

Introdução aos jogos combinatórios - Parte 4

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Com aniversário 0, só existe o jogo 0.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Com aniversário 0, só existe o jogo 0.

Com aniversário até 1, temos $1, -1, *, 0$.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim,

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas. Por exemplo, se duas opções aparecem para o mesmo jogador e elas são comparáveis, uma delas pode ser descartada.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas. Por exemplo, se duas opções aparecem para o mesmo jogador e elas são comparáveis, uma delas pode ser descartada.

Ou seja, as opções de um jogador sempre podem ser representadas por anticadeias (conjuntos cujos elementos são incomparáveis entre si).

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Só com isso, as possibilidades de jogos já se reduzem a escolher uma anticadeia para LEFT e uma para RIGHT: 36 jogos.

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Só com isso, as possibilidades de jogos já se reduzem a escolher uma anticadeia para LEFT e uma para RIGHT: 36 jogos.

Uma análise um pouco mais detalhada nestes jogos nos mostraria que na verdade, apenas 22 são distintos.

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n .

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo.

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G .

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G . Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G .

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G . Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G . Mas então LEFT pode jogar em n , deixando o jogo em $(n - 1) - G^L$.

Teorema

O maior jogo com aniversário até n é n .

Demonstração.

Seja G jogo com aniversário até n . Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G . Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G . Mas então LEFT pode jogar em n , deixando o jogo em $(n - 1) - G^L$. Mas em tal jogo vale indução (aniversário de G^L é até $n - 1$), dando vitória para LEFT. □

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$.

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$. Suponha x na forma canônica.

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$.

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n .

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n . Por indução, tal jogo é 2^{1-n} .

Teorema

O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n + 1$ é 2^{-n} .

Demonstração.

Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n + 1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n . Por indução, tal jogo é 2^{1-n} . Ou seja, $x = \{0|2^{1-n}\} = 2^{-n}$. □

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico.

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição

Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição

Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

$$LS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

$$RS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição

Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

$$LS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

$$RS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

Note que $LS(G)$ é o maior número em que LEFT consegue chegar, começando a jogar.

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

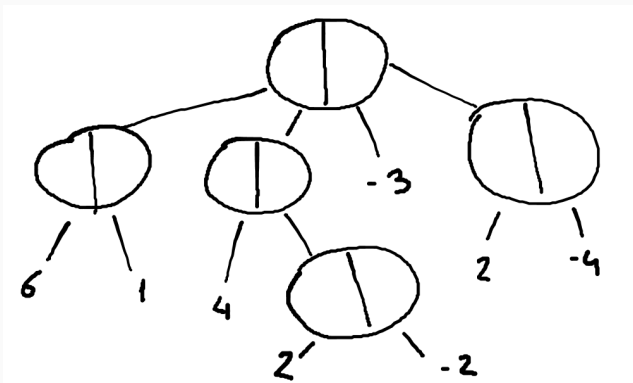
Definição

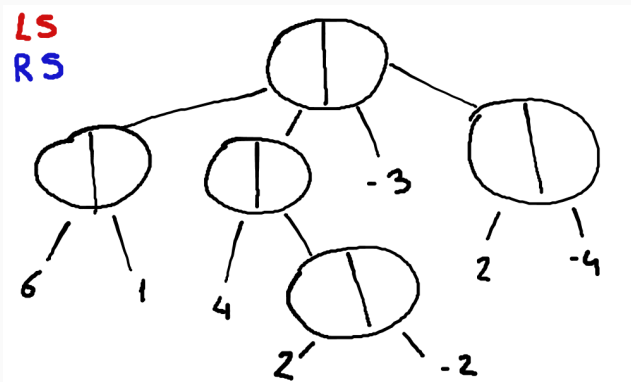
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (*left stop e right stop respectivamente*) recursivamente por

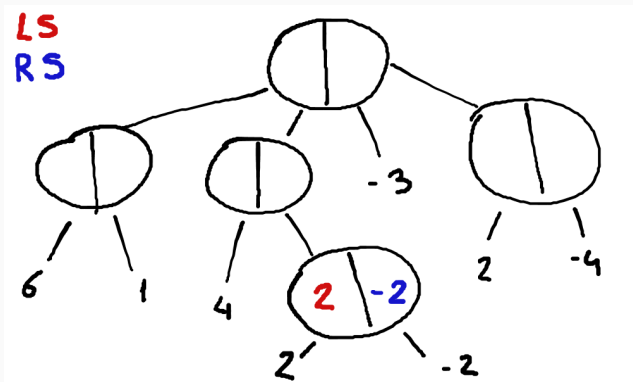
$$LS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

