Introdução aos jogos combinatórios - Parte 5

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Conseguir comparar jogos com jogos de valor numérico pode resolver algumas somas.

Conseguir comparar jogos com jogos de valor numérico pode resolver algumas somas.

Por exemplo, suponha que $G \geq 1$.

Conseguir comparar jogos com jogos de valor numérico pode resolver algumas somas.

Por exemplo, suponha que $G \geq 1$. Então é claro que $H = G - 1 + \uparrow$ favorece LEFT.

E todo jogo de altura finita é comparável com algum número:

E todo jogo de altura finita é comparável com algum número:

Teorema
Dado G um jogo de altura finita, existe n tal que

$$-n < G < n$$

E todo jogo de altura finita é comparável com algum número:

Teorema
Dado G um jogo de altura finita, existe n tal que

$$-n < G < n$$

Demonstração.
Vimos que o jogo de maior valor nascido até o dia n é o de valor n.

E todo jogo de altura finita é comparável com algum número:

Teorema
Dado G um jogo de altura finita, existe n tal que

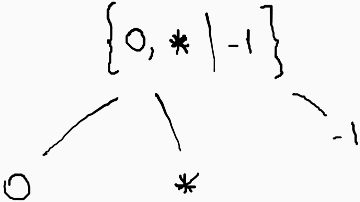
$$-n < G < n$$

Demonstração.
Vimos que o jogo de maior valor nascido até o dia n é o de valor n.
Basta tomar um dia maior que o aniversário de G. $\square$

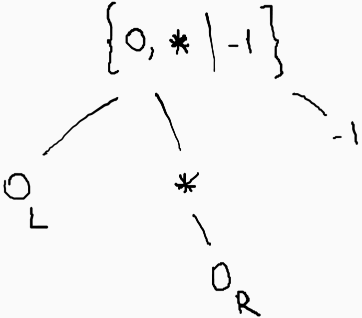
$$\{0, * \mid -1\}$$

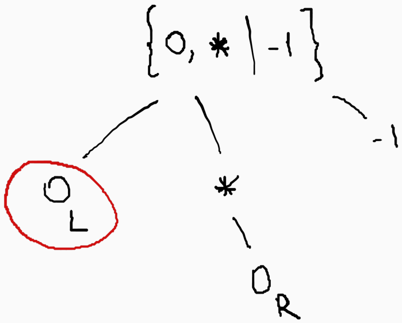
$\{0, * \mid -1\}$

-1


{0, * | -1}
0
*
-1

Calculando as paradas


{0, * | -1}
0
L
*
0
R
-1


{0, * | -1}
0
L
*
0
R
-1

Vamos colocar a seguinte ordem nos números “enfeitados”:

Vamos colocar a seguinte ordem nos números "enfeitados": se $x > y$, então

$$x_L > x_R > y_L > y_R$$

Vamos colocar a seguinte ordem nos números "enfeitados": se $x > y$, então

$$x_L > x_R > y_L > y_R$$

Estendemos a definição anterior para:

Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

Vamos colocar a seguinte ordem nos números "enfeitados": se $x > y$, então

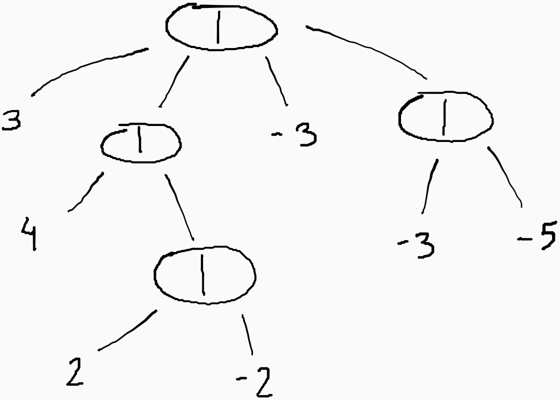
$$x_L > x_R > y_L > y_R$$

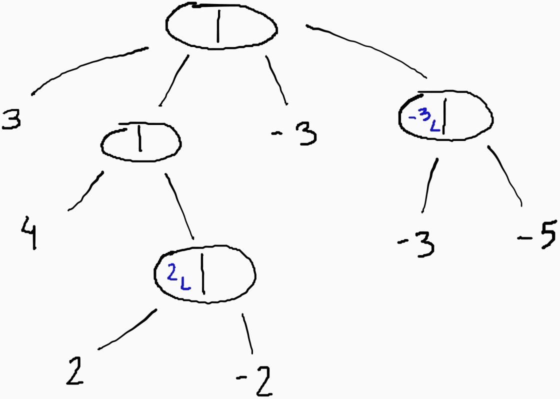
Estendemos a definição anterior para:

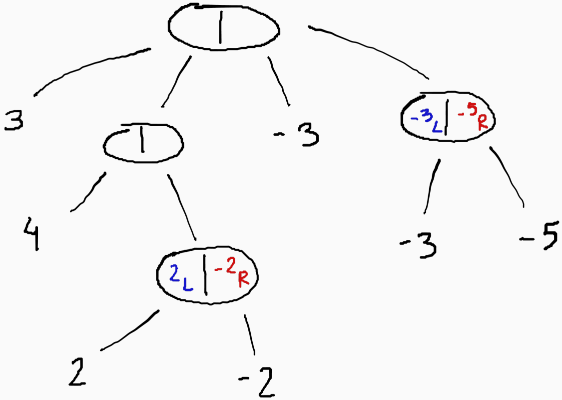
Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

