabuleiros e, por ser vencedora, deveria vencer em ambos (o que é impossível). □

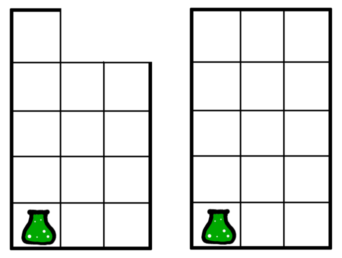
Vendo a última demonstração



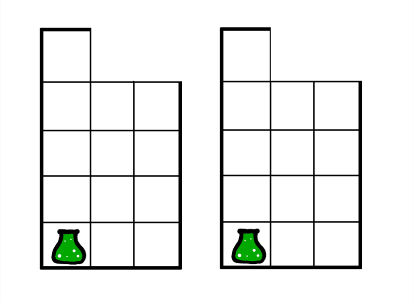
Vendo a última demonstração



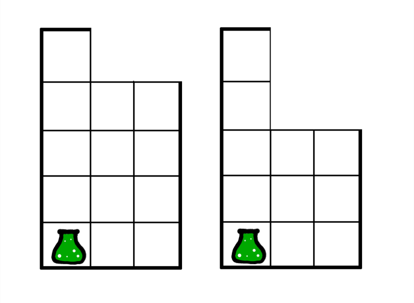
Vendo a última demonstração



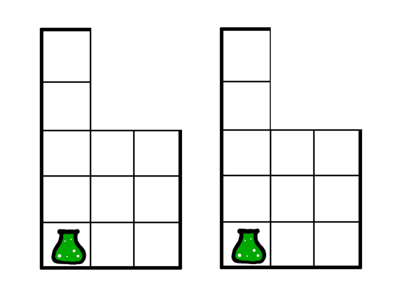
Vendo a última demonstração



Vendo a última demonstração



Vendo a última demonstração



Roubo!

Roubo!

O argumento nas últimas provas é normalmente chamado de "roubo de estratégia".

Roubo!

O argumento nas últimas provas é normalmente chamado de "roubo de estratégia".

Um jogador passa a jogar o que o outro jogaria, o que no caso acabou levando a uma contradição.

Roubo!

O argumento nas últimas provas é normalmente chamado de “roubo de estratégia”.

Um jogador passa a jogar o que o outro jogaria, o que no caso acabou levando a uma contradição.

Note que provamos que o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora no CHOMP sem descrever como ela é (na verdade, sem ter ideia de como ela é).

Mais um exemplo

Mais um exemplo

O jogo APONTANDO (BRIDG-IT) consiste em dois grids de pontos sobrepostos, um feito de pontos azuis o outro de vermelhos.

Mais um exemplo

O jogo APONTANDO (BRIDG-IT) consiste em dois grids de pontos sobrepostos, um feito de pontos azuis o outro de vermelhos.

Ele é jogado por dois jogadores, AZUL e VERMELHO.

Mais um exemplo

O jogo APONTANDO (BRIDG-IT) consiste em dois grids de pontos sobrepostos, um feito de pontos azuis o outro de vermelhos.

Ele é jogado por dois jogadores, AZUL e VERMELHO. O jogador AZUL deve fazer um caminho ligando os extremos inferior e superior, enquanto o jogador VERMELHO deve ligar os extremos direito e esquerdo.

Jogue aqui

`http://www.lutanho.net/play/bridgit.html`

Algumas características deste jogo

Cap. 1

Algumas características deste jogo

- Esse jogo não admite empates;

Algumas características deste jogo

- Esse jogo não admite empates; EXERCÍCIO

Algumas características deste jogo

- Esse jogo não admite empates; EXERCÍCIO
- Um dos jogadores admite estratégia vencedora. (vamos ver mais tarde)

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO*.*

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO*.*

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma.

Mais um

Teorema
Num tabuleiro “quadrado”, o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer.

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora.

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora. Note que o jogo é simétrico entre os jogadores ("girando" o tabuleiro).

Mais um

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no Apontando*.*

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora. Note que o jogo é simétrico entre os jogadores ("girando" o tabuleiro). Então se ignorarmos o que o primeiro fez na rodada anterior, podemos aplicar a estratégia do segundo jogador agora também

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora. Note que o jogo é simétrico entre os jogadores ("girando" o tabuleiro). Então se ignorarmos o que o primeiro fez na rodada anterior, podemos aplicar a estratégia do segundo jogador agora também (se ela mandar fazer o que já tinha sido feito antes, é só jogar numa posição nova qualquer).

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no Apontando.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora. Note que o jogo é simétrico entre os jogadores ("girando" o tabuleiro). Então se ignorarmos o que o primeiro fez na rodada anterior, podemos aplicar a estratégia do segundo jogador agora também (se ela mandar fazer o que já tinha sido feito antes, é só jogar numa posição nova qualquer). Sempre repita esse procedimento, com o primeiro fingindo ser o segundo e usando a sua estratégia vencedora (ignorar a jogada aleatória).

Teorema
Num tabuleiro "quadrado", o primeiro jogador tem estratégia vencedora no APONTANDO.

Demonstração.
Vamos provar que o segundo jogador não pode ter uma estratégia vencedora (daí, pelo comentário anterior, o primeiro precisa ter).