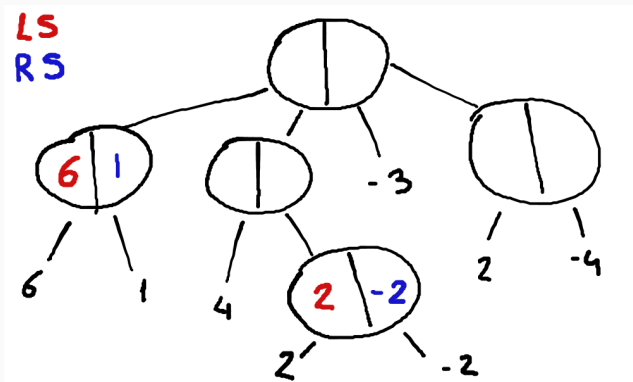
$$RS(G) = \begin{cases} G & \text{se } G \text{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \text{se } G \text{ não é um número} \end{cases}$$

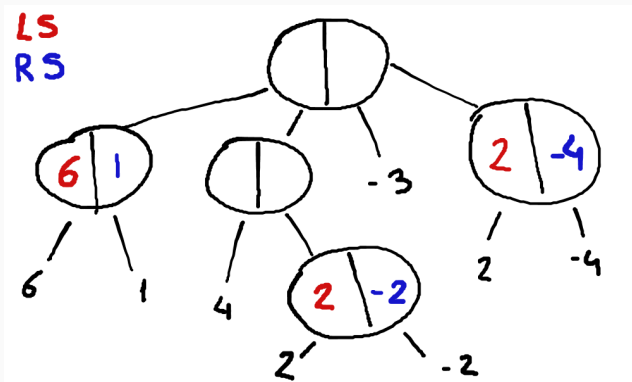
Note que $LS(G)$ é o maior número em que LEFT consegue chegar, começando a jogar. Já $RS(G)$ é o menor número que RIGHT consegue chegar, sendo o primeiro a jogar.

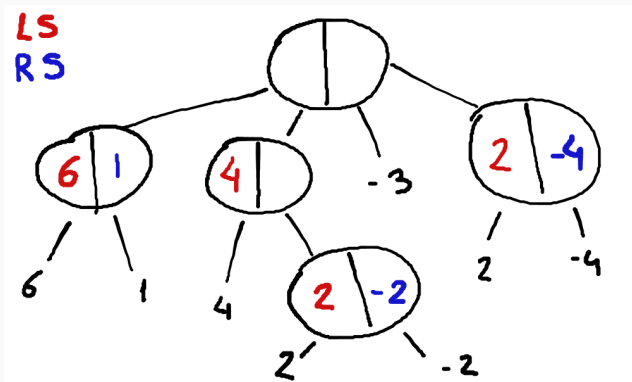


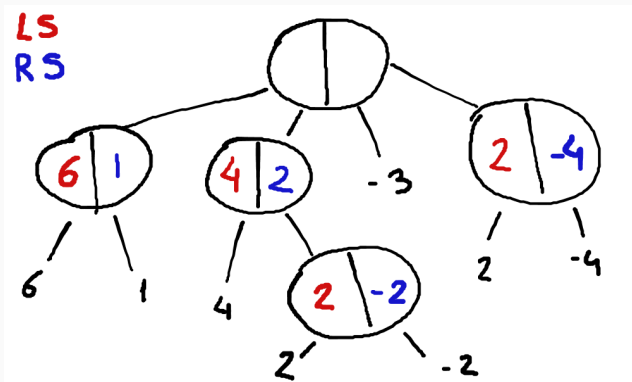


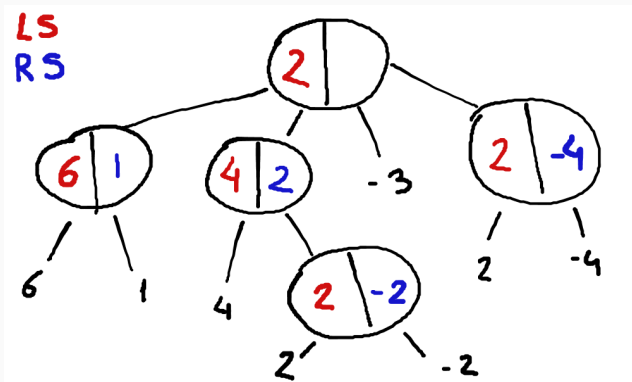


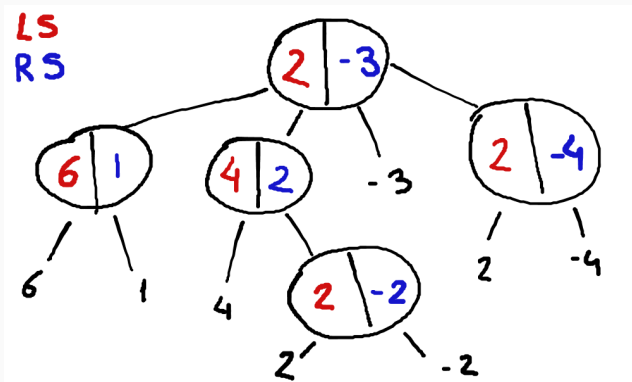












Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G .

