Introdução aos jogos combinatórios - Parte 3

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{\ |\ \}$
- $n + 1 := \{n|\ \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{\ |\ \}$
- $n + 1 := \{n|\ \}$

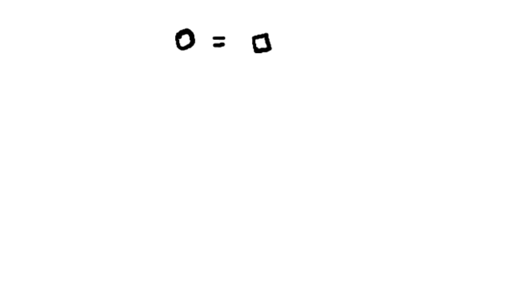
(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{\ |\ \}$
- $n + 1 := \{n|\ \}$

(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Definimos $-n$ de maneira análoga (note que a notação é coerente).



$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \}$$

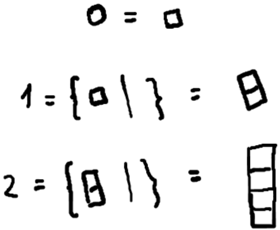
$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \boxminus$$

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \boxminus$$

$$2 = \{\boxminus \mid \}$$


0 =
1 = { | } =
2 = { | } =

Exercício: Dado um jogo G de valor $n \in \mathbb{Z}$, temos que o valor de $G + 1$ é $n + 1$ e o de $G - 1$ é $n - 1$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \geq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que Left vence jogando em segundo.

Se Right consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, Right moveu C para $C + 1$).

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que Left vence jogando em segundo.

Se Right consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, Right moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que Left vence jogando em segundo.

Se Right consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, Right moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então Left pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$ - assim, podemos aplicar indução aqui (sobre $|a| + |b| + |c|$). $\square$

Agora suponha $A + B + C \geq 0$

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Se Right tem algum movimento, digamos em C, Right pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Se Right tem algum movimento, digamos em C, Right pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, Left precisa ter um movimento vencedor contra isso

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Se Right tem algum movimento, digamos em C, Right pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, Left precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C, RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A. Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C, RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A. Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$. Note que este último jogo é mais simples que o original, logo podemos aplicar indução, o que implica o resultado.

Analogamente, temos

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \leq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \leq 0$*.*

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \leq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \leq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$.

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \leq 0$ se, e somente se, $A + B + C \leq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$.

Demonstração.
Basta notar que, pelos últimos resultados, $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se, $a + b + (-c) = 0$. $\square$

Proposição

Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

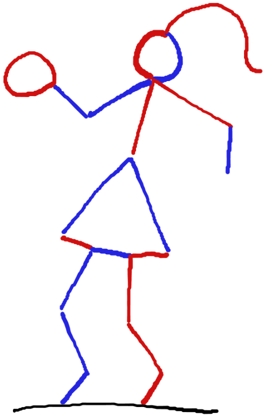
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$.

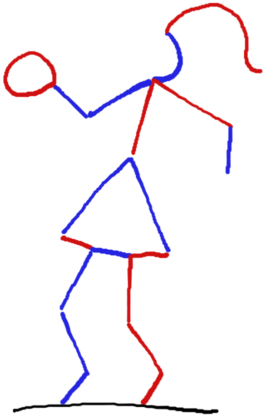
Proposição
Considere jogos A, B *de valores* a, b *respectivamente. Então* $A \geq B$ *se, e somente se,* $a \geq b$.

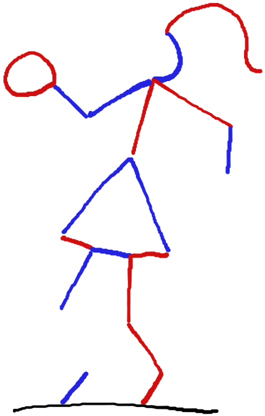
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$.