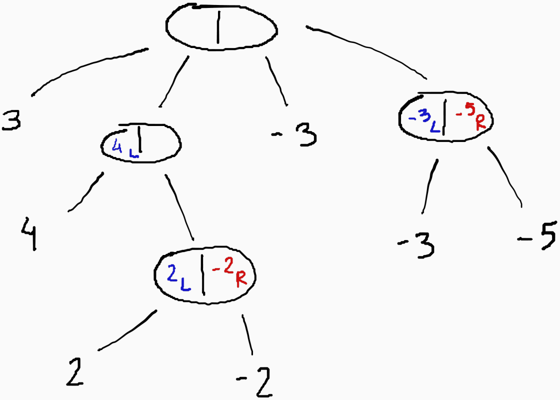
$$LS(G) = \begin{cases} x_R & \textit{se } G \textit{ é um número } x \\ \max(RS(G^L)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

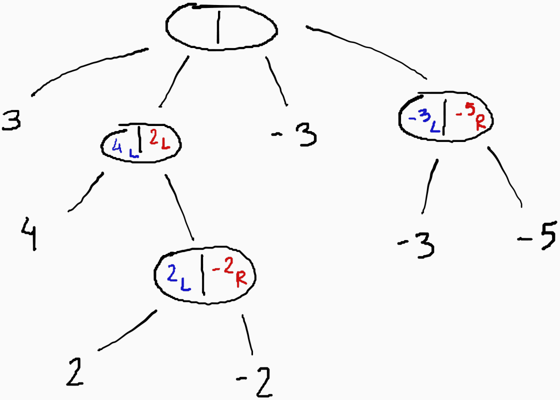
$$RS(G) = \begin{cases} x_L & \textit{se } G \textit{ é um número } x \\ \min(LS(G^R)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

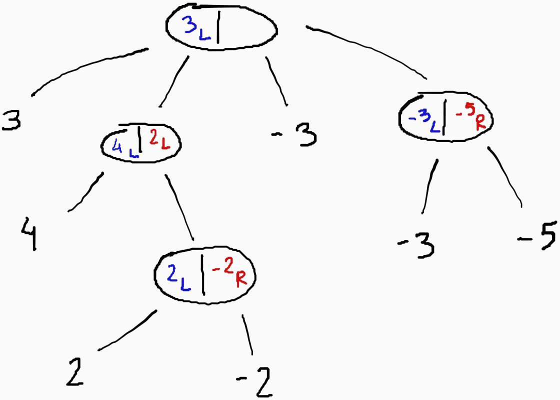

3
4
2
-2
-3
-3
-5

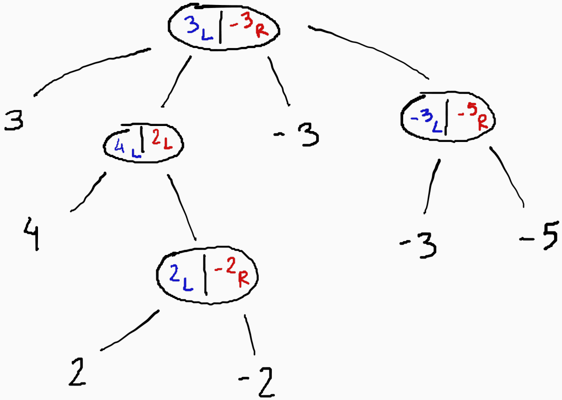

3
-3
4
-3
-5
2
-2
2_L
-3_L


3
4
2
-2
-3
-3
-5
2_L | -2_R
-3_L | -5_R


3
4_L
4
2_L
-2_R
2
-2
-3
-3_L
-5_R
-3
-5


3
4_L | 2_L
-3
-3_L | -5_R
4
2_L | -2_R
-3
-5
2
-2


3L
3
4L | 2L
-3
-3L | -5R
4
2L | -2R
-3
-5
2
-2


3L | -3R
3
4L | 2L
-3
-3L | -5R
4
2L | -2R
-3
-5
2
-2

Teorema
Seja G um jogo de altura finita e x um número. Então:

Teorema
Seja G um jogo de altura finita e x um número. Então:

(a) *Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.*

Teorema
Seja G um jogo de altura finita e x um número. Então:

(a) *Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.*

(b) *Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.*

Teorema
Seja G um jogo de altura finita e x um número. Então:

(a) *Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.*
(b) *Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.*
(c) *Se o valor de $LS(G)$ é maior que x então $G \geq x$ ou eles são incomparáveis.*

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$. Lembrando que valores de parada para direita são no máximo os valores de parada para esquerda, existe uma opção G^R para RIGHT tal que $LS(G^R) \leq y$.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$. Lembrando que valores de parada para direita são no máximo os valores de parada para esquerda, existe uma opção G^R para $\textsc{Right}$ tal que $LS(G^R) \leq y$. Por indução, $G^R - x < 0$ e, portanto, dá vitória para $\textsc{Right}$.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$. Lembrando que valores de parada para direita são no máximo os valores de parada para esquerda, existe uma opção G^R para RIGHT tal que $LS(G^R) \leq y$. Por indução, $G^R - x < 0$ e, portanto, dá vitória para RIGHT.

Se LEFT é o primeiro a jogar, já sabemos que deve jogar em G numa opção G^L.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$. Lembrando que valores de parada para direita são no máximo os valores de parada para esquerda, existe uma opção G^R para RIGHT tal que $LS(G^R) \leq y$. Por indução, $G^R - x < 0$ e, portanto, dá vitória para RIGHT.

Se LEFT é o primeiro a jogar, já sabemos que deve jogar em G numa opção G^L. Pela definição de parada, $G^L - x = y - x < 0$, ou o valor de parada direita de G^L é ainda mais baixo que y.