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G . Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G . Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número. Mas, jogando assim, o máximo que LEFT pode obter é $LS(G)$, enquanto que o mínimo que RIGHT pode chegar é $RS(G)$.

Teorema

Para qualquer jogo G , $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.

Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G . Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número. Mas, jogando assim, o máximo que LEFT pode obter é $LS(G)$, enquanto que o mínimo que RIGHT pode chegar é $RS(G)$. Ambos são insuficientes para dar vitória ao primeiro jogador. \square

Teorema

$G \neq 0$ é infinitesimal se, e somente se, $LS(G) = 0 = RS(G)$.

Demonstração.

EXERCÍCIO.



Lembrando,

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;
- $\uparrow := \{*|0\}$;

Lembrando,

- $*$:= $\{0|0\}$;
- \uparrow := $\{0|*\}$;
- \uparrow := $\{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como “ \uparrow somado n vezes”.

Lembrando,

- $*$:= $\{0|0\}$;
- \uparrow := $\{0|*\}$;
- \uparrow := $\{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como “ \uparrow somado n vezes”. Também vamos usar $\uparrow * \uparrow$ como $\uparrow + *$.

Lembrando,

- $*$:= $\{0|0\}$;
- \uparrow := $\{0|*\}$;
- \uparrow := $\{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como “ \uparrow somado n vezes”. Também vamos usar $\uparrow *$ como $\uparrow + *$. Finalmente, $n \cdot \uparrow *$ significa $(n \cdot \uparrow) *$.

Temos as seguintes relações:

Temos as seguintes relações:

- $\downarrow < 0 < \uparrow$;

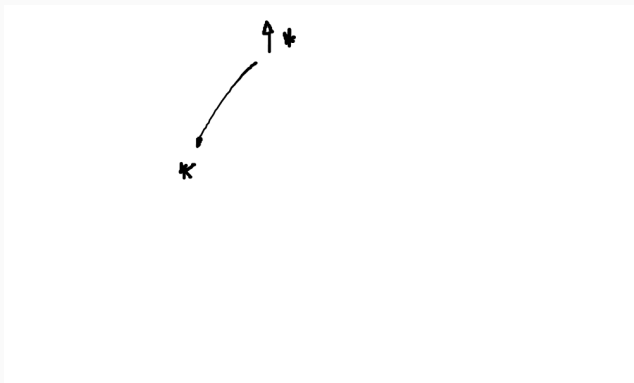
Temos as seguintes relações:

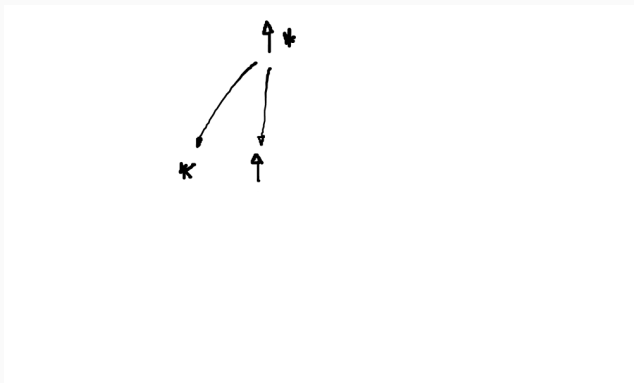
- $\downarrow < 0 < \uparrow$;
- \downarrow e $*$ são incomparáveis, assim como \uparrow e $*$;

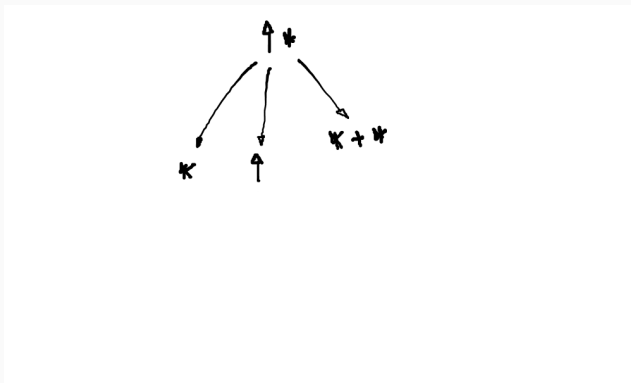
Temos as seguintes relações:

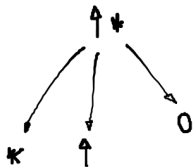
- $\downarrow < 0 < \uparrow$;
- \downarrow e $*$ são incomparáveis, assim como \uparrow e $*$;
- $\downarrow + \downarrow < * < \uparrow + \uparrow$.