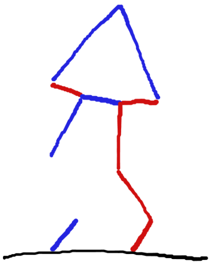
Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

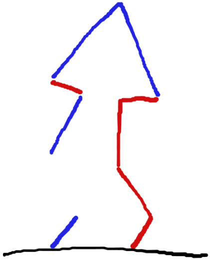
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$. Assim, $A \geq B$ se, e somente se, $a - b + 0 \geq 0$ que é o que queríamos. □

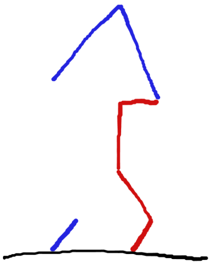


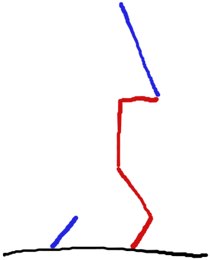


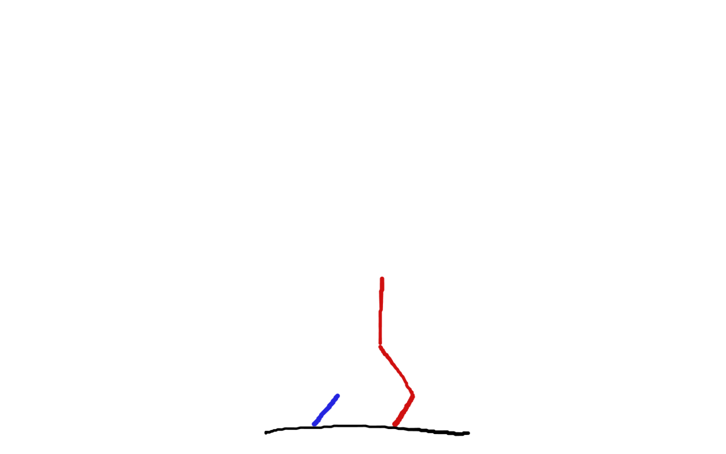






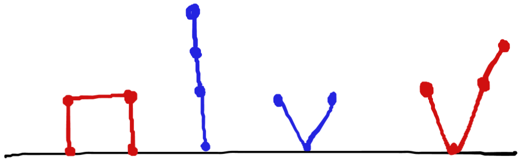


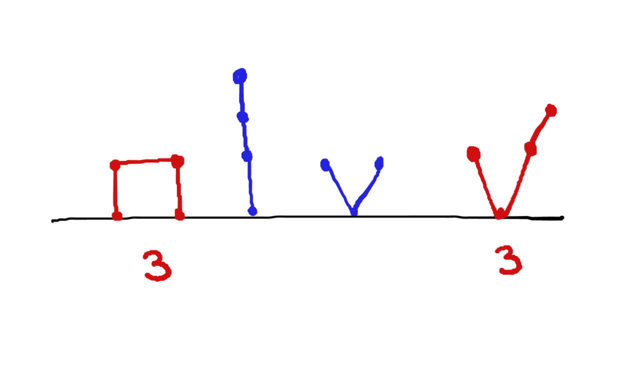


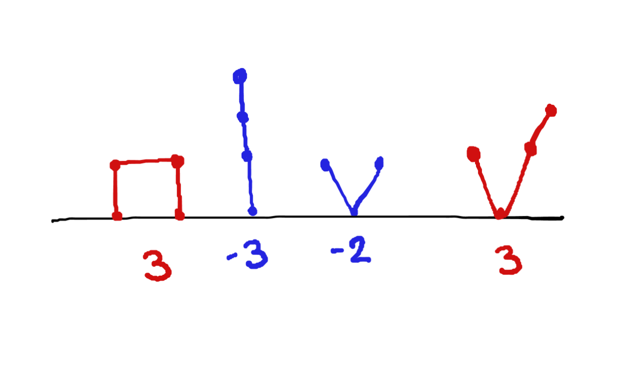


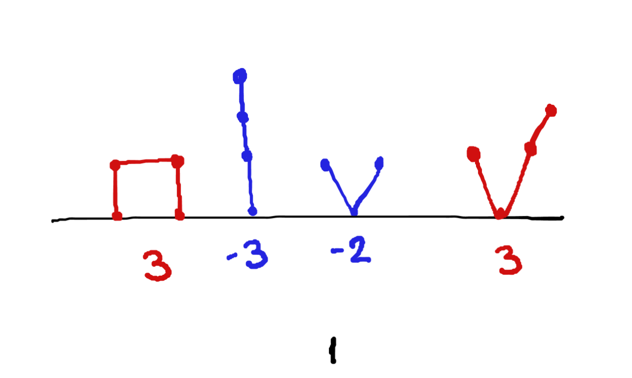
Note que no HACKENBUSH, se todas as arestas são vermelhas, o valor do jogo é n, onde n é o número de arestas.