Se o valor de $LS(G)$ é menor que x, então $G < x$.

Demonstração.
Seja y o valor de $LS(G)$. Considere $G - x$. Lembrando que valores de parada para direita são no máximo os valores de parada para esquerda, existe uma opção G^R para Right tal que $LS(G^R) \leq y$. Por indução, $G^R - x < 0$ e, portanto, dá vitória para Right.

Se Left é o primeiro a jogar, já sabemos que deve jogar em G numa opção G^L. Pela definição de parada, $G^L - x = y - x < 0$, ou o valor de parada direita de G^L é ainda mais baixo que y. De toda forma, Right vence. $\square$

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$.
No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$.
No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$. Precisamos mostrar que Right vence jogando em segundo em $G - x$.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$.
No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$. Precisamos mostrar que RIGHT vence jogando em segundo em $G - x$. Novamente, LEFT escolhe alguma opção G^L em G.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$.
No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$. Precisamos mostrar que RIGHT vence jogando em segundo em $G - x$. Novamente, LEFT escolhe alguma opção G^L em G. Se o valor da parada direita de G^L é menor que x, terminamos.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$. Precisamos mostrar que Right vence jogando em segundo em $G - x$. Novamente, Left escolhe alguma opção G^L em G. Se o valor da parada direita de G^L é menor que x, terminamos. Caso contrário, temos que $RS(G^L) = x_R$ (não pode ser x_L pois $LS(G) = x_R$).

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) = x_R$. Precisamos mostrar que Right vence jogando em segundo em $G - x$. Novamente, Left escolhe alguma opção G^L em G. Se o valor da parada direita de G^L é menor que x, terminamos. Caso contrário, temos que $RS(G^L) = x_R$ (não pode ser x_L pois $LS(G) = x_R$). Ou seja, Right pode escolher uma opção cuja para para esquerda é x_R e podemos aplicar indução. □

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é maior que x então $G \geq x$ ou eles são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é maior que x então $G \geq x$ ou eles são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) \geq x_L$ (isso dá conta do caso que ficou faltando antes e do novo).

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é maior que x então $G \geq x$ ou eles são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) \geq x_L$ (isso dá conta do caso que ficou faltando antes e do novo). Então LEFT pode escolher G^L de forma que $RS(G^L) \geq x_L$.

Se o valor de $LS(G)$ é igual a x, então no caso que $LS(G) = x_R$, $G \leq x$. No caso que $LS(G) = x_L$, G e x são incomparáveis.

Se o valor de $LS(G)$ é maior que x então $G \geq x$ ou eles são incomparáveis.

Demonstração.
Suponha $LS(G) \geq x_L$ (isso dá conta do caso que ficou faltando antes e do novo). Então LEFT pode escolher G^L de forma que $RS(G^L) \geq x_L$. Então LEFT vence usando os casos já provados (trocando as posições). □

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável.

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável. Usando o resultado anterior, mais o seu dual (invertendo LEFT e RIGHT), temos que o intervalo de confusão é:

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável. Usando o resultado anterior, mais o seu dual (invertendo Left e Right), temos que o intervalo de confusão é:

- $[a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_R$;

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável. Usando o resultado anterior, mais o seu dual (invertendo LEFT e RIGHT), temos que o intervalo de confusão é:

- $[a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_R$;
- $]a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_L$;

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável. Usando o resultado anterior, mais o seu dual (invertendo LEFT e RIGHT), temos que o intervalo de confusão é:

- $[a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_R$;
- $]a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_L$;
- $[a, b[$ se $LS(G) = b_R$ e $RS(G) = a_R$;

Dado um jogo G, chamamos de intervalo de confusão os valores com os quais G é incomparável. Usando o resultado anterior, mais o seu dual (invertendo Left e Right), temos que o intervalo de confusão é:

- $[a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_R$;
- $]a, b]$ se $LS(G) = b_L$ e $RS(G) = a_L$;
- $[a, b[$ se $LS(G) = b_R$ e $RS(G) = a_R$;
- $]a, b[$ se $LS(G) = b_R$ e $RS(G) = a_L$;

Considere $G = \{*| - 1\}$.

Considere $G = \{*| -1\}$. Note que $LR(G) = -1_R$, enquanto que $LS(G) = 0_R$.

Considere $G = \{*| - 1\}$. Note que $LR(G) = -1_R$, enquanto que $LS(G) = 0_R$. Usando a tabela anterior, temos que o intervalo de confusão de G é $[-1, 0[$.

Teorema (do valor médio)
Para todo jogo curto G existe um número $m(G)$ (valor médio de G) e um número t tais que

$$n \cdot m(G) - t \leq n \cdot G \leq n \cdot m(G) + t$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (do valor médio)
Para todo jogo curto G existe um número $m(G)$ (valor médio de G) e um número t tais que

$$n \cdot m(G) - t \leq n \cdot G \leq n \cdot m(G) + t$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.
EXERCÍCIO (usa paradas). □

Usando a demonstração do resultado anterior, pode-se provar que, dados G e H jogos curtos, temos

Usando a demonstração do resultado anterior, pode-se provar que, dados G e H jogos curtos, temos

$$m(G + H) = m(G) + m(H)$$

Dizemos que um jogo G é

Dizemos que um jogo G é

- **frio** se G é um número;

Dizemos que um jogo G é

- **frio** se G é um número;
- **morno** se $LS(G) = RS(G)$ e G não é um número;

Dizemos que um jogo G é

- **frio** se G é um número;
- **morno** se $LS(G) = RS(G)$ e G não é um número;
- **quente** se $LS(G) > RS(G)$.

