Introdução aos jogos combinatórios - Parte 4

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Com aniversário 0, só existe o jogo 0.

Lembre que o aniversário de um jogo indica a altura de sua árvore.

As opções de um jogo fixado tem aniversários menores que o do próprio jogo.

Com aniversário 0, só existe o jogo 0.

Com aniversário até 1, temos $1, -1, *, 0$.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim,

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas. Por exemplo, se duas opções aparecem para o mesmo jogador e elas são comparáveis, uma delas pode ser descartada.

Com aniversário até 2, temos que cada jogador vai ter um subconjunto de opções cujos aniversários são até 1. Existem 2^4 conjuntos assim, desta forma teríamos $2^4 2^4 = 2^8 = 256$ jogos.

Mas muitas dessas opções podem ser descartadas. Por exemplo, se duas opções aparecem para o mesmo jogador e elas são comparáveis, uma delas pode ser descartada.

Ou seja, as opções de um jogador sempre podem ser representadas por anticadeias (conjuntos cujos elementos são incomparáveis entre si).

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Só com isso, as possibilidades de jogos já se reduzem a escolher uma anticadeia para Left e uma para Right: 36 jogos.

Com jogos com aniversário até 1, temos apenas 6 anticadeias:

$$\{1\}, \{0, *\}, \{0\}, \{*\}, \{-1\}, \{\}$$

Só com isso, as possibilidades de jogos já se reduzem a escolher uma anticadeia para Left e uma para Right: 36 jogos.

Uma análise um pouco mais detalhada nestes jogos nos mostraria que na verdade, apenas 22 são distintos.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n *é* n.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$- ou seja, Left vence jogando em segundo.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$- ou seja, Left vence jogando em segundo. Note que começando, Right só tem opções em G.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$- ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G. Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$- ou seja, Left vence jogando em segundo. Note que começando, Right só tem opções em G. Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G. Mas então Left pode jogar em n, deixando o jogo em $(n-1) - G^L$.

Teorema
O maior jogo com aniversário até n é n.

Demonstração.
Seja G jogo com aniversário até n. Precisamos mostrar que $n - G \in \mathcal{P}$- ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Note que começando, RIGHT só tem opções em G. Ou seja, deixando o jogo em $n - G^L$ para algum G^L opção de G. Mas então LEFT pode jogar em n, deixando o jogo em $(n-1) - G^L$. Mas em tal jogo vale indução (aniversário de G^L é até $n-1$), dando vitória para LEFT. $\square$

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ *é* 2^{-n}.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ *é* 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ é 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$. Suponha x na forma canônica.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ é 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ é 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ é 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n. Por indução, tal jogo é 2^{1-n}.

Teorema
O jogo de menor valor numérico positivo com aniversário até $n+1$ é 2^{-n}.

Demonstração.
Suponha $x > 0$ de valor numérico e com aniversário até $n+1$. Suponha x na forma canônica. Então $x = \{y|z\}$, com $0 \leq y < z$. Para x ter o menor valor possível, precisamos $y = 0$ e z o menor numérico positivo com aniversário até n. Por indução, tal jogo é 2^{1-n}. Ou seja, $x = \{0|2^{1-n}\} = 2^{-n}$. □

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico.

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí Left tenta parar na de maior valor e Right na de menor.

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

$$LS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

$$RS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí LEFT tenta parar na de maior valor e RIGHT na de menor.

Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

$$LS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

$$RS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

Note que $LS(G)$ é o maior número em que LEFT consegue chegar, começando a jogar.

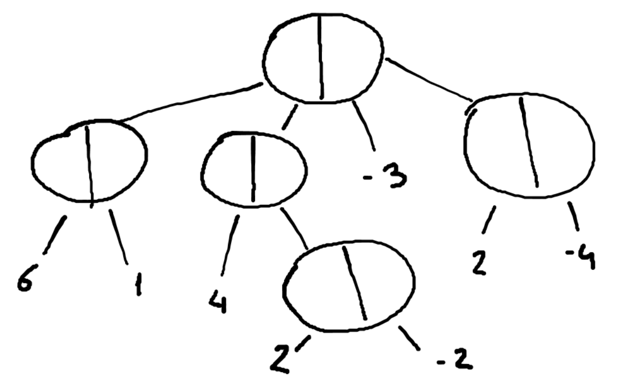
Intuição: Os jogadores combinam de jogar até encontrar uma posição de valor numérico. Daí Left tenta parar na de maior valor e Right na de menor.

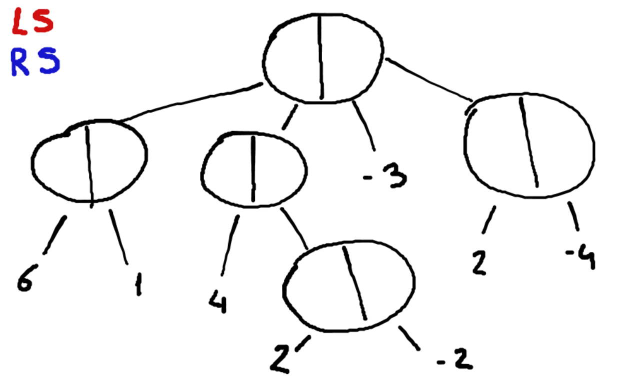
Definição
Definimos $LS(G)$ e $RS(G)$ (left stop e right stop respectivamente) recursivamente por