Suponha que o segundo tenha uma. O primeiro joga numa posição qualquer. Então o segundo segue sua estratégia vencedora. Note que o jogo é simétrico entre os jogadores ("girando" o tabuleiro). Então se ignorarmos o que o primeiro fez na rodada anterior, podemos aplicar a estratégia do segundo jogador agora também (se ela mandar fazer o que já tinha sido feito antes, é só jogar numa posição nova qualquer). Sempre repita esse procedimento, com o primeiro fingindo ser o segundo e usando a sua estratégia vencedora (ignorar a jogada aleatória). Desta forma, ambos os jogadores devem vencer, o que é impossível. □

Indução em árvores

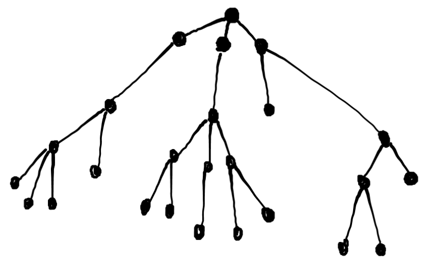
Indução em árvores

Vamos usar (implicitamente) em diversas provas uma indução sobre árvores de altura finita.

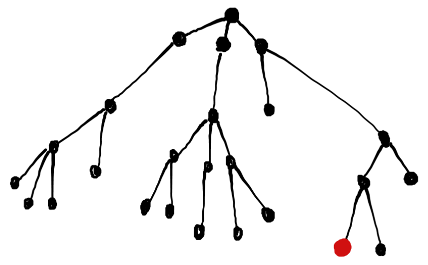
Indução em árvores

Vamos usar (implicitamente) em diversas provas uma indução sobre árvores de altura finita. Ela pode ser mais ou menos interpretada da seguinte forma: "se para uma determinada propriedade P vale que, se para todos os "sucessores" de um elemento fixado vale P, então vale para o próprio elemento fixado, então P vale para toda a árvore".

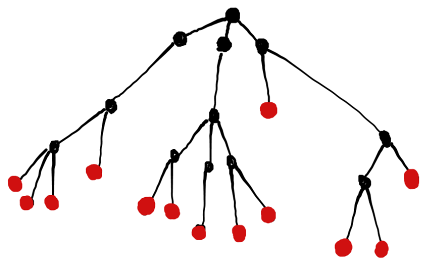
Vendo num desenho



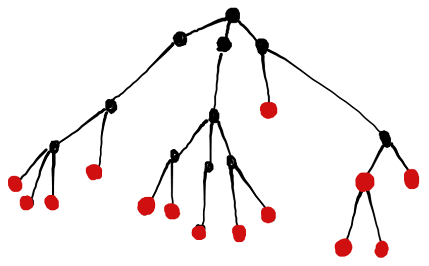
Vendo num desenho



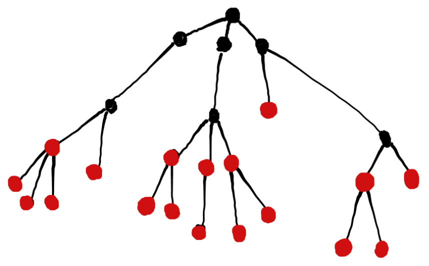
Vendo num desenho



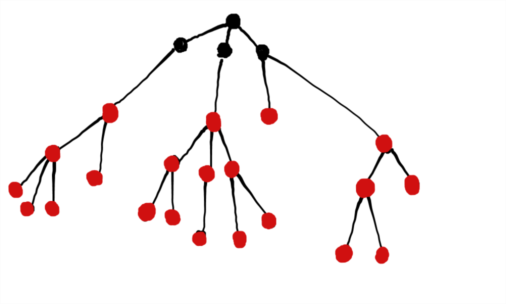
Vendo num desenho



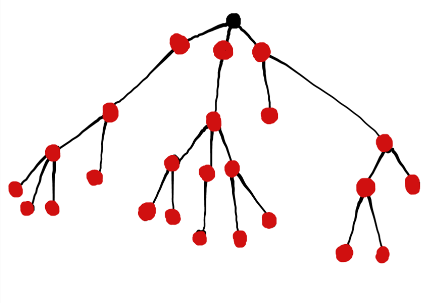
Vendo num desenho



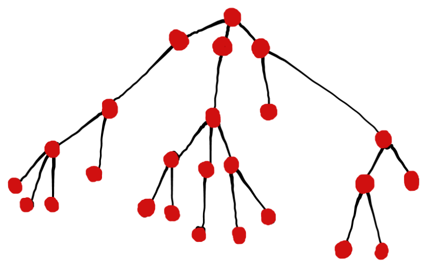
Vendo num desenho



Vendo num desenho



Vendo num desenho



Mas e os pontos extremos?

Em geral, nem se precisa verificar os pontos extremos, uma vez que teremos a implicação por vacuidade.

Mas e os pontos extremos?

Em geral, nem se precisa verificar os pontos extremos, uma vez que teremos a implicação por vacuidade. Mas podemos fazer a verificação mesmo assim, para acalmar os ânimos (principalmente no começo).

Vendo isso em ação

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução.

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim.

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado.

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO.

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO. Suponha que ALICE joga primeiro. Desta forma, temos dois casos:

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO. Suponha que ALICE joga primeiro. Desta forma, temos dois casos:

- Todas as opções dão vitória a BETO.

Vendo isso em ação

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO. Suponha que ALICE joga primeiro. Desta forma, temos dois casos:

- Todas as opções dão vitória a BETO. Neste caso, BETO tem estratégia vencedora.

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO. Suponha que ALICE joga primeiro. Desta forma, temos dois casos:

- Todas as opções dão vitória a BETO. Neste caso, BETO tem estratégia vencedora.
- Alguma opção disponível dá vitória a ALICE.

Teorema (Fundamental)
Num jogo cuja árvore tem altura finita e sem empates, um dos jogadores precisa ter estratégia vencedora.