Dizemos que um jogo G é

- **frio** se G é um número;
- **morno** se $LS(G) = RS(G)$ e G não é um número;
- **quente** se $LS(G) > RS(G)$.

A ideia é que quanto mais quente, mais os jogadores gostariam de ser o primeiro a jogar nele.

De fato, se G é um número, evita-se jogar nele.

De fato, se G é um número, evita-se jogar nele.

Já em $\{4|-1\}$ ambos os jogadores gostariam de ser o primeiro.

Uma maneira de analisar um jogo quente é esfriando-o.

Uma maneira de analisar um jogo quente é esfriando-o.

A ideia "ingênua" é "você pode jogar primeiro, se você ceder t movimentos para o seu oponente".

Considere o jogo $\{2 | -2\}$. Ambos os jogadores gostariam de ser o primeiro.

Considere o jogo $\{2|-2\}$. Ambos os jogadores gostariam de ser o primeiro.

Poderíamos começar com o custo $t = 1$.

Considere o jogo $\{2|-2\}$. Ambos os jogadores gostariam de ser o primeiro.

Poderíamos começar com o custo $t = 1$. Teríamos os jogo $\{1|-1\}$ e ambos continuariam a querer começar.

Considere o jogo $\{2|-2\}$. Ambos os jogadores gostariam de ser o primeiro.

Poderíamos começar com o custo $t = 1$. Teríamos os jogo $\{1|-1\}$ e ambos continuariam a querer começar. Mas se colocarmos o custo $t = 3$, temos $\{-1|1\}$ e agora ambos ficam insatisfeitos.

Considere o jogo $\{4|2\}$.

Considere o jogo $\{4|2\}$. Se baixarmos a temperatura em 10, obtemos $\{-6|12\} = 0$.

Considere o jogo $\{4|2\}$. Se baixarmos a temperatura em 10, obtemos $\{-6|12\} = 0$. Mas se baixarmos em 1, obtemos $\{3|3\}$.

Considere o jogo $\{4|2\}$. Se baixarmos a temperatura em 10, obtemos $\{-6|12\} = 0$. Mas se baixarmos em 1, obtemos $\{3|3\}$. Se baixarmos com algum 1 pouco maior que 1, obtemos $\{3 - t|3 + t\} = 3$.

Considere o jogo $\{4|2\}$. Se baixarmos a temperatura em 10, obtemos $\{-6|12\} = 0$. Mas se baixarmos em 1, obtemos $\{3|3\}$. Se baixarmos com algum 1 pouco maior que 1, obtemos $\{3 - t|3 + t\} = 3$. A partir daqui, nenhum dos jogadores acha que compensa continuar baixando a temperatura - então dizemos que o jogo está congelado.

Considere o jogo $\{4|2\}$. Se baixarmos a temperatura em 10, obtemos $\{-6|12\} = 0$. Mas se baixarmos em 1, obtemos $\{3|3\}$. Se baixarmos com algum 1 pouco maior que 1, obtemos $\{3 - t|3 + t\} = 3$. A partir daqui, nenhum dos jogadores acha que compensa continuar baixando a temperatura - então dizemos que o jogo está congelado.

E dizemos que G tem temperatura t quando t é o menor valor para congelar o jogo.

No nosso exemplo, ficamos com

$$(\{4|2\})_t = \begin{cases} \{4-t|2+t\} & \text{se } t<1 \\ \{3|3\} & \text{se } t=1 \\ 3 & \text{se } t>1 \end{cases}$$

Considere

$$G = \{\{4|2\}| -2\}$$

Considere

$$G = \{\{4|2\}|-2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4-t|2+t\}-t|-2+t\} = \{\{4-2t|2\}|-2+t\}$$

Considere

$$G = \{\{4|2\}| - 2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4 - t|2 + t\} - t| - 2 + t\} = \{\{4 - 2t|2\}| - 2 + t\}$$

Note que para $t < 1$ a opção esquerda ainda é quente e a opção direita é menor.

Considere

$$G = \{\{4|2\}|-2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4-t|2+t\}-t|-2+t\} = \{\{4-2t|2\}|-2+t\}$$

Note que para $t < 1$ a opção esquerda ainda é quente e a opção direita é menor. Para $t = 1$, a opção esquerda torna-se $\{2|2\}$ e portanto congela.

Considere

$$G = \{\{4|2\}| -2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4-t|2+t\}-t|-2+t\} = \{\{4-2t|2\}|-2+t\}$$

Note que para $t < 1$ a opção esquerda ainda é quente e a opção direita é menor. Para $t = 1$, a opção esquerda torna-se $\{2|2\}$ e portanto congela.

Daí, para s pequeno, esfriando $t = 1 + s$, temos:

$$G_t = \{-s+2|-1+s\}$$

Considere

$$G = \{\{4|2\}| - 2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4 - t|2 + t\} - t| - 2 + t\} = \{\{4 - 2t|2\}| - 2 + t\}$$

Note que para $t < 1$ a opção esquerda ainda é quente e a opção direita é menor. Para $t = 1$, a opção esquerda torna-se $\{2|2\}$ e portanto congela.

Daí, para s pequeno, esfriando $t = 1 + s$, temos:

$$G_t = \{-s + 2| - 1 + s\}$$

que congela com $s = \frac{3}{2}$.