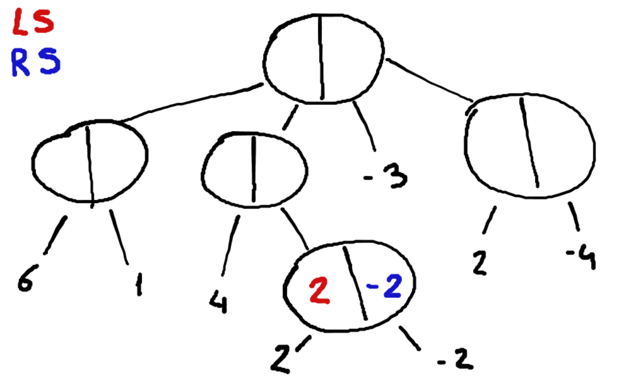
$$LS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \max(RS(G^L)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

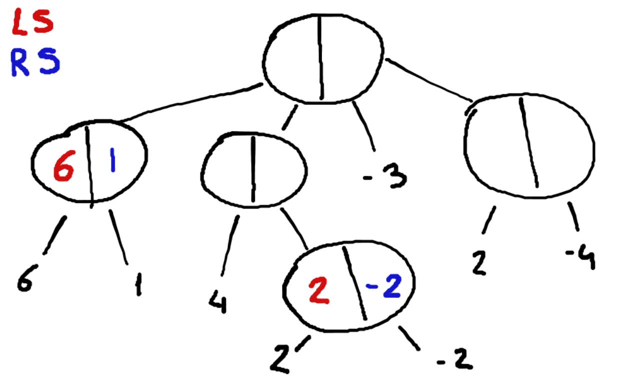
$$RS(G) = \begin{cases} G & \textit{se } G \textit{ é um número} \\ \min(LS(G^R)) & \textit{se } G \textit{ não é um número} \end{cases}$$

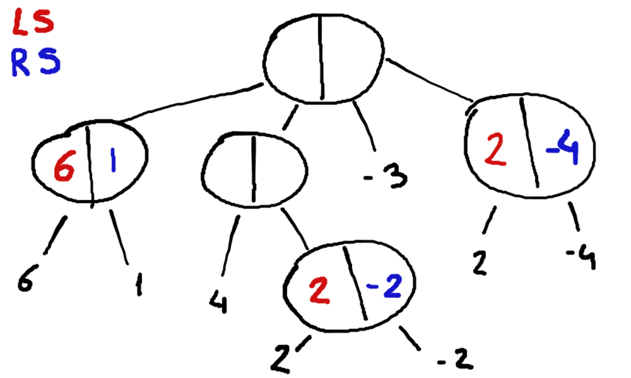
Note que $LS(G)$ é o maior número em que Left consegue chegar, começando a jogar. Já $RS(G)$ é o menor número que Right consegue chegar, sendo o primeiro a jogar.