Demonstração.
Vamos provar por indução. Note que não precisaríamos cuidar dos casos extremos, mas vamos fazer mesmo assim. Note que os pontos extremos são simplementes as posições finais - onde a vitória já está definida para algum dos jogadores, por falta de empate.

Para o passo geral, suponha que para todas as opções vale o resultado. Vamos chamar os jogadores de ALICE e BETO. Suponha que ALICE joga primeiro. Desta forma, temos dois casos:

- Todas as opções dão vitória a BETO. Neste caso, BETO tem estratégia vencedora.
- Alguma opção disponível dá vitória a ALICE. Neste caso, ALICE tem estratégia vencedora: basta escolher tal opção.

□

Classes de resultados

Dado um jogo em que possamos aplicar o Teorema fundamental (vamos quase sempre fazer isso, mas tacitamente), temos a princípio duas possibilidades em termos de estratégias para jogadores: vitória para o primeiro a jogar ou vitória para o segundo a jogar.

Classes de resultados

Dado um jogo em que possamos aplicar o Teorema fundamental (vamos quase sempre fazer isso, mas tacitamente), temos a princípio duas possibilidades em termos de estratégias para jogadores: vitória para o primeiro a jogar ou vitória para o segundo a jogar.

Mas e se ainda não definimos quem é o primeiro a jogar?

Classes de resultados

Dado um jogo em que possamos aplicar o Teorema fundamental (vamos quase sempre fazer isso, mas tacitamente), temos a princípio duas possibilidades em termos de estratégias para jogadores: vitória para o primeiro a jogar ou vitória para o segundo a jogar.

Mas e se ainda não definimos quem é o primeiro a jogar? É claro que num jogo imparcial, isso não faz diferença.

Classes de resultados

Dado um jogo em que possamos aplicar o Teorema fundamental (vamos quase sempre fazer isso, mas tacitamente), temos a princípio duas possibilidades em termos de estratégias para jogadores: vitória para o primeiro a jogar ou vitória para o segundo a jogar.

Mas e se ainda não definimos quem é o primeiro a jogar? É claro que num jogo imparcial, isso não faz diferença. Mas num jogo partizan, isso pode fazer diferença.

Dado um jogo em que possamos aplicar o Teorema fundamental (vamos quase sempre fazer isso, mas tacitamente), temos a princípio duas possibilidades em termos de estratégias para jogadores: vitória para o primeiro a jogar ou vitória para o segundo a jogar.

Mas e se ainda não definimos quem é o primeiro a jogar? É claro que num jogo imparcial, isso não faz diferença. Mas num jogo partizan, isso pode fazer diferença.

Vamos chamar os nossos jogadores de LEFT e RIGHT

Vendo quais são as possibilidades

Vendo quais são as possibilidades

Fixe um jogo qualquer e vamos analisar o que pode ocorrer se invertemos a ordem entre LEFT e RIGHT.

Vendo quais são as possibilidades

Fixe um jogo qualquer e vamos analisar o que pode ocorrer se invertemos a ordem entre LEFT e RIGHT.

Vamos supor que LEFT começa.

Vendo quais são as possibilidades

Fixe um jogo qualquer e vamos analisar o que pode ocorrer se invertemos a ordem entre Left e Right.

Vamos supor que Left começa. Pelo resultado anterior, o primeiro ou o segundo a jogar tem estratégia vencedora.

Vendo quais são as possibilidades

Fixe um jogo qualquer e vamos analisar o que pode ocorrer se invertemos a ordem entre Left e Right.

Vamos supor que Left começa. Pelo resultado anterior, o primeiro ou o segundo a jogar tem estratégia vencedora.

Agora mantenha o mesmo jogo, mas inverta a ordem de quem começa.

Vendo quais são as possibilidades

Fixe um jogo qualquer e vamos analisar o que pode ocorrer se invertemos a ordem entre Left e Right.

Vamos supor que Left começa. Pelo resultado anterior, o primeiro ou o segundo a jogar tem estratégia vencedora.

Agora mantenha o mesmo jogo, mas inverta a ordem de quem começa. Temos duas situações: mantém-se quem ganhava ou inverte-se.

Quais são os casos

Cap. 2

Quais são os casos

Se quem vence é invertido, então novamente temos que é a ordem que manda no jogo: ou ele favorece o primeiro, ou o segundo.

Quais são os casos

Se quem vence é invertido, então novamente temos que é a ordem que manda no jogo: ou ele favorece o primeiro, ou o segundo.

Mas se quem vence permanece o mesmo, a situação é nova: o jogo favorece o jogador LEFT ou o jogador RIGHT.

Quais são os casos

Se quem vence é invertido, então novamente temos que é a ordem que manda no jogo: ou ele favorece o primeiro, ou o segundo.

Mas se quem vence permanece o mesmo, a situação é nova: o jogo favorece o jogador Left ou o jogador Right.

Ou seja, agora temos 4 possibilidades de favorecimento - chamamos estas de possibilidades de classes.

Classes

- $\mathcal{N}$ (Next) O próximo a jogar é favorecido;

Classes

- $\mathcal{N}$ (Next) O próximo a jogar é favorecido;
- $\mathcal{P}$ (Previous) O jogador anterior (ou o segundo a jogar) é favorecido;

Classes

- $\mathcal{N}$ (Next) O próximo a jogar é favorecido;
- $\mathcal{P}$ (Previous) O jogador anterior (ou o segundo a jogar) é favorecido;
- $\mathcal{L}$ (Left) o jogador LEFT é favorecido;

- $\mathcal{N}$ (Next) O próximo a jogar é favorecido;
- $\mathcal{P}$ (Previous) O jogador anterior (ou o segundo a jogar) é favorecido;
- $\mathcal{L}$ (Left) o jogador LEFT é favorecido;
- $\mathcal{R}$ (Right) o jogador RIGHT é favorecido.