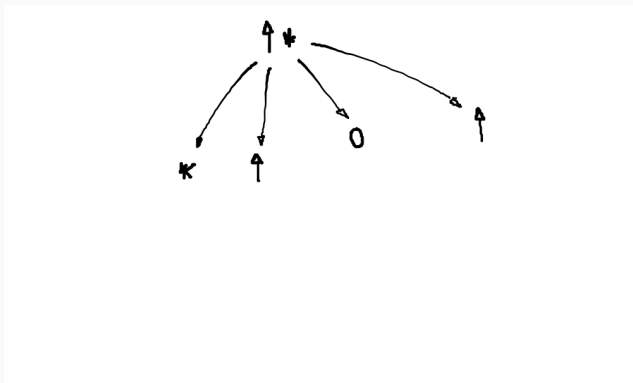


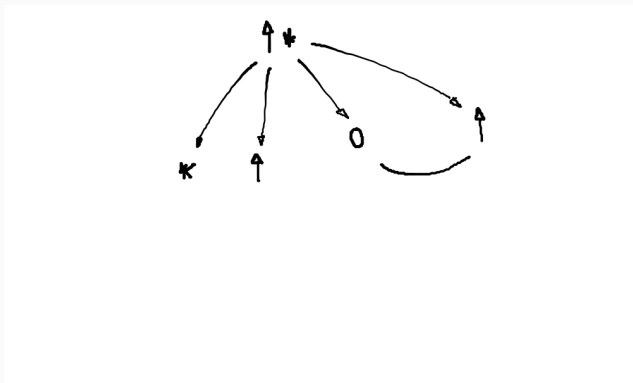


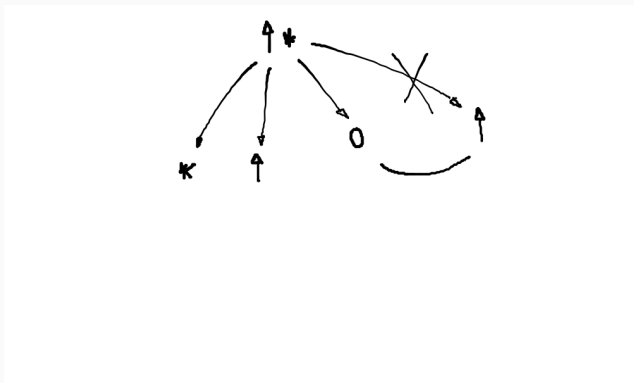


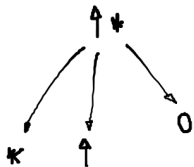


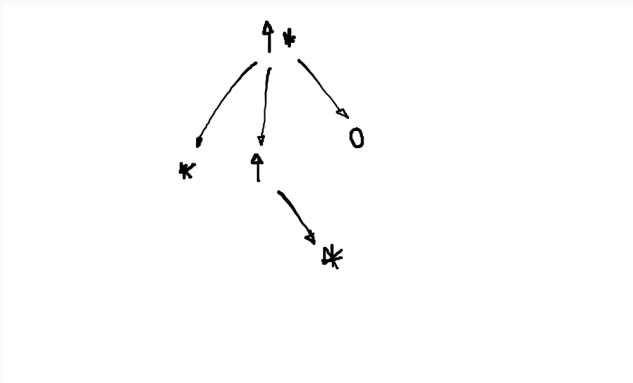


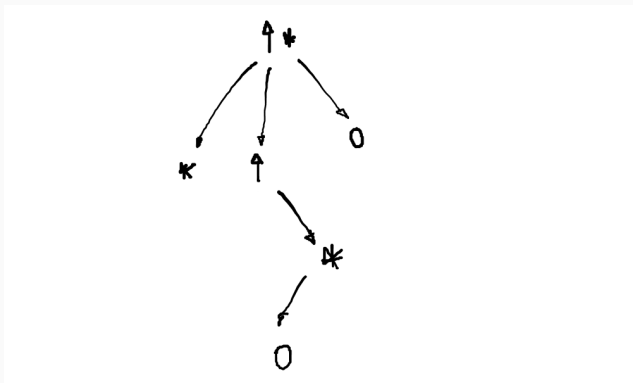


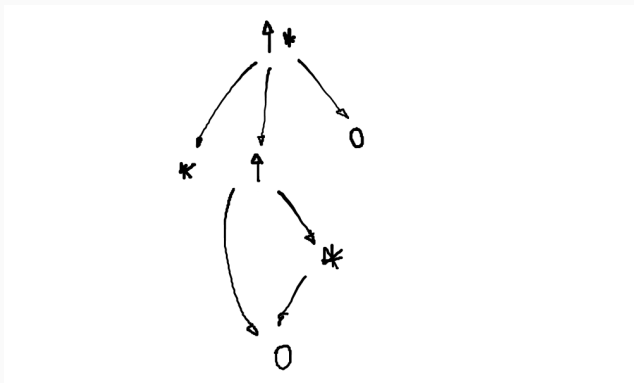


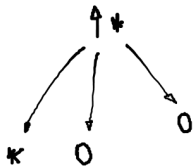




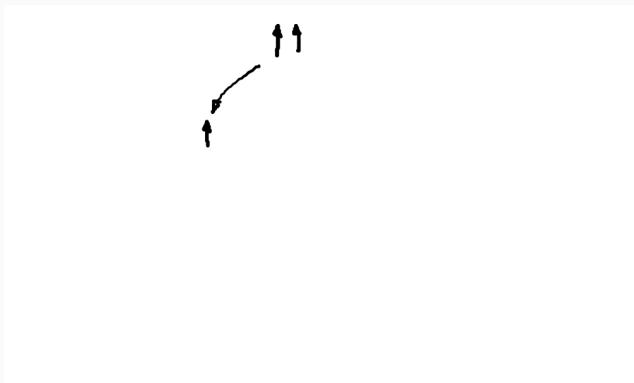


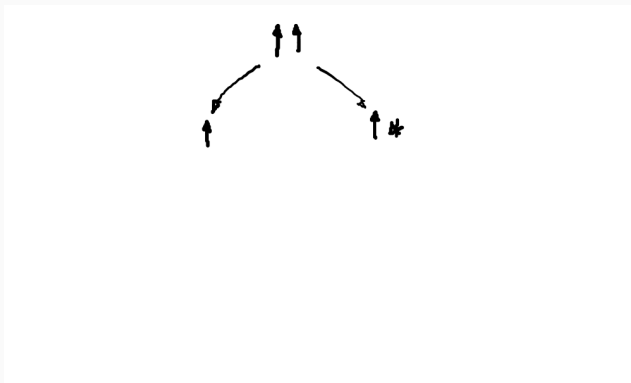