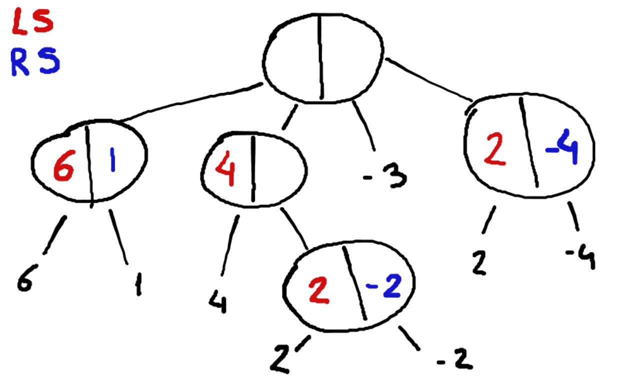

6
1
4
-3
2
-2
2
-4

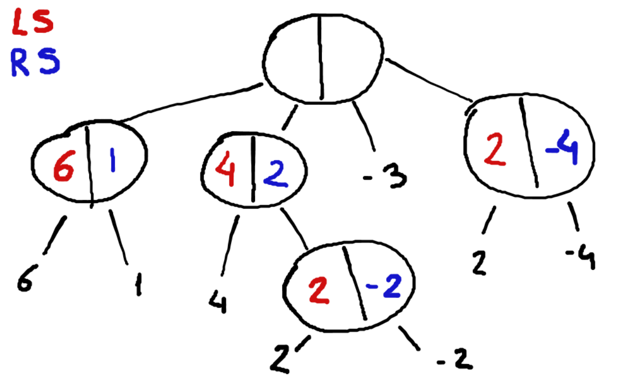

LS
RS
-3
6
1
4
2
-4
2
-2

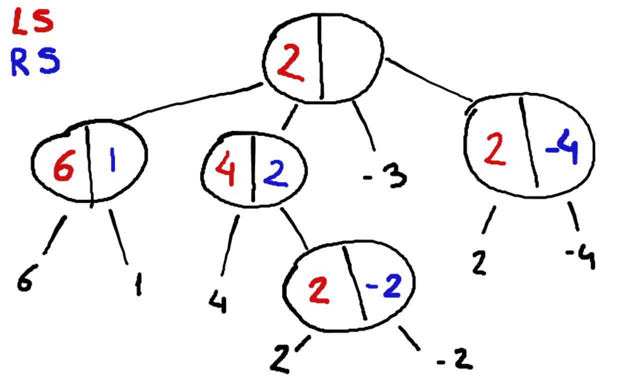

LS
RS
-3
6
1
4
2
-2
2
-4
2
-2

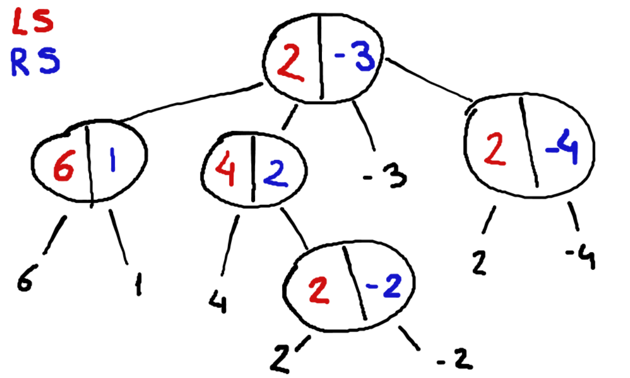

LS
RS
6
1
-3
6
1
4
2
-2
2
-4
2
-2


LS
RS
6
1
2
-4
-3
2
-2
6
1
4
2
-4
2
-2


LS
RS
6
1
4
-3
2
-4
6
1
4
2
-2
2
-4
2
-2


LS
RS
6
1
4
2
-3
2
-4
6
1
4
2
-2
2
-4
2
-2


LS
RS
2
6
1
4
2
-3
2
-4
6
1
4
2
-2
2
-4
2
-2



LS
RS
2 | -3
6 | 1
4 | 2
-3
2 | -4
6
1
4
2 | -2
2
-4
2
-2

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G. Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G. Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número. Mas, jogando assim, o máximo que LEFT pode obter é $LS(G)$, enquanto que o mínimo que RIGHT pode chegar é $RS(G)$.

Teorema
Para qualquer jogo G, $LS(G) \geq RS(G)$.

Demonstração.
Se G é número, $LS(G) = G = RS(G)$. Suponha que G não é número e suponha a falsidade do teorema. Isto é, $LS(G) < RS(G)$. Assim, existe um número x tal que $LS(G) < x < RS(G)$.

Note que se mostrarmos que $G - x \in \mathcal{P}$, obtemos uma contradição (G seria um número).

Note que, pelo TENF, se houver uma jogada vencedora em $G - x$, ela está em G. Assim, ambos jogadores jogam em G até obter um número. Mas, jogando assim, o máximo que Left pode obter é $LS(G)$, enquanto que o mínimo que Right pode chegar é $RS(G)$. Ambos são insuficientes para dar vitória ao primeiro jogador. $\square$

Teorema
$G \neq 0$ é infinitesimal se, e somente se, $LS(G) = 0 = RS(G)$.

Demonstração.
EXERCÍCIO. $\square$

Lembrando,

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;
- $\uparrow := \{*|0\}$;

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;
- $\uparrow := \{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como "$\uparrow$ somado n vezes".

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;
- $\uparrow := \{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como "$\uparrow$ somado n vezes". Também vamos usar $\uparrow *$ como $\uparrow + *$.

Lembrando,

- $* := \{0|0\}$;
- $\uparrow := \{0|*\}$;
- $\uparrow := \{*|0\}$;

Se $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $n \cdot \uparrow$ como "$\uparrow$ somado n vezes". Também vamos usar $\uparrow *$ como $\uparrow + *$. Finalmente, $n \cdot \uparrow *$ significa $(n \cdot \uparrow) *$.

Temos as seguintes relações:

Temos as seguintes relações:

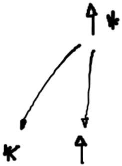
- $\downarrow < 0 < \uparrow$;

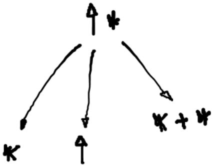
Temos as seguintes relações:

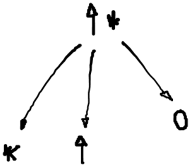
- $\downarrow < 0 < \uparrow$;
- $\downarrow$ e $*$ são incomparáveis, assim como $\uparrow$ e $*$;

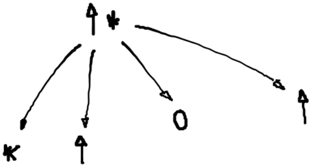
Temos as seguintes relações:

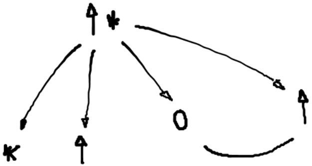
- $\downarrow < 0 < \uparrow$;
- $\downarrow$ e $*$ são incomparáveis, assim como $\uparrow$ e $*$;
- $\downarrow + \downarrow < * < \uparrow + \uparrow$.