Na tabela

		Right começa	
		Right vence	Left vence
Left começa	Left vence	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$
	Right vence	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P}$

Representando

Podemos representar um jogo (e suas opções) da seguinte maneira:

$$G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$$

onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são as opções de jogada de L e R respectivamente.

Representando

Podemos representar um jogo (e suas opções) da seguinte maneira:

$$G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$$

onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são as opções de jogada de L e R respectivamente.

Mais que isso, note que cada opção de um jogador pode ser pensada como uma nova condição inicial para um jogo.

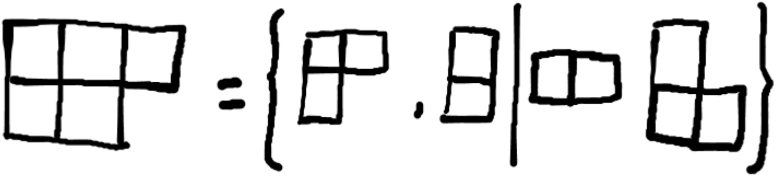
Representando

Podemos representar um jogo (e suas opções) da seguinte maneira:

$$G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$$

onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são as opções de jogada de L e R respectivamente.

Mais que isso, note que cada opção de um jogador pode ser pensada como uma nova condição inicial para um jogo. Ou seja, podemos indicar cada opção de cada jogador como um novo jogo (e, portanto, com as duas coleções de opções).



Essa tabela ajuda

	$\exists G^R \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$	$\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$
$\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$
$\forall G^L \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P}$

Provando a tabela

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Suponha que o jogo seja $\mathcal{L}$.

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Suponha que o jogo seja $\mathcal{L}$. Temos dois casos. No primeiro, Left joga primeiro.

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Suponha que o jogo seja $\mathcal{L}$. Temos dois casos. No primeiro, LEFT joga primeiro. Note que o jogo precisa dar vitória a LEFT - ou seja, ele precisa ter uma opção $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{P}$.

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Suponha que o jogo seja $\mathcal{L}$. Temos dois casos. No primeiro, Left joga primeiro. Note que o jogo precisa dar vitória a Left - ou seja, ele precisa ter uma opção $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{P}$.

No segundo caso, Right joga primeiro.

Provando a tabela

Direita superior, isto é, $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Suponha que o jogo seja $\mathcal{L}$. Temos dois casos. No primeiro, LEFT joga primeiro. Note que o jogo precisa dar vitória a LEFT - ou seja, ele precisa ter uma opção $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{P}$.

No segundo caso, RIGHT joga primeiro. Então o jogo não pode garantir vitória para RIGHT - ou seja, todas as suas opções precisam dar vitória ao outro jogador (serem $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{N}$).

Continuando

Cap. 2

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Agora suponha que as opções para LEFT e RIGHT são como acima.

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Agora suponha que as opções para Left e Right são como acima. Precisamos mostrar que isso garante vitória para Left.

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Agora suponha que as opções para Left e Right são como acima. Precisamos mostrar que isso garante vitória para Left. Analisando dois casos novamente.

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

Agora suponha que as opções para Left e Right são como acima. Precisamos mostrar que isso garante vitória para Left. Analisando dois casos novamente. Se Left joga primeiro, basta ele jogar a opção que está em $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$.

Continuando

Ainda provando $(\forall G^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}) + (\exists G^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}) = \mathcal{L}$.

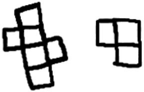
Agora suponha que as opções para Left e Right são como acima. Precisamos mostrar que isso garante vitória para Left. Analisando dois casos novamente. Se Left joga primeiro, basta ele jogar a opção que está em $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$.

Agora se for Right o primeiro a jogar, todas as opções disponíveis dão vitória para o outro jogador.

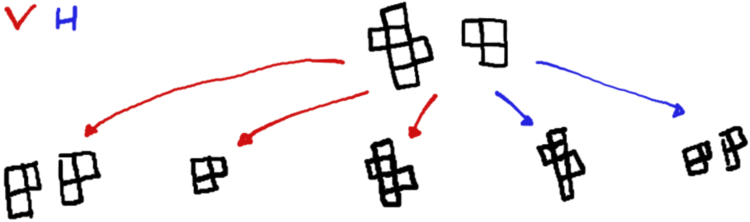
As outras entradas da tabela

Exercício Faça a demonstração para as outras entradas da tabela.