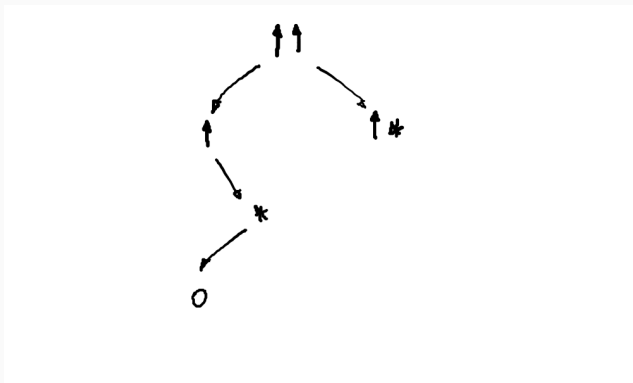


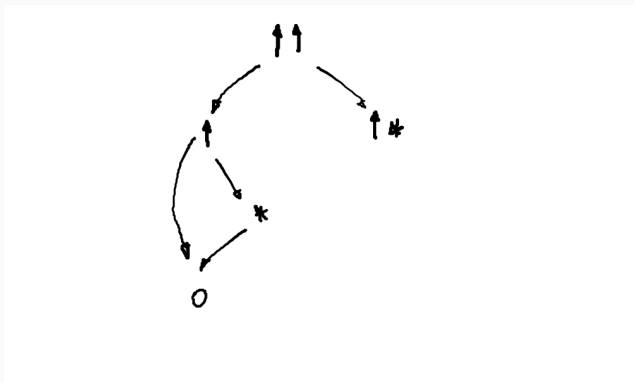


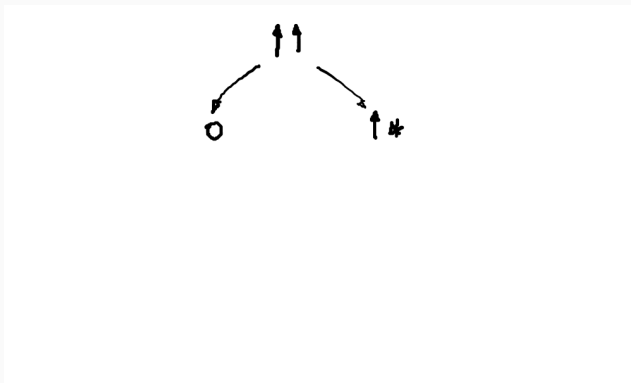












- $\uparrow = \{0|^*\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0| \uparrow *\}$;

- $\uparrow = \{0|\ast\}$;
- $\uparrow\ast = \{0,\ast|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow\ast\}$;
- $\uparrow\uparrow\ast = \{0|\uparrow\}$;