Considere

$$G = \{\{4|2\}| - 2\}$$

Para t pequeno o suficiente, temos

$$G_t = \{\{4 - t|2 + t\} - t| - 2 + t\} = \{\{4 - 2t|2\}| - 2 + t\}$$

Note que para $t < 1$ a opção esquerda ainda é quente e a opção direita é menor. Para $t = 1$, a opção esquerda torna-se $\{2|2\}$ e portanto congela.

Daí, para s pequeno, esfriando $t = 1 + s$, temos:

$$G_t = \{-s + 2| - 1 + s\}$$

que congela com $s = \frac{3}{2}$.

Obtemos $G_{\frac{5}{2}} = \{\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\}$.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para Left é não vazia se, e somente se, Right também for.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{ \mid \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para Left é não vazia se, e somente se, Right também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{ \mid \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal:

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{ \mid \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{\ |\ \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número. Note que $G + x > 0$ já que basta LEFT ficar jogando em G enquanto houver opções.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{ \mid \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número. Note que $G + x > 0$ já que basta LEFT ficar jogando em G enquanto houver opções. Analogamente, $G - x < 0$ e, portanto, $-x < G < x$.

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{\ |\ \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número. Note que $G + x > 0$ já que basta LEFT ficar jogando em G enquanto houver opções. Analogamente, $G - x < 0$ e, portanto, $-x < G < x$.

- $\uparrow = \{0|*\}$;

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para Left é não vazia se, e somente se, Right também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{\ |\ \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número. Note que $G + x > 0$ já que basta Left ficar jogando em G enquanto houver opções. Analogamente, $G - x < 0$ e, portanto, $-x < G < x$.

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $*n = \{0, *, *2, ..., *(n-1)|0, *, *2, ..., *(n-1)\}$ se $n > 0$;

Um jogo G é dito **bem pequeno** se (recursivamente) cada opção para LEFT é não vazia se, e somente se, RIGHT também for.

Equivalentemente, G é bem pequeno se, e somente se, $G = \{\ |\ \}$ ou $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são não vazios e formados por jogos bem pequenos.

Todo bem pequeno é infinitesimal: considere $x > 0$ número. Note que $G + x > 0$ já que basta LEFT ficar jogando em G enquanto houver opções. Analogamente, $G - x < 0$ e, portanto, $-x < G < x$.

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $*n = \{0, *, *2, ..., *(n-1)|0, *, *2, ..., *(n-1)\}$ se $n > 0$;
- $*0 = 0$.

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\uparrow * n > 0$ *se, e somente se,* $n \neq 1$.

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\uparrow *n > 0$ *se, e somente se,* $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta Left começar em $*$.

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta LEFT começar em $*$. Se RIGHT começa, basta jogar em $\uparrow$. Ou seja, $\uparrow * \in \mathcal{N}$ (e, portanto, $\uparrow *n \not> 0$);

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta LEFT começar em $*$. Se RIGHT começa, basta jogar em $\uparrow$. Ou seja, $\uparrow * \in \mathcal{N}$ (e, portanto, $\uparrow *n \not> 0$);
- $n > 1$: Se LEFT começa, basta jogar em $\uparrow$.

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta $\textsc{Left}$ começar em $*$. Se $\textsc{Right}$ começa, basta jogar em $\uparrow$. Ou seja, $\uparrow * \in \mathcal{N}$ (e, portanto, $\uparrow *n \not> 0$);
- $n > 1$: Se $\textsc{Left}$ começa, basta jogar em $\uparrow$. Se $\textsc{Right}$ começa, as opções são deixar o jogo em $\uparrow *n'$ (que é $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{L}$, ou seja, $\textsc{Right}$ perde) ou em $* + *n$, que também é perdedora.

$\square$

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta Left começar em $*$. Se Right começa, basta jogar em $\uparrow$. Ou seja, $\uparrow * \in \mathcal{N}$ (e, portanto, $\uparrow *n \not> 0$);
- $n > 1$: Se Left começa, basta jogar em $\uparrow$. Se Right começa, as opções são deixar o jogo em $\uparrow *n'$ (que é $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{L}$, ou seja, Right perde) ou em $* + *n$, que também é perdedora.

$\square$

Corolário
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > *m$ se, e somente se, $m \neq n \oplus 1$.

Lema
Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > 0$ se, e somente se, $n \neq 1$.

Demonstração.

- $n = 0$: $\uparrow *0 = \uparrow > 0$;
- $n = 1$: $\uparrow * = \{0|*\} + \{0, 0\}$. Basta LEFT começar em $*$. Se RIGHT começa, basta jogar em $\uparrow$. Ou seja, $\uparrow * \in \mathcal{N}$ (e, portanto, $\uparrow *n \not> 0$);
- $n > 1$: Se LEFT começa, basta jogar em $\uparrow$. Se RIGHT começa, as opções são deixar o jogo em $\uparrow *n'$ (que é $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{L}$, ou seja, RIGHT perde) ou em $* + *n$, que também é perdedora.

$\square$

Corolário
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $\uparrow *n > *m$ se, e somente se, $m \neq n \oplus 1$.

Demonstração.
Lembre que $*m = - * m$. Assim, $\uparrow *n > *m$ se, e somente se, $\uparrow *(n \oplus m) > 0$. $\square$

Com esses resultados, podemos provar o seguinte:

Com esses resultados, podemos provar o seguinte:

Proposição
A forma canônica de $\uparrow *n$ *é* $\{0|*(n \oplus 1)\}$.

Com esses resultados, podemos provar o seguinte:

Proposição
A forma canônica de $\uparrow *n$ *é* $\{0|*(n \oplus 1)\}$.