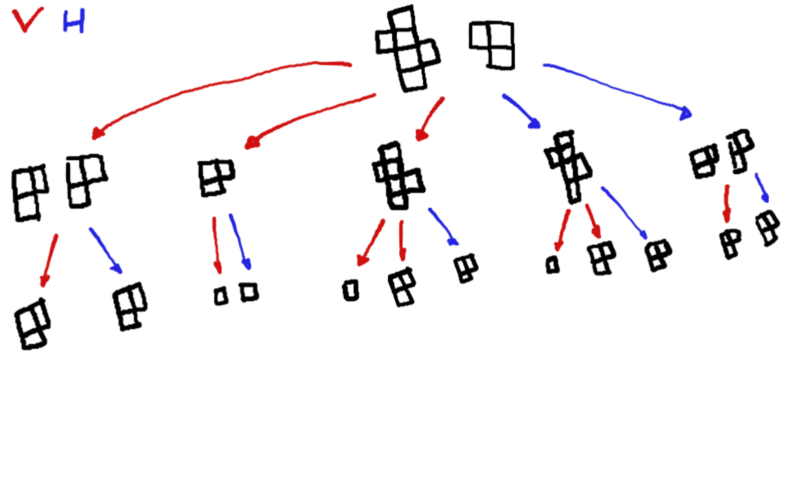
Vendo isso na árvore



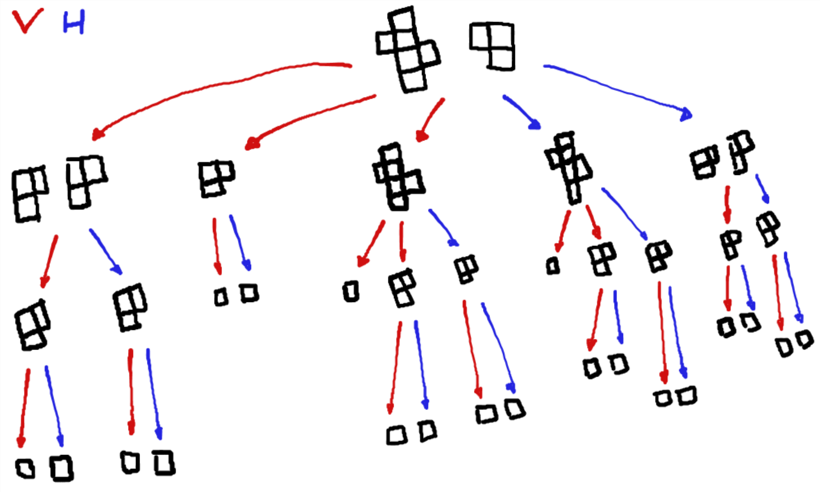
Vendo isso na árvore



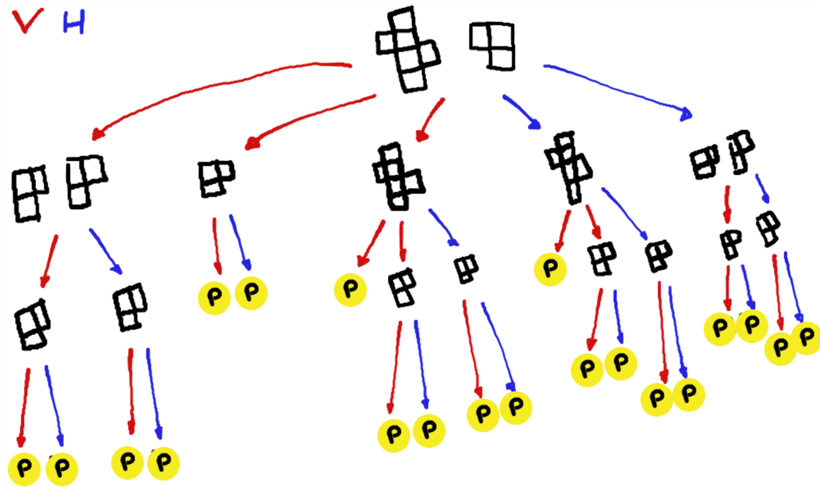
Vendo isso na árvore



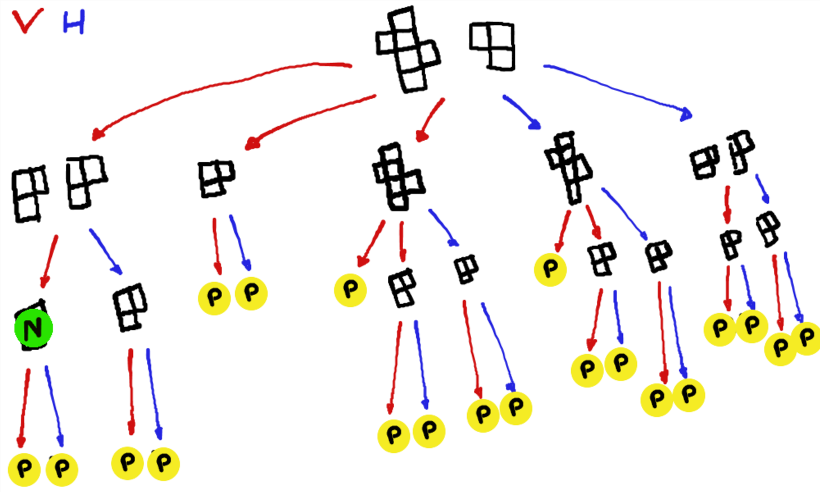
Vendo isso na árvore



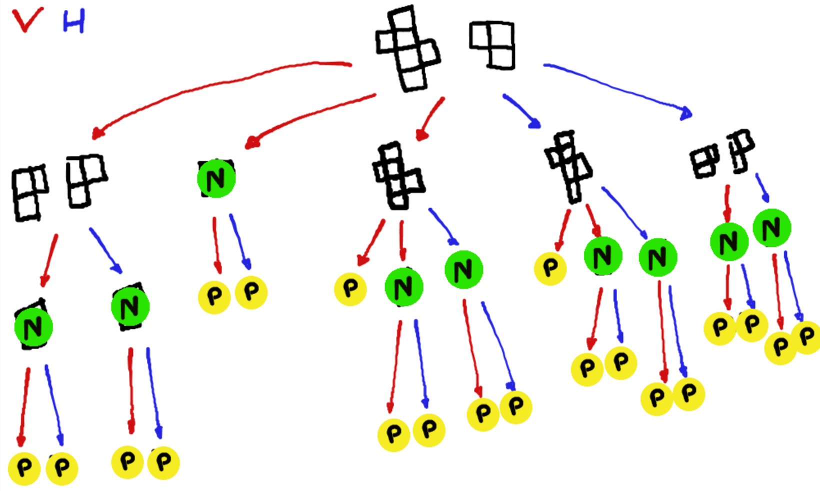
Vendo isso na árvore



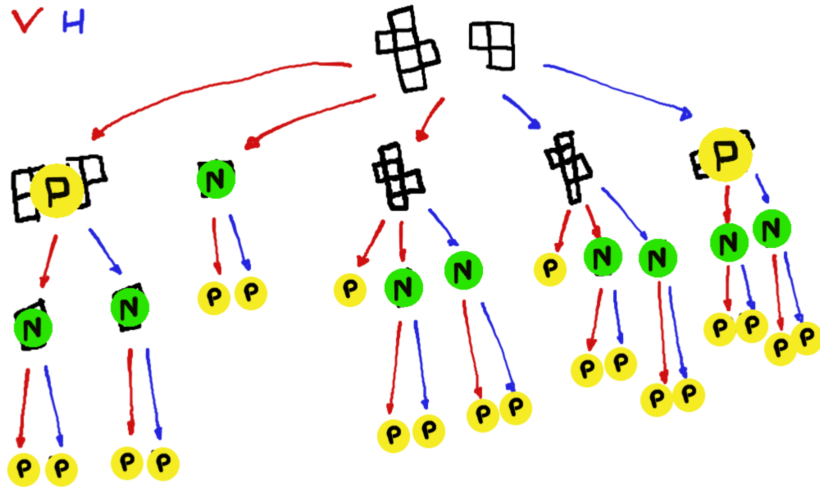
Vendo isso na árvore



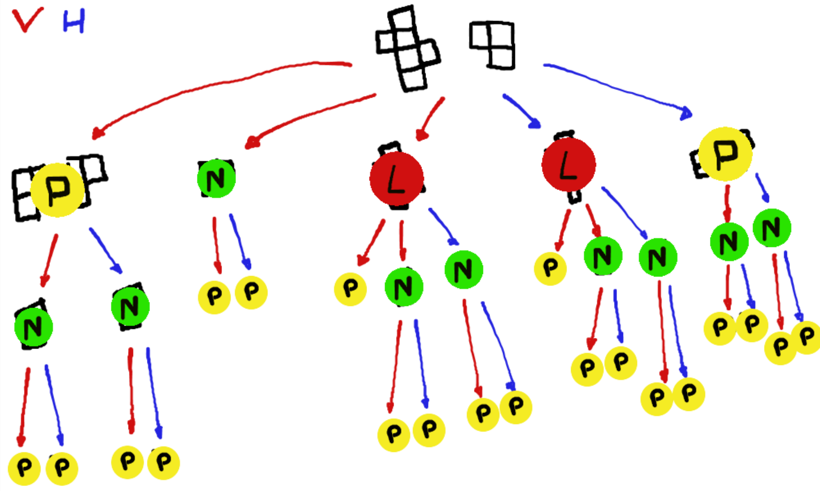
Vendo isso na árvore



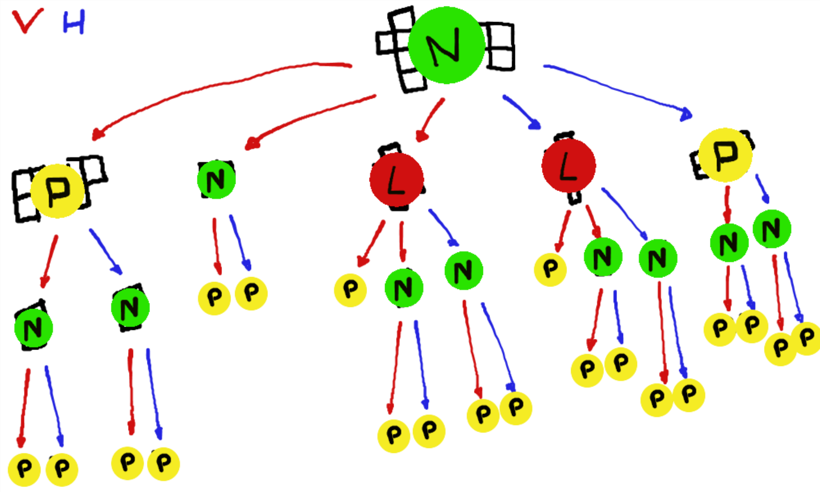
Vendo isso na árvore



Vendo isso na árvore



Vendo isso na árvore



Mais um exemplo

Mais um exemplo

Considere o jogo $\textsc{Subtração}(1, 2|2, 3)$ que consiste numa pilha com n fichas, onde $\textsc{Left}$ pode retirar 1 ou 2 fichas por rodada, enquanto $\textsc{Right}$ pode retirar 2 ou 3.

Mais um exemplo

Considere o jogo SUBTRAÇÃO$(1,2|2,3)$ que consiste numa pilha com n fichas, onde LEFT pode retirar 1 ou 2 fichas por rodada, enquanto RIGHT pode retirar 2 ou 3.

Vamos analisar as classes em termo de n. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere G_k o jogo com k fichas na pilha.