Analogamente, $-n$ se todas as n arestas forem azuis.




3
3


3
-3
-2
3


3
-3
-2
3
1

Definição
Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} =$$

Definição
Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, *com* m *ímpar, definimos o jogo de número*

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$$

Definição
Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, *com* m *ímpar, definimos o jogo de número*

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$$

Exemplo
$\frac{19}{32} =$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$*, com m ímpar, definimos o jogo de número*

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$$

Exemplo

$\frac{19}{32} = \{\frac{18}{32} | \frac{20}{32}\} =$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, *com* m *ímpar, definimos o jogo de número*

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j} | \frac{m+1}{2^j}\}$$

Exemplo

$\frac{19}{32} = \{\frac{18}{32} | \frac{20}{32}\} = \{\frac{9}{16} | \frac{5}{8}\}$.

$$0 = \{ \ \backslash \ \}$$

$0 = \{\ |\ \}$ $1 = \{0\ |\ \}$

$0 = \{\,|\,\}$ $\quad 1 = \{0\,|\,\}$ $\quad -1 = \{\,|\,0\}$

$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\ |\ \} \qquad -1 = \{\ |\ 0\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \;\middle|\; \frac{1+1}{2} \right\}$$

$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\,|\ \} \qquad -1 = \{\ |\,0\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0 \,|\, 1\}$$

$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\ |\ \} \qquad -1 = \{\ |\ 0\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0 \mid 1\}$$

$$0 = \square$$

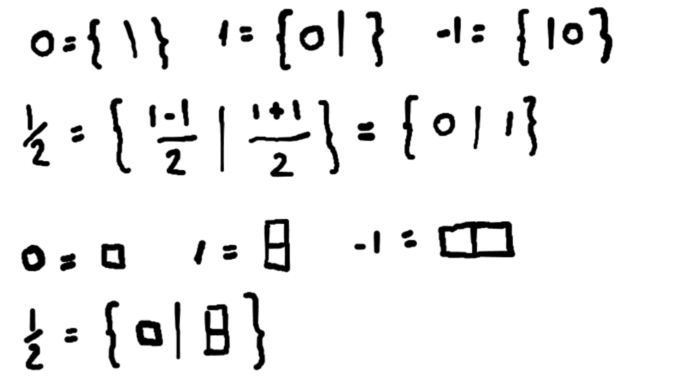
$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\,|\ \} \qquad -1 = \{\ |\,0\}$$

$$\tfrac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0 \,|\, 1\}$$

$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\ |\ \} \qquad -1 = \{\ |\ 0\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0 \mid 1\}$$

$0 =$  $1 =$  $-1 =$ 


0 = { | }
1 = {0 | }
-1 = { | 0}
1/2 = { (1-1)/2 | (1+1)/2 } = {0 | 1}
0 =
1 =
-1 =
1/2 = { | }

$$0 = \{\ |\ \} \qquad 1 = \{0\ |\ \} \qquad -1 = \{\ |\ 0\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \,\middle|\, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0\ |\ 1\}$$

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$.

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Resta analisar o caso em que o primeiro jogar joga em -1.

Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Resta analisar o caso em que o primeiro jogar joga em -1. Lembre que $-1 = \{\ |0\}$.

Exemplo
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2}=\{0|1\}$*).*

Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})-1\in\mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1-1=0$, garantindo vitória do segundo.