Demonstração.
Comece escrevendo $\uparrow *n = \{*n, \uparrow, ..., \uparrow *(n-1) | * + *n, \uparrow, ..., \uparrow *(n-1)\}$.

Com esses resultados, podemos provar o seguinte:

Proposição
A forma canônica de $\uparrow *n$ *é* $\{0 | *(n \oplus 1)\}$.

Demonstração.
Comece escrevendo $\uparrow *n = \{*n, \uparrow, ..., \uparrow *(n-1) | * + *n, \uparrow, ..., \uparrow *(n-1)\}$.

Use os resultados anteriores para tirar dominantes e reversíveis. □

O jogo da EMPILHADEIRA (FORKLIFT) é jogado da seguinte maneira:

O jogo da EMPILHADEIRA (FORKLIFT) é jogado da seguinte maneira:

LEFT pode pegar quantas caixas quiser da pilha mais à esquerda e colocar na pilha seguinte, desde que a altura que tenha sobrado na primeira seja menor ou igual a altura original da segunda.

O jogo da EMPILHADEIRA (FORKLIFT) é jogado da seguinte maneira:

LEFT pode pegar quantas caixas quiser da pilha mais à esquerda e colocar na pilha seguinte, desde que a altura que tenha sobrado na primeira seja menor ou igual a altura original da segunda.

RIGHT faz o mesmo, mas pegando da pilha mais à direita.

O jogo da EMPILHADEIRA (FORKLIFT) é jogado da seguinte maneira:

LEFT pode pegar quantas caixas quiser da pilha mais à esquerda e colocar na pilha seguinte, desde que a altura que tenha sobrado na primeira seja menor ou igual a altura original da segunda.

RIGHT faz o mesmo, mas pegando da pilha mais à direita.

É jogado com um número qualquer de pilhas.

O jogo da Empilhadeira (Forklift) é jogado da seguinte maneira:

Left pode pegar quantas caixas quiser da pilha mais à esquerda e colocar na pilha seguinte, desde que a altura que tenha sobrado na primeira seja menor ou igual a altura original da segunda.

Right faz o mesmo, mas pegando da pilha mais à direita.

É jogado com um número qualquer de pilhas.

Podemos representar o jogo como $\textsc{Empilhadeira}(a_1, ..., a_n)$ onde cada a_i indica quantas caixas existem na coluna i.

O jogo da EMPILHADEIRA (FORKLIFT) é jogado da seguinte maneira:

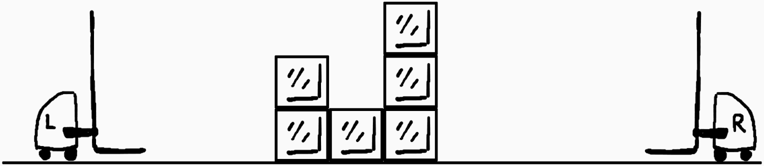
LEFT pode pegar quantas caixas quiser da pilha mais à esquerda e colocar na pilha seguinte, desde que a altura que tenha sobrado na primeira seja menor ou igual a altura original da segunda.

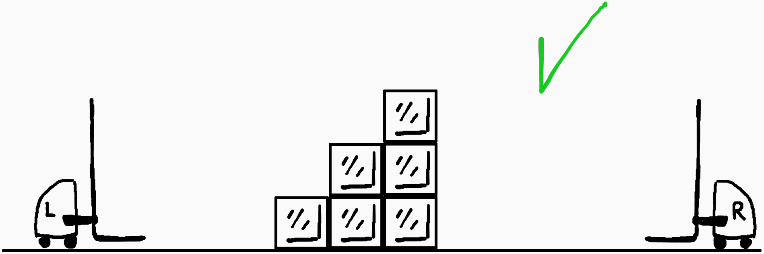
RIGHT faz o mesmo, mas pegando da pilha mais à direita.

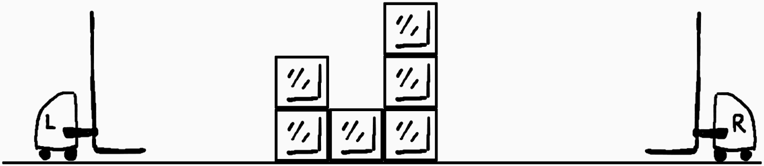
É jogado com um número qualquer de pilhas.

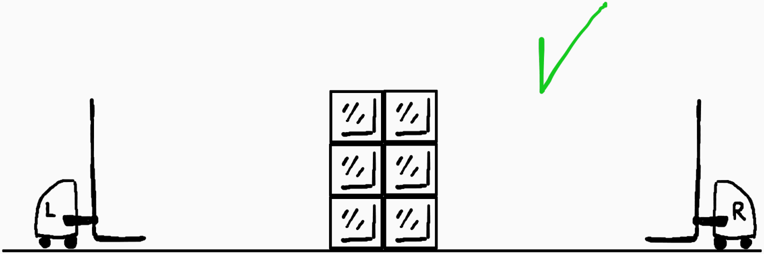
Podemos representar o jogo como EMPILHADEIRA$(a_1, \ldots, a_n)$ onde cada a_i indica quantas caixas existem na coluna i.

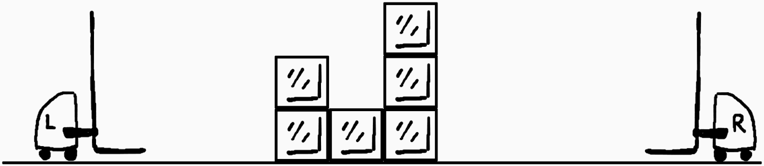
Vejamos o jogo EMPILHADEIRA$(2, 1, 3)$.