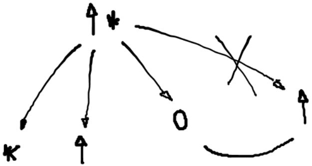


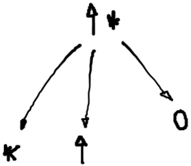

↑*
K
↑
K + *

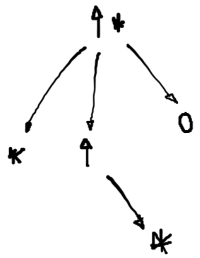


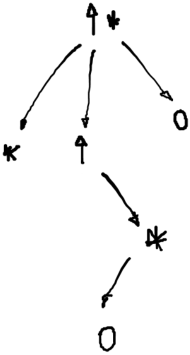


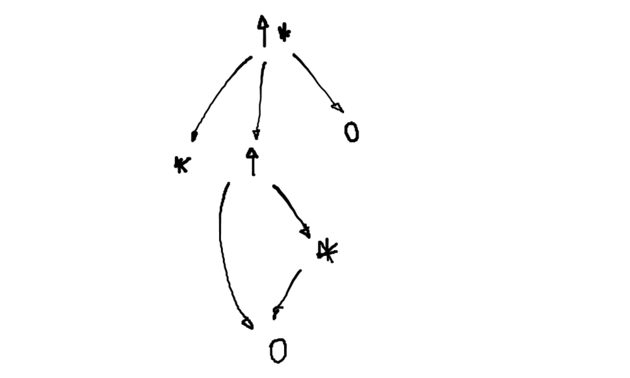


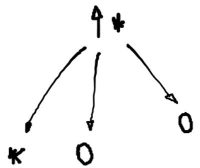


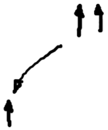


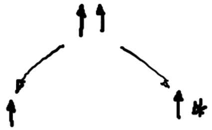


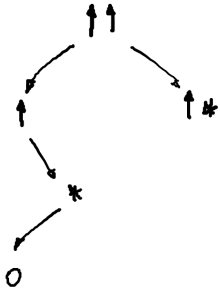


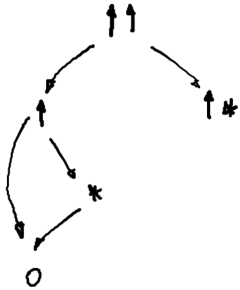


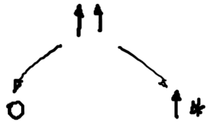

*
*
0
0











- $\uparrow = \{0|*\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0| \uparrow *\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow *\}$;
- $\uparrow\uparrow * = \{0|\uparrow\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;
- $\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow *\}$;
- $\uparrow\uparrow * = \{0|\uparrow\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow = \{0|\uparrow\uparrow *\}$;

- $\uparrow = \{0|*\}$;
- $\uparrow * = \{0, *|0\}$;
- $\Uparrow = \{0| \uparrow *\}$;
- $\Uparrow * = \{0| \uparrow\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow = \{0| \Uparrow *\}$;
- $\uparrow\uparrow\uparrow * = \{0| \Uparrow\}$.

$$n\cdot\uparrow = \{0 | (n-1)\cdot\uparrow *\}$$

$$n \cdot \uparrow = \{0 | (n-1) \cdot \uparrow *\}$$

$$n \cdot \uparrow * = \begin{cases} \{0 | (n-1) \cdot \uparrow\} & \text{se } n > 1; \\ \{0, * | 0\} & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Corolário
Se G é um infinitesimal com aniversário até $n+1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Corolário
Se G é um infinitesimal com aniversário até $n+1$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Demonstração do lema.
Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como Exercício) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n+1$.

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Corolário
Se G é um infinitesimal com aniversário até $n+1$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Demonstração do lema.
Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n+1$.

Vamos jogar $n\cdot\uparrow - G$ e $n\cdot\uparrow * - G$ simultaneamente, com RIGHT jogando em primeiro em ambos.

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Corolário
Se G é um infinitesimal com aniversário até $n+1$, então $G \leq n \cdot \uparrow$ ou $G \leq n \cdot \uparrow *$.

Demonstração do lema.
Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como Exercício) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n+1$.

Vamos jogar $n \cdot \uparrow -G$ e $n \cdot \uparrow * - G$ simultaneamente, com Right jogando em primeiro em ambos. Precisamos mostrar que Left vence pelo menos um deles.

Lema
Se G tem aniversário até $n+1$ com $LS(G) \leq 0$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Corolário
Se G é um infinitesimal com aniversário até $n+1$, então $G \leq n\cdot\uparrow$ ou $G \leq n\cdot\uparrow *$.

Demonstração do lema.
Seja $n \geq 2$ (os casos menores ficam como EXERCÍCIO) e seja G com $LS(G) \leq 0$ com aniversário até $n+1$.

Vamos jogar $n\cdot\uparrow -G$ e $n\cdot\uparrow * - G$ simultaneamente, com RIGHT jogando em primeiro em ambos. Precisamos mostrar que LEFT vence pelo menos um deles.

Se G é número, o resultado é trivial. □

Suponha RIGHT joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos.

Suponha Right joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos. Se G^L é um número, terminamos.

Suponha Right joga em $-G$ para $-G^L$ em algum dos jogos. Se G^L é um número, terminamos. Se G^L não é um número, então existe uma opção $-G^{LR}$ para Left de forma que $LS(G^{LR}) \leq LS(G)$ e, portanto, podemos aplicar indução (note os aniversários e a comparação entre os infinitesimais).

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1)\cdot\uparrow * - G$ e $(n-1)\cdot\uparrow - G$.

Suponha que RIGHT joga ambos os jogos para $(n-1)\cdot\uparrow * - G$ e $(n-1)\cdot\uparrow - G$. Então LEFT pode escolher G^R com LS minimal.

Suponha que Right joga ambos os jogos para $(n-1)\cdot\uparrow * - G$ e $(n-1)\cdot\uparrow - G$. Então Left pode escolher G^R com LS minimal. Note que

$$RS(G^R) \leq LS(G^R) = RS(G) \leq LS(G) \leq 0$$

Suponha que Right joga ambos os jogos para $(n-1)\cdot\uparrow * - G$ e $(n-1)\cdot\uparrow - G$. Então Left pode escolher G^R com LS minimal. Note que

$$RS(G^R) \leq LS(G^R) = RS(G) \leq LS(G) \leq 0$$

Ou seja, podemos aplicar indução.

Teorema
Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT *e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.*

Teorema
Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT *e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que* $G^L + x > G + x^L$.

Demonstração.
Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$.

Teorema
Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT *e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.*

Demonstração.
Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número.

Teorema
Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para LEFT *e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.*

Demonstração.
Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número. Assim, se mostrarmos que existe G^L de forma que $RG(G^L - G) \geq 0$, o lema anterior prova que $G^L - G \geq n \cdot \downarrow$ ou $G^L - G \geq n \cdot \downarrow *$ para n de forma que $n + 2$ seja o aniversário de $G^L - G$.