- $\uparrow = \{0|\ast\}$;
- $\uparrow \ast = \{0, \ast|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow \ast\}$;
- $\uparrow\uparrow \ast = \{0|\uparrow\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow\uparrow \ast\}$;

- $\uparrow = \{0|\ast\}$;
- $\uparrow\ast = \{0,\ast|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow\ast\}$;
- $\uparrow\uparrow\ast = \{0|\uparrow\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow\uparrow\ast\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow\ast = \{0|\uparrow\uparrow\}$.

$$n \cdot \uparrow = \{0 \mid (n-1) \cdot \uparrow * \}$$

$$n \cdot \uparrow = \{0|(n-1) \cdot \uparrow *\}$$

$$n \cdot \uparrow * = \begin{cases} \{0|(n-1) \cdot \uparrow\} & \text{se } n > 1; \\ \{0, *|0\} & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou

$G \leq n \cdot \uparrow^*$.

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou

$G \leq n \cdot \uparrow^*$.

Corolário

Se G é um infinitesimal com aniversário até $n + 1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou

$G \leq n \cdot \uparrow^*$.

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow^*$.

Corolário

Se G é um infinitesimal com aniversário até $n + 1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow^*$.

Demonstração do lema.

Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n + 1$.

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Corolário

Se G é um infinitesimal com aniversário até $n + 1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Demonstração do lema.

Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n + 1$.

Vamos jogar $n \cdot \uparrow - G$ e $n \cdot \uparrow * - G$ simultaneamente, com RIGHT jogando em primeiro em ambos.

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Corolário

Se G é um infinitesimal com aniversário até $n + 1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Demonstração do lema.

Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n + 1$.

Vamos jogar $n \cdot \uparrow - G$ e $n \cdot \uparrow * - G$ simultaneamente, com RIGHT jogando em primeiro em ambos. Precisamos mostrar que LEFT vence pelo menos um deles.

Lema

Se G tem aniversário até $n + 1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Corolário

Se G é um infinitesimal com aniversário até $n + 1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Demonstração do lema.

Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n + 1$.

Vamos jogar $n \cdot \uparrow - G$ e $n \cdot \uparrow * - G$ simultaneamente, com RIGHT jogando em primeiro em ambos. Precisamos mostrar que LEFT vence pelo menos um deles.

Se G é número, o resultado é trivial. □

Suponha RIGHT joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos.

Suponha RIGHT joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos. Se G^L é um número, terminamos.

Suponha RIGHT joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos. Se G^L é um número, terminamos. Se G^L não é um número, então existe uma opção $-G^{LR}$ para LEFT de forma que $LS(G^{LR}) \leq LS(G)$ e, portanto, podemos aplicar indução (note os aniversários e a comparação entre os infinitesimais).

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1) \cdot \uparrow * - G$ e $(n-1) \cdot \uparrow - G$.

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1) \cdot \uparrow * - G$ e $(n-1) \cdot \uparrow - G$. Então LEFT pode escolher G^R com LS minimal.

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1) \cdot \uparrow * - G$ e $(n-1) \cdot \uparrow - G$. Então LEFT pode escolher G^R com LS minimal. Note que

$$RS(G^R) \leq LS(G^R) = RS(G) \leq LS(G) \leq 0$$

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1) \cdot \uparrow * - G$ e $(n-1) \cdot \uparrow - G$. Então LEFT pode escolher G^R com LS minimal. Note que

$$RS(G^R) \leq LS(G^R) = RS(G) \leq LS(G) \leq 0$$

Ou seja, podemos aplicar indução.

Teorema

Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.

Teorema

Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.

Demonstração.

Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$.

Teorema

Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.

Demonstração.

Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número.

Teorema

Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.

Demonstração.

Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número. Assim, se mostrarmos que existe G^L de forma que $RG(G^L - G) \geq 0$, o lema anterior prova que $G^L - G \geq n \cdot \downarrow$ ou $G^L - G \geq n \cdot \downarrow *$ para n de forma que $n + 2$ seja o aniversário de $G^L - G$.

Teorema

Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.

Demonstração.

Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número. Assim, se mostrarmos que existe G^L de forma que $RG(G^L - G) \geq 0$, o lema anterior prova que $G^L - G \geq n \cdot \downarrow$ ou $G^L - G \geq n \cdot \downarrow *$ para n de forma que $n + 2$ seja o aniversário de $G^L - G$. Note que isso implica que $G^L - G$ é maior que qualquer número negativo. □

Seja G^L com maior parada para RIGHT.

Seja G^L com maior parada para RIGHT. Assim, $RS(G^L) = LS(G)$.