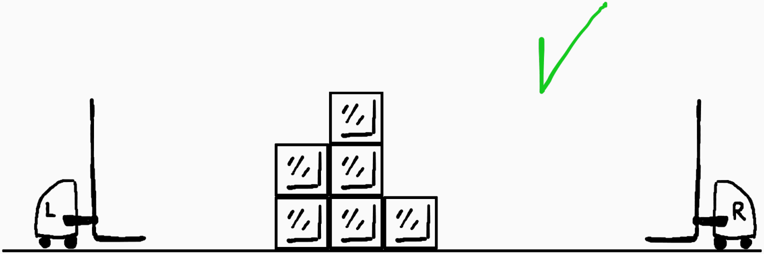

L
R

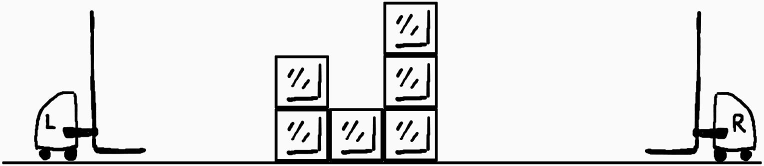

L
R

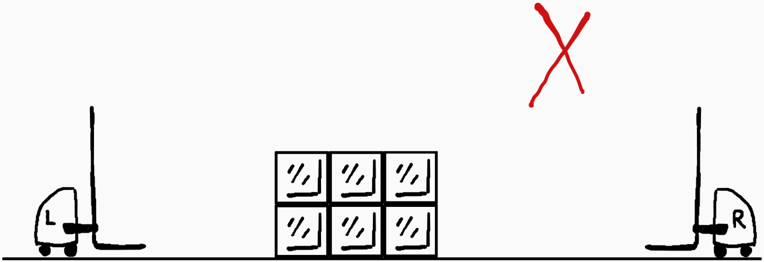

L
R


L
R


L
R


L
R


L
R


L
R

- $\textsc{Empilhadeira}(a_1) = \{ \mid \} = 0.$

- $\textsc{Empilhadeira}(a_1) = \{\ |\ \} = 0$.
- $\textsc{Empilhadeira}(1, a_2) = \{(a_2 + 1)|(a_2 + 1)\} = \{0|0\} = *$.

- $\textsc{Empilhadeira}(a_1) = \{\ |\ \} = 0$.
- $\textsc{Empilhadeira}(1, a_2) = \{(a_2 + 1)|(a_2 + 1)\} = \{0|0\} = *$.
- $\textsc{Empilhadeira}(2, 2 + i) = \{*, 0|*, 0\} = *2;]$

- $\textsc{Empilhadeira}(a_1) = \{\ |\ \} = 0$.
- $\textsc{Empilhadeira}(1, a_2) = \{(a_2 + 1)|(a_2 + 1)\} = \{0|0\} = *$.
- $\textsc{Empilhadeira}(2, 2 + i) = \{*, 0|*, 0\} = *2;]$
- $\textsc{Empilhadeira}(a, a + i) = *a$.

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ *um infinitesimal positivo.*

Definição

Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ um infinitesimal positivo. Dado $n \in \mathbb{N}_{>0}$, denotamos por G^n o jogo

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ *um infinitesimal positivo. Dado* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*, denotamos por* G^n *o jogo*

$$G^n = \{0|\mathcal{G}^R - G^1 - G^2 - \cdots - G^{n-1}\}$$

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ *um infinitesimal positivo. Dado* $n \in \mathbb{N}_{>0}$, *denotamos por* G^n *o jogo*

$$G^n = \{0|\mathcal{G}^R - G^1 - G^2 - \cdots - G^{n-1}\}$$

Exemplo
Considere $\uparrow = \{0|*\}$.

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ um infinitesimal positivo. Dado $n \in \mathbb{N}_{>0}$, denotamos por G^n o jogo

$$G^n = \{0|\mathcal{G}^R - G^1 - G^2 - \cdots - G^{n-1}\}$$

Exemplo
Considere $\uparrow = \{0|*\}$.

- $\uparrow^1 = \{0|*\}$;

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ um infinitesimal positivo. Dado $n \in \mathbb{N}_{>0}$, denotamos por G^n o jogo
$$G^n = \{0|\mathcal{G}^R - G^1 - G^2 - \cdots - G^{n-1}\}$$

Exemplo
Considere $\uparrow = \{0|*\}$.

- $\uparrow^1 = \{0|*\}$;
- $\uparrow^2 = \{0| * - \uparrow\} = \{0| * + \downarrow\}$;

Definição
Seja $\{0|\mathcal{G}^R\}$ *um infinitesimal positivo. Dado* $n \in \mathbb{N}_{>0}$, *denotamos por* G^n *o jogo*

$$G^n = \{0|\mathcal{G}^R - G^1 - G^2 - \cdots - G^{n-1}\}$$

Exemplo
Considere $\uparrow = \{0|*\}$.

- $\uparrow^1 = \{0|*\}$;
- $\uparrow^2 = \{0| * - \uparrow\} = \{0| * + \downarrow\}$;
- $\uparrow^3 = \{0| * + \downarrow - \{0| * + \downarrow\}\}$.