Teorema
Suponha x um número na forma canônica que possua uma opção para $\textsc{Left}$ *e suponha que G não é um número. Então existe G^L tal que $G^L + x > G + x^L$.*

Demonstração.
Note que isso é o mesmo que provar que $G^L - G > x^L - x$. Note que $x^L - x < 0$ e $x^L - x$ é um número. Assim, se mostrarmos que existe G^L de forma que $RG(G^L - G) \geq 0$, o lema anterior prova que $G^L - G \geq n \cdot \downarrow$ ou $G^L - G \geq n \cdot \downarrow *$ para n de forma que $n + 2$ seja o aniversário de $G^L - G$. Note que isso implica que $G^L - G$ é maior que qualquer número negativo. $\square$

Seja G^L com maior parada para Right.

Seja G^L com maior parada para RIGHT. Assim, $RS(G^L) = LS(G)$.

Seja G^L com maior parada para RIGHT. Assim, $RS(G^L) = LS(G)$.
Mostre que $RS(G^L - G) \geq 0$ EXERCÍCIO.

Teorema (Tradução numérica)
Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Teorema (Tradução numérica)
Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Demonstração.
Por definição,

$$G + x = \{\mathcal{G}^L + x, G + x^L | \mathcal{G}^R + x, G + x^R\}.$$

Teorema (Tradução numérica)
Se x é um número e G não é, então $G + x = \{\mathcal{G}^L + x | \mathcal{G}^R + x\}$.

Demonstração.
Por definição,

$$G + x = \{\mathcal{G}^L + x, G + x^L | \mathcal{G}^R + x, G + x^R\}.$$

Pelo TEN, $G + x^L$ e $G + x^R$, se existirem, são dominadas. $\square$

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição
Se G é imparcial, então $G = -G$.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de Left são as mesmas que as de Right.

Proposição
Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que Left tem opções em H se, e somente se, Right tem.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de LEFT são as mesmas que as de RIGHT.

Proposição
Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que LEFT tem opções em H se, e somente se, RIGHT tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de Left são as mesmas que as de Right.

Proposição
Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que Left tem opções em H se, e somente se, Right tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Tínhamos visto que todo bem pequeno é infinitesimal.

Lembrando: um jogo é imparcial se sempre as opções de Left são as mesmas que as de Right.

Proposição
Se G é imparcial, então $G = -G$.

Outro lembrete, um jogo G é bem pequeno se toda opção H é tal que Left tem opções em H se, e somente se, Right tem.

Trivialmente, todo jogo imparcial é bem pequeno.

Tínhamos visto que todo bem pequeno é infinitesimal.

Em particular, todo imparcial é infinitesimal.

O jogo NIM é jogado da seguinte forma: diversas pilhas de fichas são apresentadas, cada jogador escolhe uma pilha (não vazia) e remove quantas pilhas dessa pilha ele quiser (pelo menos uma).

Considerando-se uma única pilha:

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{ \mid \}$	0

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	$*2$

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	$*2$
3	$\{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$	

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	$*2$
3	$\{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$	$*3$

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{ \mid \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	$*2$
3	$\{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$	$*3$

Definição
O valor de uma pilha de n fichas é $*n$.

Considerando-se uma única pilha:

fichas	jogo	valor
0	$\{\ \mid\ \}$	0
1	$\{0 \mid 0\}$	$*$
2	$\{0, * \mid 0, *\}$	$*2$
3	$\{0, *, *2 \mid 0, *, *2\}$	$*3$

Definição
O valor de uma pilha de n fichas é $*n$.

Fazemos o abuso de denotar $0 = *0$ e $1 = *1$.

Teorema
Dado $n \geq 0$*,*

$$*n = \{0, *, *2, ..., *(n-1) | 0, *, *2, ..., *(n-1)\}$$

e tal representação é canônica - ou seja, não há opções dominadas ou reversíveis.

Teorema
Dado $n \geq 0$*,*

$$*n = \{0, *, *2, ..., *(n-1) | 0, *, *2, ..., *(n-1)\}$$

e tal representação é canônica - ou seja, não há opções dominadas ou reversíveis.

EXERCÍCIO: Mostre que $*i$ e $*j$ são incomparáveis se $i \neq j$. Use isso para provar o teorema acima.

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $mex(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $mex(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;
- $mex(\{3, 7\}) = 0$;

Dado $X \subset \mathbb{N}$, denotamos por $mex(X) = \min \mathbb{N} \setminus X$.

Exemplos:

- $mex(\{0, 1, 2, 4, 10\}) = 3$;
- $mex(\{3, 7\}) = 0$;
- $mex(\emptyset) = 0$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | * r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | *r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a| * r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | *r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | *r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$. Note que, de fato, $k \neq n$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | * r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$. Note que, de fato, $k \neq n$. Tal opção precisa ter sido feita em G deixando o jogo em $*k - *n$.

Proposição
Considere $G = \{*l_1, ..., *l_a | *r_1, ..., *r_b\}$ *e suponha* $mex(\{l_1, ..., l_a\}) = mex(\{r_1, ..., r_b\}) = n$. *Então* $G = *n$.

Demonstração.
Vamos provar que $G - *n \in \mathcal{P}$. Suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$, com $k < n$ em algum dos jogos. Note que o segundo jogador pode deixar o jogo em $*k - *k = 0$.

Agora suponha que o primeiro jogador escolhe $*k$ com $k \geq n$. Note que, de fato, $k \neq n$. Tal opção precisa ter sido feita em G deixando o jogo em $*k - *n$. Mas então o segundo jogador pode escolher $*n$ em $*k$, deixando o jogo em $*n - *n = 0$. $\square$

Teorema
Todo jogo imparcial é equivalente a um $\textsc{Nim}$. *Isto é, dado* G *imparcial, existe* n *tal que* $G = *n$.