Analisando os casos

Analisando os casos

- G_0: ninguém pode jogar, então $G_0 \in \mathcal{P}$;

Analisando os casos

- G_0: ninguém pode jogar, então $G_0 \in \mathcal{P}$;
- G_1: só LEFT pode jogar, então $G_1 \in \mathcal{L}$;

Analisando os casos

- G_0: ninguém pode jogar, então $G_0 \in \mathcal{P}$;
- G_1: só Left pode jogar, então $G_1 \in \mathcal{L}$;
- G_2: Ambos podem deixar 0 fichas (e, portanto, vencer) - então $G_2 \in \mathcal{N}$;

Analisando os casos

- G_0: ninguém pode jogar, então $G_0 \in \mathcal{P}$;
- G_1: só LEFT pode jogar, então $G_1 \in \mathcal{L}$;
- G_2: Ambos podem deixar 0 fichas (e, portanto, vencer) - então $G_2 \in \mathcal{N}$;
- G_3: LEFT pode deixar 1 ficha e vencer e RIGHT pode deixar 0 e vencer. Logo, $G_3 \in \mathcal{N}$;

Analisando os casos

- G_0: ninguém pode jogar, então $G_0 \in \mathcal{P}$;
- G_1: só Left pode jogar, então $G_1 \in \mathcal{L}$;
- G_2: Ambos podem deixar 0 fichas (e, portanto, vencer) - então $G_2 \in \mathcal{N}$;
- G_3: Left pode deixar 1 ficha e vencer e Right pode deixar 0 e vencer. Logo, $G_3 \in \mathcal{N}$;
- G_4: Note que se um jogador remover k fichas, o outro pode remover $4 - k$ e vencer. Logo $G_4 \in \mathcal{P}$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 0 \mod 4$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 0 \mod 4$. Então se o jogador remover k, o outro pode remover $4 - k$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 0 \mod 4$. Então se o jogador remover k, o outro pode remover $4 - k$. Desta forma, sobram $n - 4$ fichas.

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 0 \mod 4$. Então se o jogador remover k, o outro pode remover $4 - k$. Desta forma, sobram $n - 4$ fichas. Note que $n - 4 \equiv 0 \mod 4$.

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2,3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 0 \mod 4$. Então se o jogador remover k, o outro pode remover $4 - k$. Desta forma, sobram $n - 4$ fichas. Note que $n - 4 \equiv 0 \mod 4$. Assim, por hipótese de indução, $G_{n-4} \in \mathcal{P}$ e, portanto, o segundo jogador consegue chegar numa posição que o favorece, como queríamos provar.

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 1 \mod 4$.

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 1 \mod 4$. Note que Left pode remover uma ficha e cair numa situação favorável (por indução).

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 1 \mod 4$. Note que LEFT pode remover uma ficha e cair numa situação favorável (por indução). Por outro lado, se RIGHT só tem como opção cair em posições $1 - 2 \equiv 3 \mod 4$ e $1 - 3 \equiv 2 \mod 4$, ambas favorecendo LEFT.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 2 \mod 4$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 2 \mod 4$. Note que ambos os jogadores conseguem fazer o jogo ficar com $n - 2 \equiv 0 \mod 4$, que os favorecem.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 3 \mod 4$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 3 \mod 4$. Se LEFT joga primeiro, ele remove uma ficha, caindo numa posição $\mathcal{L}$.

Vendo o padrão

$$G_n \in \begin{cases} \mathcal{P} & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathcal{L} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \mathcal{N} & \text{se } n \equiv 2, 3 \mod 4 \end{cases}$$

Demonstração por indução

Suponha $n \equiv 3 \mod 4$. Se Left joga primeiro, ele remove uma ficha, caindo numa posição $\mathcal{L}$. Já se for Right a jogar primeiro, ele pode remover 3 fichas, caindo numa posição que o favorece.

Sendo imparcial

Teorema
Se G é imparcial, então $G \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$.

Sendo imparcial

Teorema
Se G é imparcial, então $G \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$.

Demonstração.
Suponha, por exemplo, uma estratégia vencedora para Left jogando primeiro.

Sendo imparcial

Teorema
Se G é imparcial, então $G \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$.

Demonstração.
Suponha, por exemplo, uma estratégia vencedora para LEFT jogando primeiro. Então RIGHT pode usá-la se jogar primeiro e deveria vencer. □

Teorema prático

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

Teorema prático

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Teorema prático

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Então A coincide com as posições em $\mathcal{P}$ e B coincide com posições em $\mathcal{N}$.

Demonstração.

Teorema prático

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Então A coincide com as posições em $\mathcal{P}$ e B coincide com posições em $\mathcal{N}$.

Demonstração.

Note que as posições terminais em A (e em $\mathcal{P}$).

Teorema prático

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Então A coincide com as posições em $\mathcal{P}$ e B coincide com posições em $\mathcal{N}$.

Demonstração.

Note que as posições terminais em A (e em $\mathcal{P}$). Por indução, seguem as outras. □

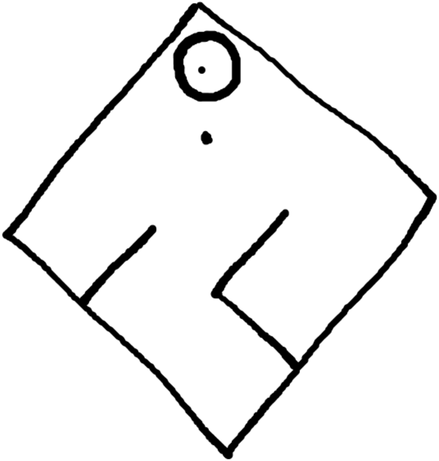
Mais um exemplo

No jogo Labirinto (Maze), os jogadores movem uma peça, sendo que Left sempre na direção diagonal esquerda inferior, enquanto que Right sempre na diagonal direita inferior.