Seja G^L com maior parada para RIGHT. Assim, $RS(G^L) = LS(G)$.
Mostre que $RS(G^L - G) \geq 0$ EXERCÍCIO.

Teorema (Tradução numérica)

Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Teorema (Tradução numérica)

Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Demonstração.

Por definição,

$$G + x = \{\mathcal{G}^L + x, G + x^L | \mathcal{G}^R + x, G + x^R\}.$$

Teorema (Tradução numérica)

Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Demonstração.

Por definição,

$$G + x = \{\mathcal{G}^L + x, G + x^L | \mathcal{G}^R + x, G + x^R\}.$$

Pelo TEN, $G + x^L$ e $G + x^R$, se existirem, são dominadas. □

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição

Se G é imparcial, então $G = -G$.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição

Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que LEFT tem opções em H se, e somente se, RIGHT tem.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição

Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que LEFT tem opções em H se, e somente se, RIGHT tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição

Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que LEFT tem opções em H se, e somente se, RIGHT tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Tínhamos visto que todo bem pequeno é infinitesimal.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição

Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que LEFT tem opções em H se, e somente se, RIGHT tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Tínhamos visto que todo bem pequeno é infinitesimal.

Em particular, todo imparcial é infinitesimal.

O jogo NIM é jogado da seguinte forma: diversas pilhas de fichas são apresentadas, cada jogador escolhe uma pilha (não vazia) e remove quantas pilhas dessa pilha ele quiser (pelo menos uma).

Considerando-se uma única pilha:

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*
2	{0,* 0,*}	

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*
2	{0,* 0,*}	*2

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*
2	{0,* 0,*}	*2
3	{0,*,*2 0,*,*2}	

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*
2	{0,* 0,*}	*2
3	{0,*,*2 0,*,*2}	*3

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	{ }	0
1	{0 0}	*
2	{0,* 0,*}	*2
3	{0,*,*2 0,*,*2}	*3

Definição

*O valor de uma pilha de n fichas é $*n$.*

Teorema

Dado $n \geq 0$,

$$*n = \{0, 1, *2, \dots, *(n-1) | 0, 1, *2, \dots, *(n-1)\}$$

e tal representação é canônica - ou seja, não há opções dominadas ou reversíveis.

Teorema

Dado $n \geq 0$,

$$*n = \{0, 1, *2, \dots, *(n-1) | 0, 1, *2, \dots, *(n-1)\}$$

e tal representação é canônica - ou seja, não há opções dominadas ou reversíveis.

EXERCÍCIO: Mostre que $*i$ e $*j$ são incomparáveis se $i \neq j$. Use isso para provar o teorema acima.

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $mex(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $\text{mex}(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $\text{mex}(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;
- $\text{mex}(\{3, 7\}) = 0$;

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $mex(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;
- $mex(\{3, 7\}) = 0$;
- $mex(\emptyset) = 0$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $mex(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = mex(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $mex(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = mex(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $\text{mex}(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = \text{mex}(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $\text{mex}(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = \text{mex}(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $mex(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = mex(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $mex(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = mex(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$. Tal opção precisa ter sido feita em G deixando o jogo em $*k - *n$.

Proposição

Considere $G = \{ *l_1, \dots, *l_a \mid *r_1, \dots, *r_b \}$ e suponha $\text{mex}(\{ *l_1, \dots, *l_a \}) = \text{mex}(\{ *r_1, \dots, *r_b \}) = n$. Então $G = *n$.

Demonstração.

Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$. Tal opção precisa ter sido feita em G deixando o jogo em $*k - *n$. Mas então o segundo jogador pode escolher $*n$ em $*k$, deixando o jogo em $*n - *n = 0$. □

Teorema

*Todo jogo imparcial é equivalente a um NIM. Isto é, dado G imparcial, existe n tal que $G = *n$.*

Teorema

*Todo jogo imparcial é equivalente a um NIM. Isto é, dado G imparcial, existe n tal que $G = *n$.*

Demonstração.

Por indução, todas as opções de G são um algum NIM.

Teorema

*Todo jogo imparcial é equivalente a um NIM. Isto é, dado G imparcial, existe n tal que $G = *n$.*

Demonstração.