Teorema
Todo jogo imparcial é equivalente a um NIM*. Isto é, dado G imparcial, existe n tal que $G = *n$.*

Demonstração.
Por indução, todas as opções de G são um algum NIM.

Teorema
Todo jogo imparcial é equivalente a um NIM. *Isto é, dado G imparcial, existe n tal que $G = *n$.*

Demonstração.
Por indução, todas as opções de G são um algum NIM. Então podemos aplicar o resultado anterior. $\square$

25

$$25 \underline{|\,2\quad}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 2 \\ \hline 1 & 12 \end{array}$$

25 |2
1 12 |2

$$\begin{array}{llll} 25 & \underline{|\,2\qquad} & & \\ 1 & 12 & \underline{|\,2\qquad} & \\ & 0 & 6 & \end{array}$$

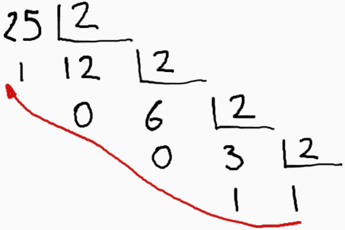
Passando para base 2

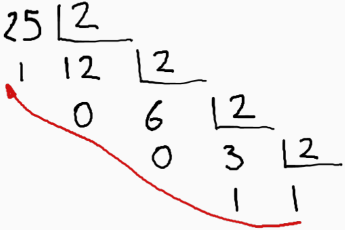
$$\begin{array}{lllll} 25 & \underline{|\,2\quad} & & & \\ 1 & 12 & \underline{|\,2\quad} & & \\ & 0 & 6 & \underline{|\,2\quad} & \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
25 & \underline{|\,2\;\;\;} & & \\
1 & 12 & \underline{|\,2\;\;\;} & \\
 & 0 & 6 & \underline{|\,2\;\;\;} \\
 & & 0 & 3
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccc}
25 & \lfloor\underline{2\quad} & & & \\
1 & 12 & \lfloor\underline{2\quad} & & \\
 & 0 & 6 & \lfloor\underline{2\quad} & \\
 & & 0 & 3 & \lfloor\underline{2\quad}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lllll}
25 & \underline{|2} & & & \\
1 & 12 & \underline{|2} & & \\
 & 0 & 6 & \underline{|2} & \\
 & & 0 & 3 & \underline{|2} \\
 & & & 1 & 1
\end{array}
$$


25 2
1 12 2
0 6 2
0 3 2
1 1



25 = 11001

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-Nim como $a \oplus b$ dada por "soma na base 2 sem vai um" - ou xor (ou exclusivo).

Soma-Nim

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-$\textsc{Nim}$ como $a \oplus b$ dada por "soma na base 2 sem vai um" - ou xor (ou exclusivo).

Por exemplo: 12 na base 2 é 1100. Já 5 é 101. Assim:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 12 \oplus 7 = & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Soma-Nim

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a Soma-NIM como $a \oplus b$ dada por "soma na base 2 sem vai um" - ou xor (ou exclusivo).

Por exemplo: 12 na base 2 é 1100. Já 5 é 101. Assim:

$$12 \oplus 7 = \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Proposição
Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, *temos*

Proposição
Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, *temos*

- $a \oplus b = b \oplus a$;

Proposição
Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;

Proposição
Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, *temos*

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- $a \oplus a = 0$;

Proposição
Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, *temos*

- $a \oplus b = b \oplus a$;
- $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- $a \oplus a = 0$;
- $a \oplus b \oplus c = 0$ *se, e somente se,* $a \oplus b = c$.

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Teorema
Considere um jogo imparcial e suponha que exista uma partição em dois conjuntos A e B sobre as posições do jogo satisfazendo

(a) *toda opção de uma posição em A está em B;*

(b) *toda posição em B tem ao menos uma opção em A.*

Então A coincide com as posições em $\mathcal{P}$ e B coincide com posições em $\mathcal{N}$.

Vamos usar $\textsc{Nim}(a_1, ..., a_n)$ para indicar o jogo $\textsc{Nim}$ com n pilhas, cada uma com a_i fichas.

Vamos usar $\textsc{Nim}(a_1, \ldots, a_n)$ para indicar o jogo $\textsc{Nim}$ com n pilhas, cada uma com a_i fichas.

Teorema
O jogo $\textsc{Nim}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$ *se, e somente se,* $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$. Considere, sem perda de generalidade, o movimento de remover $r > 0$ fichas da pilha 1.

Usando o último resultado, só precisamos provar que se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, então toda opção tem soma não nula e que, se $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$, então existe uma opção cuja soma é nula.

Suponha $a_1 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$. Considere, sem perda de generalidade, o movimento de remover $r > 0$ fichas da pilha 1. Então $(a_1 - r) \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$ como desejado.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

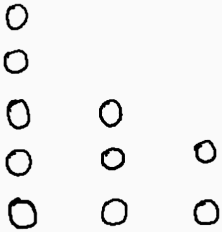
Primeiramente, note que é um movimento válido: x é menor que a_1.

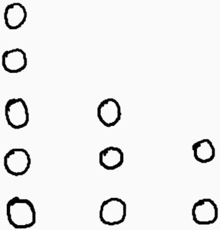
Agora suponha $q = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$. Considere $q_j \cdots q_0$ a expansão binária de q. Como $q_j = 1$, algum dos a_i's precisar ter valor 1 na j-ésima casa de sua expansão. Sem perda de generalidade, suponha ser a_1 com tal propriedade.