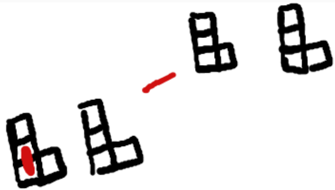
Resta analisar o caso em que o primeiro jogar joga em -1. Lembre que $-1=\{\ |0\}$. Ou seja, este caso só é possível para Right, que deixaria o jogo em $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

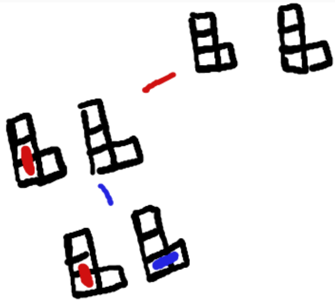
Exemplo
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *(lembrando,* $\frac{1}{2} = \{0|1\}$*).*

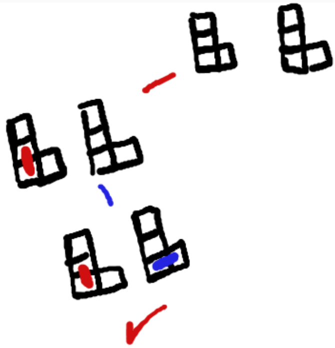
Demonstração.
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

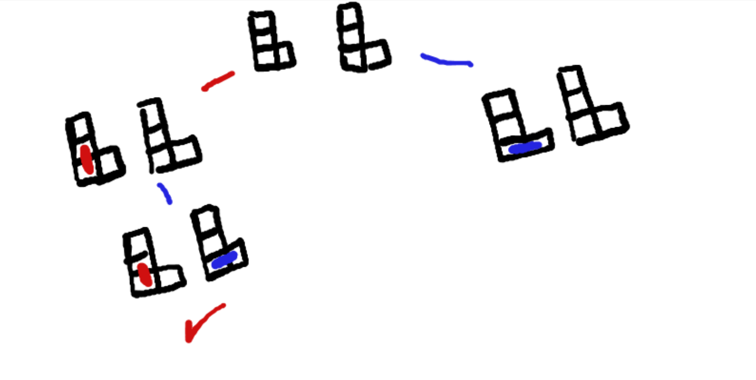
Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

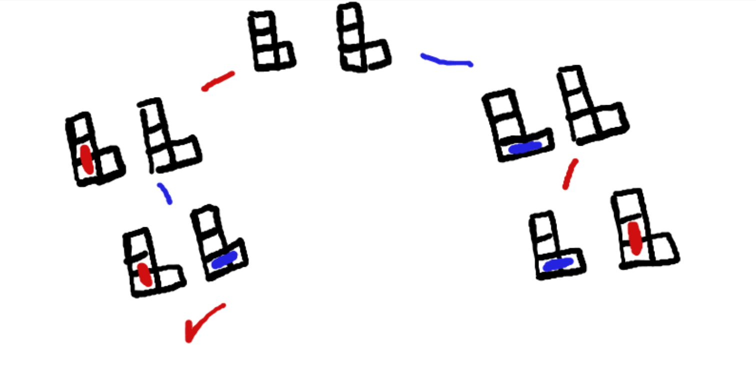
Resta analisar o caso em que o primeiro jogar joga em -1. Lembre que $-1 = \{\ |0\}$. Ou seja, este caso só é possível para $\textsc{Right}$, que deixaria o jogo em $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Seguindo as únicas opções restantes, $\textsc{Left}$ deixaria o jogo em $\frac{1}{2}$, $\textsc{Right}$ em 1 e $\textsc{Left}$ faria a última jogada para 0, vencendo. $\square$

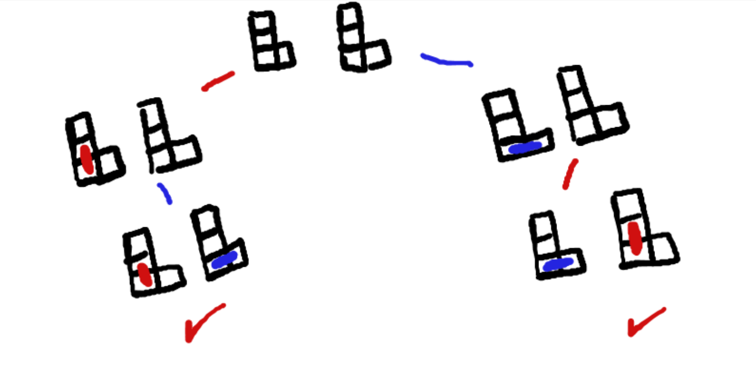












Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n|\ \}$$

Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n| \ \}$$

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j}|\frac{m+1}{2^j}\}$$

Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n|\ \}$$

$$\frac{m}{2^j} = \{\frac{m-1}{2^j}|\frac{m+1}{2^j}\}$$

Note que quem joga, sempre muda o jogo para um de número pior para si: LEFT diminui, RIGHT aumenta.