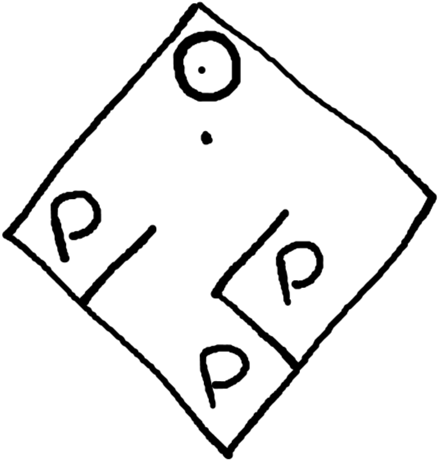
Mais um exemplo

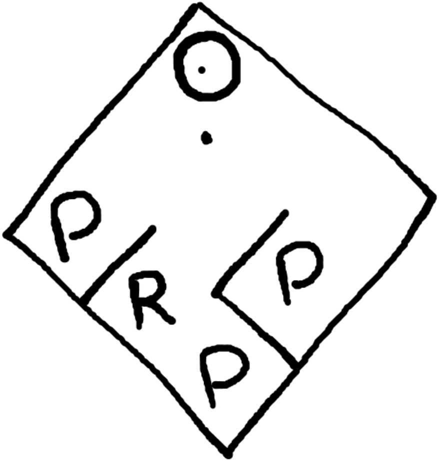
No jogo Labirinto (Maze), os jogadores movem uma peça, sendo que Left sempre na direção diagonal esquerda inferior, enquanto que Right sempre na diagonal direita inferior.

Na versão Lab (Maize) é a mesma coisa, com a diferença é que o movimento é de apenas uma casa, enquanto que na anterior, era quantas casas o jogado quisesse (desde que não passasse por paredes).

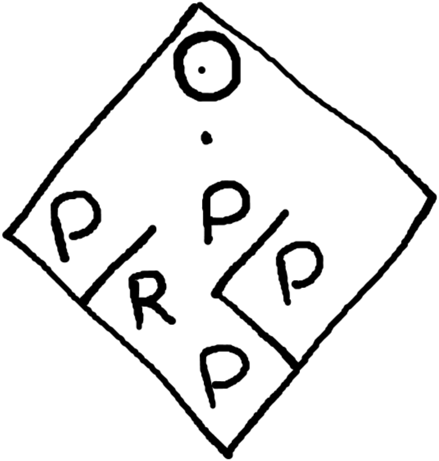


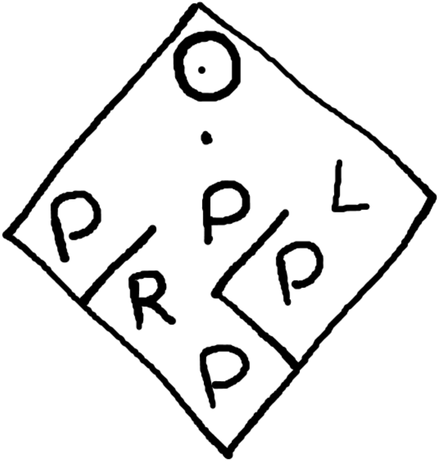
Determinando as opções no Lab



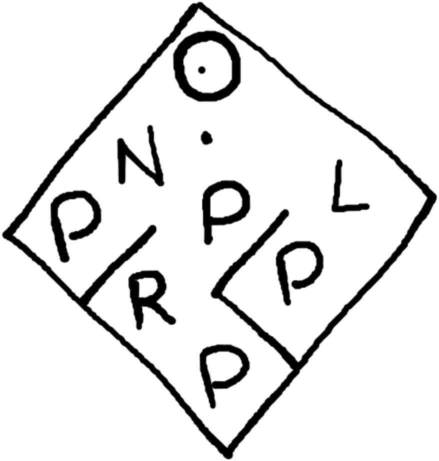

O
P
R
P
P

Determinando as opções no Lab

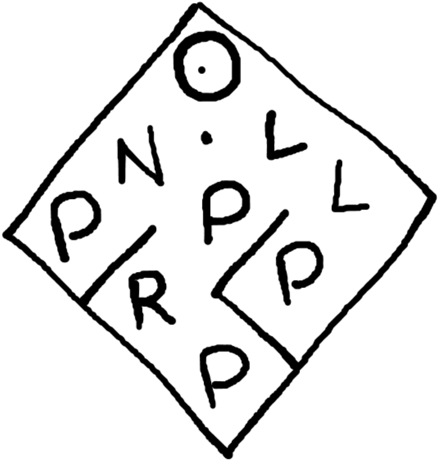


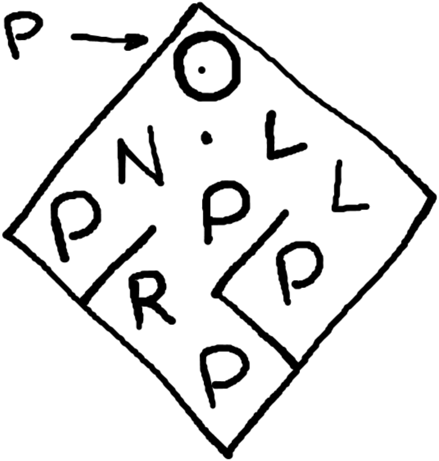

O
P
P
R
P
P
L

Determinando as opções no Lab



Determinando as opções no Lab




P
N
L
L
P
P
R
P
P

Mais um exercício

EXERCÍCIO: Resolver a configuração inicial anterior no jogo LABIRINTO.