Considere $x = q \oplus a_1$. Vamos provar que remover fichas da pilha 1 de forma que sobrem x fichas resolve o que queremos.

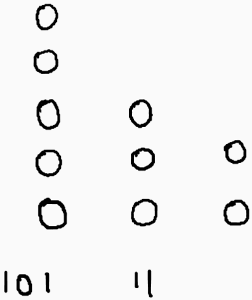
Primeiramente, note que é um movimento válido: x é menor que a_1.

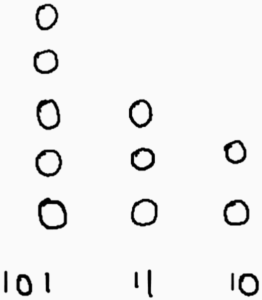
Vejamos que a nova soma é nula:
$(q \oplus a_1) \oplus \cdots \oplus a_n = q \oplus (a_1 \oplus \cdots \oplus a_n) = q \oplus q = 0$.

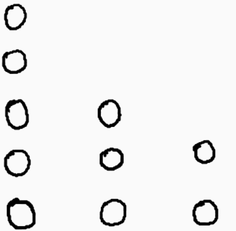




101

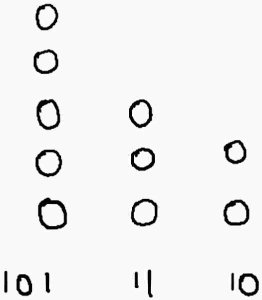

101
11


101
11
10

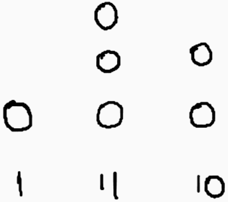


101 11 10

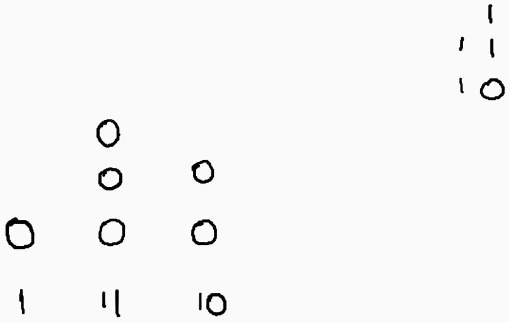
```
101
 11
 10
```

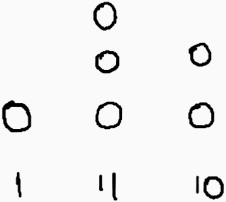


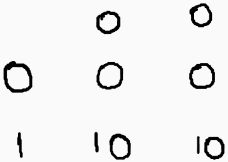
$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

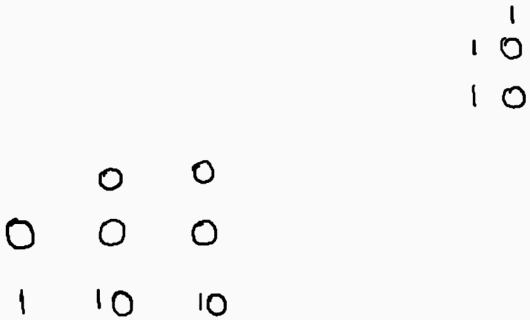


$$\begin{array}{r} 101 \\ 11 \\ 10 \\ \hline 100 \end{array}$$

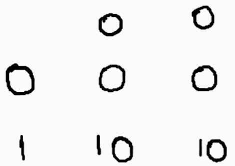

1
11
10
1
11
10


1
11
10




1
1 0
1 0
1 10 10

```
  1
 10
 10
----
  1
```



Teorema
Daods $k, j \in \mathbb{N}$ *temos que* $*k + *j = *(k \oplus j)$.

Teorema
Daods $k, j \in \mathbb{N}$ *temos que* $*k + *j = *(k \oplus j)$.

Demonstração.
Considere o jogo $\textsc{Nim}(k, j, k \oplus j)$.

Teorema
Daods $k, j \in \mathbb{N}$ *temos que* $*k + *j = *(k \oplus j)$.

Demonstração.
Considere o jogo $\textsc{Nim}(k, j, k \oplus j)$. Temos que tal jogo é $\mathcal{P}$. Assim $*k + *j + *(k \oplus j) = 0$.

Teorema
Daods $k, j \in \mathbb{N}$ *temos que* $*k + *j = *(k \oplus j)$.

Demonstração.
Considere o jogo $\textsc{Nim}(k, j, k \oplus j)$. Temos que tal jogo é $\mathcal{P}$. Assim $*k + *j + *(k \oplus j) = 0$. Logo, $*k + *j = *(k \oplus j)$. $\square$

Teorema
Daods $k, j \in \mathbb{N}$ *temos que* $*k + *j = *(k \oplus j)$.

Demonstração.
Considere o jogo $\textsc{Nim}(k, j, k \oplus j)$. Temos que tal jogo é $\mathcal{P}$. Assim $*k + *j + *(k \oplus j) = 0$. Logo, $*k + *j = *(k \oplus j)$. $\square$

A mesma coisa vale com mais termos (indução).

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n.

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n. Cada valor é chamado de **nimber**.

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n. Cada valor é chamado de **nimber**. Dado um jogo G, denotamos por $\mathcal{G}(G)$ seu valor, chamado de **valor-nim** ou **valor-Grundy**.

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n. Cada valor é chamado de **nimber**. Dado um jogo G, denotamos por $\mathcal{G}(G)$ seu valor, chamado de **valor-nim** ou **valor-Grundy**.