Lema
Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

(a) $a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0$;

(b) $a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0$;

(c) $a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0$.

Lema
Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

(a) $a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0$;

(b) $a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0$;

(c) $a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0$.

Demonstração.
Vamos provar as afirmações ao mesmo tempo.

Lema

Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

(a) $a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0$;

(b) $a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0$;

(c) $a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0$.

Demonstração.
Vamos provar as afirmações ao mesmo tempo. Note que, como elas são excludentes entre si, basta mostrar as direções $\Rightarrow$. $\square$

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se Right começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se $\textsc{Right}$ começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para $\textsc{Right}$ - ou seja, é maior.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se $\textsc{Right}$ começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para $\textsc{Right}$ - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se $\textsc{Right}$ começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para $\textsc{Right}$ - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de $\textsc{Right}$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de RIGHT. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se $\textsc{Right}$ começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para $\textsc{Right}$ - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de $\textsc{Right}$. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

De maneira análoga, mostra-se que $a + b + c \leq 0$ implica em $A + B + C \leq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Se $\textsc{Right}$ começa jogando, digamos em A, ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para $\textsc{Right}$ - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de $\textsc{Right}$. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

De maneira análoga, mostra-se que $a + b + c \leq 0$ implica em $A + B + C \leq 0$. Juntando as duas, obtemos $a + b + c = 0$ implicando em $A + B + C = 0$. $\square$

Suponha $a + b + c > 0$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de Left vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro.

Suponha $a+b+c>0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a+b+c=\frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j=0$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de Left vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a.Então a opção A^L de valor a^L é tal que $a^L + b + c \geq 0$ e, por indução, $A^L + B + C \geq 0$, garantindo vitória de LEFT.

Suponha $a+b+c>0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a+b+c=\frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j=0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a+b+c-\frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a.Então a opção A^L de valor a^L é tal que $a^L+b+c \geq 0$ e, por indução, $A^L+B+C \geq 0$, garantindo vitória de LEFT.
- todos os a, b, c são inteiros. Esse caso segue como fizemos anteriormente.

Demonstração.
O último caso seria $a + b + c < 0$, mas esse caso é simétrico ao anterior. $\square$

Teorema
Dados jogos A, B, C de valores a, b, c, temos:

(a) $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$;

(b) $A \geq B$ *se, e somente se,* $a \geq b$.

Teorema
Dados jogos A, B, C de valores a, b, c, temos:

(a) $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$;

(b) $A \geq B$ *se, e somente se,* $a \geq b$.

Demonstração.

Teorema
Dados jogos A, B, C de valores a, b, c, temos:

(a) $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$;

(b) $A \geq B$ *se, e somente se,* $a \geq b$.

Demonstração.

(a) Basta notar que $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se, $a + b + (-c) = 0$;

Teorema
Dados jogos A, B, C de valores a, b, c, temos:

(a) $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$;

(b) $A \geq B$ *se, e somente se,* $a \geq b$.

Demonstração.

(a) Basta notar que $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se, $a + b + (-c) = 0$;

(b) Basta notar que $A - B + 0 \geq 0$ se, e somente se, $a - b + 0 \geq 0$.

$\square$

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$.

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$.

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$.

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, Left vence jogando primeiro em $G + X^L$.

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, Left vence jogando primeiro em $G + X^L$. Assim, pela hipótese de indução, existe G^L opção em G tal que $G^L + X^L \geq 0$.