Dado G (normalmente $\uparrow$), denotamos

$$.i_1 i_2 \ldots = i_1 G + i_2 G^2 + \cdots$$

Dado G (normalmente $\uparrow$), denotamos

$$.i_1 i_2 ... = i_1 G + i_2 G^2 + \cdots$$

Exemplo
Fixando $G = \uparrow$:

Dado G (normalmente $\uparrow$), denotamos

$$.i_1 i_2 ... = i_1 G + i_2 G^2 + \cdots$$

Exemplo
Fixando $G = \uparrow$:

$$.2013 = 2\uparrow + 0\uparrow^2 + 1\uparrow^3 + 3\uparrow^4$$

Dado G (normalmente $\uparrow$), denotamos

$$.i_1 i_2 ... = i_1 G + i_2 G^2 + \cdots$$

Exemplo
Fixando $G = \uparrow$:

$$.2013 = 2\uparrow + 0\uparrow^2 + 1\uparrow^3 + 3\uparrow^4$$

No caso de coeficientes negativos, é comum usar uma barra:

Dado G (normalmente $\uparrow$), denotamos

$$.i_1 i_2 ... = i_1 G + i_2 G^2 + \cdots$$

Exemplo
Fixando $G = \uparrow$:

$$.2013 = 2 \uparrow + 0 \uparrow^2 + 1 \uparrow^3 + 3 \uparrow^4$$

No caso de coeficientes negativos, é comum usar uma barra:

$$.2\overline{1}1\overline{2} = 2 \uparrow - \uparrow^2 + \uparrow^3 - 2 \uparrow^4$$

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.
Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício:

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.
Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício: caso $n = 1$ é por hipótese.

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.
Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício: caso $n = 1$ é por hipótese. Nos outros casos, Left começando vence trivialmente.

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.
Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício: caso $n = 1$ é por hipótese. Nos outros casos, LEFT começando vence trivialmente. Já se RIGHT começa, ele tem que jogar em algum $G^R - G^1 - \cdots - G^{n-1}$.

Teorema

Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.

Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício: caso $n = 1$ é por hipótese. Nos outros casos, Left começando vence trivialmente. Já se Right começa, ele tem que jogar em algum $G^R - G^1 - \cdots - G^{n-1}$. Daí basta Left jogar em $-G^{n-1}$:

Teorema
Dados $G = \{0|\mathcal{G}^R\}$ *infinitesimal positivo e* $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ *temos* $G^n > mG^{n+1}$.

Demonstração.
Vamos mostrar que $G^n > 0$ deixando a outra parte como exercício: caso $n = 1$ é por hipótese. Nos outros casos, Left começando vence trivialmente. Já se Right começa, ele tem que jogar em algum $G^R - G^1 - \cdots - G^{n-1}$. Daí basta Left jogar em $-G^{n-1}$: o jogo fica em $G^R - G^1 - \cdots - G^{n-2} - (G^R - G^1 - \cdots G^{n-2}) = 0$. □

Limpe a lagoa

Limpe a lagoa

O tabuleiro é formado por uma fileira de quadrados.

Limpe a lagoa

O tabuleiro é formado por uma fileira de quadrados. Uma peça por casa, peças de Left movem para a direita e peças de Right movem para a esquerda.

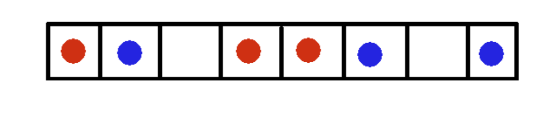
LIMPE A LAGOA

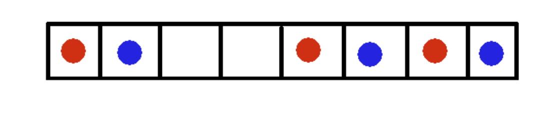
O tabuleiro é formado por uma fileira de quadrados. Uma peça por casa, peças de LEFT movem para a direita e peças de RIGHT movem para a esquerda. Cada peça pula quantas peças necessárias para alcançar uma casa vazia (ou sair do tabuleiro).

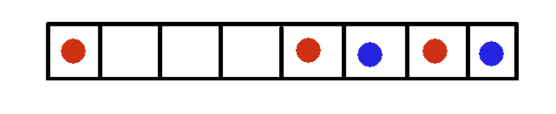
LIMPE A LAGOA

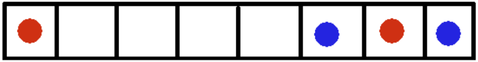
O tabuleiro é formado por uma fileira de quadrados. Uma peça por casa, peças de LEFT movem para a direita e peças de RIGHT movem para a esquerda. Cada peça pula quantas peças necessárias para alcançar uma casa vazia (ou sair do tabuleiro).

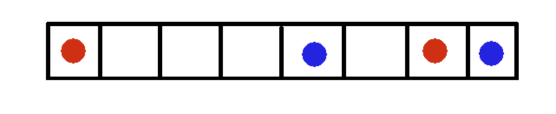
Na versão BEM PEQUENA, o jogo termina quando sobrarem peças de uma única cor.











Quando definimos quando dois jogos são iguais, dissemos que eles são equivalentes se a diferença entre eles era $\mathcal{P}$.

Quando definimos quando dois jogos são iguais, dissemos que eles são equivalentes se a diferença entre eles era $\mathcal{P}$. Para jogos "complicados", poderíamos fazer uma relação que dissesse que eles são equivalentes quando a diferença é um infinitesimal.

Quando definimos quando dois jogos são iguais, dissemos que eles são equivalentes se a diferença entre eles era $\mathcal{P}$. Para jogos "complicados", poderíamos fazer uma relação que dissesse que eles são equivalentes quando a diferença é um infinitesimal.

É claro que isso não serve muito para comparar infinitesimais...