Resumindo os resultados anteriores na nova notação:

Teorema

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n. Cada valor é chamado de **nimber**. Dado um jogo G, denotamos por $\mathcal{G}(G)$ seu valor, chamado de **valor-nim** ou **valor-Grundy**.

Resumindo os resultados anteriores na nova notação:

Teorema

- $\mathcal{G}(G) = mex\{\mathcal{G}(H) : H \text{ é uma opção de } G\}$.

Se apenas jogos imparciais são considerados, em vez de denotar $*n$, usamos n. Cada valor é chamado de **nimber**. Dado um jogo G, denotamos por $\mathcal{G}(G)$ seu valor, chamado de **valor-nim** ou **valor-Grundy**.

Resumindo os resultados anteriores na nova notação:

Teorema

- $\mathcal{G}(G) = mex\{\mathcal{G}(H) : H \text{ é uma opção de } G\}$.
- *se* G, H *e* J *são imparciais, então* $G = H + J$ *se, e somente se,* $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \oplus \mathcal{G}(J)$.

Um tipo importante de variação do NIM é quando, os jogadores tem restrições de quantas fichas podem ser retiradas e quando eles podem dividir pilhas em duas ou mais.

Um tipo importante de variação do Nim é quando, os jogadores tem restrições de quantas fichas podem ser retiradas e quando eles podem dividir pilhas em duas ou mais. Essas variações são conhecidas por Pegando-e-quebrando.

- Jogo de Grundy:

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.
- Casais para sempre:

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.
- Casais para sempre: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas - mas pilhas com duas fichas não podem ser quebradas.

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.
- Casais para sempre: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas - mas pilhas com duas fichas não podem ser quebradas.
- jogos de subtração (imparciais).

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.
- Casais para sempre: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas - mas pilhas com duas fichas não podem ser quebradas.
- jogos de subtração (imparciais).
- restrições por quantidade, por exemplo "tirar pelo menos uma, no máximo um quarto".

- Jogo de Grundy: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas com quantidades distintas de fichas.
- Casais para sempre: escolhe uma pilha, divide as fichas em duas pilhas - mas pilhas com duas fichas não podem ser quebradas.
- jogos de subtração (imparciais).
- restrições por quantidade, por exemplo "tirar pelo menos uma, no máximo um quarto".
- dependente da história do jogo, por exemplo "tirar pelo menos um terço do que foi tirado na anterior".

Em jogos do tipo PEGANDO-E-QUEBRANDO onde cada pilha pode ser considerada como um somando independente, é comum definir uma sequência (chama de NIM) baseada no número n de fichas numa única pilha:

$$\mathcal{G}(0), \mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2)...$$

Alguns tipos de padrões para sequências NIM:

Alguns tipos de padrões para sequências NIM:

- **periódica**: existem $q \geq 0$ e $p > 0$ tais que $\mathcal{G}(n + p) = \mathcal{G}(n)$ para todo $n \geq q$.

Alguns tipos de padrões para sequências NIM:

- **periódica**: existem $q \geq 0$ e $p > 0$ tais que $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n)$ para todo $n \geq q$.
- **periódica aritmética**: existem $p > 0, q \geq 0, r > 0$ tais que $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + r$ para todo $n \geq q$.

Denotamos por $\textsc{Subtração}_n(a_1, ..., a_k)$ o jogo de uma pilha com n fichas e de onde os jogadores podem retirar $a_1, ..., a_k$ fichas por vez.

Denotamos por $\textsc{Subtração}_n(a_1, ..., a_k)$ o jogo de uma pilha com n fichas e de onde os jogadores podem retirar $a_1, ..., a_k$ fichas por vez.

Teorema
A sequência $\textsc{Nim}$ *dos jogos* $\textsc{Subtração}_n(a_1, ..., a_k)$ *é periódica.*

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k. Se olharmos a sequência NIM em "blocos" de comprimento a, existem duas que se repetem.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k. Se olharmos a sequência $\textsc{Nim}$ em "blocos" de comprimento a, existem duas que se repetem. Defina como q a posição do último termo da primeira sequência e $q + p$ a posição do último termo da segunda sequência.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k. Se olharmos a sequência NIM em "blocos" de comprimento a, existem duas que se repetem. Defina como q a posição do último termo da primeira sequência e $q + p$ a posição do último termo da segunda sequência. Claramente

$$\mathcal{G}(q) = \mathcal{G}(q + p)$$

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k. Se olharmos a sequência NIM em "blocos" de comprimento a, existem duas que se repetem. Defina como q a posição do último termo da primeira sequência e $q + p$ a posição do último termo da segunda sequência. Claramente

$$\mathcal{G}(q) = \mathcal{G}(q + p)$$

Mas note que as opções no jogo com $q + 1$ fichas são as mesmas que em $q + p + 1$.

Primeiramente, note que se um jogo imparcial tem (recursivamente) k opções, então seu valor é no máximo k. Note que um jogo como no enunciado tem no máximo k opções.

Assim, para qualquer n, $\mathcal{G}(n) \leq k$.

Seja $a = \max\{a_1, ..., a_k\}$. Note que existem apenas k^a sequências de comprimento a cujo valores são menores ou iguais a k. Se olharmos a sequência $\textsc{Nim}$ em "blocos" de comprimento a, existem duas que se repetem. Defina como q a posição do último termo da primeira sequência e $q + p$ a posição do último termo da segunda sequência. Claramente

$$\mathcal{G}(q) = \mathcal{G}(q + p)$$

Mas note que as opções no jogo com $q + 1$ fichas são as mesmas que em $q + p + 1$. Ou seja, segue por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n + p)$$