Por indução, todas as opções de G são um algum NIM. Então podemos aplicar o resultado anterior. □

25

$$25 \underline{) 2}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 1 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 1 & 12 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 1 & 12 & 2 \\ & 0 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 2} \\ 1 \ 12 \overline{) 2} \\ \quad 0 \ 6 \overline{) 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 2} \\ 1 \quad 12 \quad \overline{) 2} \\ \quad 0 \quad 6 \quad \overline{) 2} \\ \qquad 0 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 2} \\ 1 \ 12 \overline{) 2} \\ \quad 0 \ 6 \overline{) 2} \\ \qquad 0 \ 3 \overline{) 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 2} \\ 1 \ 12 \overline{) 2} \\ \quad 0 \ 6 \overline{) 2} \\ \qquad 0 \ 3 \overline{) 2} \\ \qquad\qquad 1 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 1 & 12 & 2 \\ & 0 & 6 & 2 \\ & & 0 & 3 & 2 \\ & & & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 2} \\ 1 \ 12 \overline{) 2} \\ \quad 0 \ 6 \overline{) 2} \\ \qquad 0 \ 3 \overline{) 2} \\ \qquad\qquad 1 \ 1 \end{array}$$

$$25 = 11001$$

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-NIM como $a \oplus b$ dada por “soma na base 2 sem vai um” - ou xor (ou exclusivo).

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-NIM como $a \oplus b$ dada por “soma na base 2 sem vai um” - ou xor (ou exclusivo).

Por exemplo: 12 na base 2 é 1100. Já 5 é 101. Assim:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 12 \oplus 7 = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-NIM como $a \oplus b$ dada por “soma na base 2 sem vai um” - ou xor (ou exclusivo).

Por exemplo: 12 na base 2 é 1100. Já 5 é 101. Assim:

$$12 \oplus 7 = \begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Proposição

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

Proposição

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

- $a \oplus b = b \oplus a$;

Proposição

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;

Proposição

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- $a \oplus a = 0$;

Proposição

Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- $a \oplus a = 0$;
- $a \oplus b \oplus c = 0$ se, e somente se, $a \oplus b = c$.

Teorema

Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

Teorema

Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

- (a) toda opção de uma posição em A está em B ;*

Teorema

Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

- (a) toda opção de uma posição em A está em B ;*
- (b) toda posição em B tem ao menos uma opção em A .*

Teorema

Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

- (a) toda opção de uma posição em A está em B ;*
- (b) toda posição em B tem ao menos uma opção em A .*

Então A coincide com as posições em \mathcal{P} e B coincide com posições em \mathcal{N} .

Vamos usar $\text{NIM}(a_1, \dots, a_n)$ para indicar o jogo NIM com n pilhas, cada uma com a_i fichas.

Vamos usar $\text{NIM}(a_1, \dots, a_n)$ para indicar o jogo NIM com n pilhas, cada uma com a_i fichas.

Teorema

O jogo $\text{NIM}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$. Considere, sem perda de generalidade, o movimento de remover $r > 0$ fichas da pilha 1.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$. Considere, sem perda de generalidade, o movimento de remover $r > 0$ fichas da pilha 1. Então $(a_1 - r) \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ como desejado.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q .

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \dots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \dots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

Primeiramente, note que é um movimento válido: x é menor que a_1 .

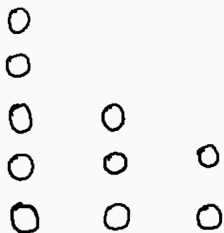
Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q . Como $q_j = 1$, algum dos a_i 's precisar ter valor 1 na j -ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

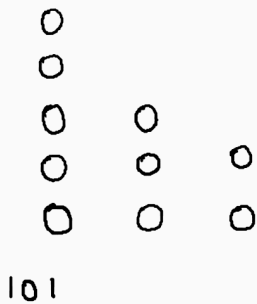
Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

Primeiramente, note que é um movimento válido: x é menor que a_1 .

Vejamos que a nova soma é nula:

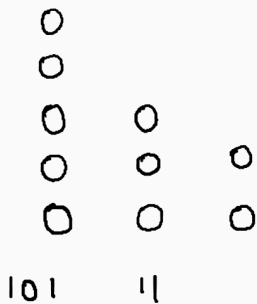
$$(q \oplus a_1) \oplus \cdots \oplus a_n = q \oplus (a_1 \oplus \cdots \oplus a_n) = q \oplus q = 0.$$

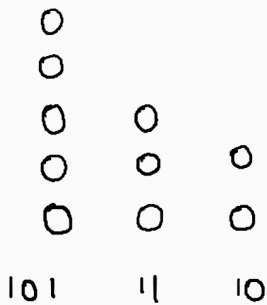




○
○
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○

101





			101
0			11
0			10
0	0		
0	0	0	
0	0	0	
101	11	10	

0		
0		
0	0	
0	0	0
0	0	0
101	11	10

101
11
10
<hr/>
1000

	0	
	0	0
0	0	0
1	1	10

101
11
10
<hr/>
100

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}$$
$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \end{array}$$

		o	
		o	o
o	o	o	o
1	11	10	

		-
	-	-
-	o	
o	/	

	o	o
o	o	o
1	10	10

$$\frac{0}{0}$$

	0	0
0	0	0
1	10	10

	-
1	0
1	0

	o	o
o	o	o
1	10	10

	-
1	o
1	o
<hr/>	
	-