Teorema (Evite números (fraco))
Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se Left *pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então* Left *pode fazer isso começando com uma opção de G.*

Demonstração.
Note que o queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L, então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, Left vence jogando primeiro em $G + X^L$. Assim, pela hipótese de indução, existe G^L opção em G tal que $G^L + X^L \geq 0$. Como $X^L < X$, obtemos que $G^L + X \geq 0$ como desejado. □

Definição
Dados $x^L < x^R$ números (jogos com tais valores), o **número mais simples** *entre os dois é o número x cujo aniversário é o menor.*

Definição
Dados $x^L < x^R$ números (jogos com tais valores), o **número mais simples** *entre os dois é o número x cujo aniversário é o menor.*

Antes de mais nada, precisamos ver que isso está bem definido (que tal x é único).

Lema
Se $x_1 < x_2$ *têm o mesmo aniversário, então existe* x *de aniversário menor tal que* $x_1 < x < x_2$.

Lema
Se $x_1 < x_2$ têm o mesmo aniversário, então existe x de aniversário menor tal que $x_1 < x < x_2$.

Lema
Dado $z \in \mathbb{Z}$, o aniversário de z é $|z| + 1$.

Lema
Se $x_1 < x_2$ têm o mesmo aniversário, então existe x de aniversário menor tal que $x_1 < x < x_2$.

Lema
Dado $z \in \mathbb{Z}$, o aniversário de z é $|z| + 1$. Se $n \geq 0$, i é ímpar e $0 < i < 2^j$, então $\pm(n + \frac{i}{2^j})$ têm ambos aniversário $n + j + 1$.

Está bem definido

Note que o de menor aniversário entre dois números é único, uma vez que se dois tiverem o mesmo aniversário, existe um terceiro entre eles de aniversário menor.

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Demonstração.
Temos dois casos.

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Demonstração.
Temos dois casos. Se existe um inteiro entre x^L e x^R, então o lema anterior nos dá que o mais simples é o de menor valor absoluto.

Proposição

Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Demonstração.

Temos dois casos. Se existe um inteiro entre x^L e x^R, então o lema anterior nos dá que o mais simples é o de menor valor absoluto.

Caso contrário, temos que existe z inteiro tal que $z \leq x^L < x^R \leq z + 1$.

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Demonstração.
Temos dois casos. Se existe um inteiro entre x^L e x^R, então o lema anterior nos dá que o mais simples é o de menor valor absoluto.

Caso contrário, temos que existe z inteiro tal que $z \leq x^L < x^R \leq z + 1$. Note que o de menor j é de fato o que dá o menor aniversário

Proposição
Sejam $x^L < x^R$ jogos de valores numéricos. Então o número x mais simples entre eles é dado por:

- *se existe algum inteiro z entre x^L e x^R, então x é o de menor valor absoluto;*
- *caso contrário, x é o jogo de valor $\frac{i}{2^j}$ com j minimal.*

Demonstração.
Temos dois casos. Se existe um inteiro entre x^L e x^R, então o lema anterior nos dá que o mais simples é o de menor valor absoluto.

Caso contrário, temos que existe z inteiro tal que $z \leq x^L < x^R \leq z + 1$. Note que o de menor j é de fato o que dá o menor aniversário (note que se tivesse dois consecutivos de mesmo denominador, um poderia ser simplificado). $\square$

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico.

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.
Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos.

Teorema

Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.

Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$.

Teorema

Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.

Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$

Teorema

Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.

Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.
Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

Suponha $\textsc{Right}$ o primeiro a jogar (o outro caso é análogo).

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.
Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

Suponha Right o primeiro a jogar (o outro caso é análogo). Temos duas opções de movimentos possíveis:

Teorema

Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.

Escreva $G = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

Suponha Right o primeiro a jogar (o outro caso é análogo). Temos duas opções de movimentos possíveis:

- $x - G^L$. Note que este caso é positivo, dado que $\mathcal{G}^L < x$.

Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

Demonstração.
Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

Suponha Right o primeiro a jogar (o outro caso é análogo). Temos duas opções de movimentos possíveis:

- $x - G^L$. Note que este caso é positivo, dado que $\mathcal{G}^L < x$.
- $x^R - G$. Note que não pode ocorrer $x^R < \mathcal{G}^R$ pois x^R é mais simples que x e também satisfaria $\mathcal{G}^L < x^R < \mathcal{G}^R$.

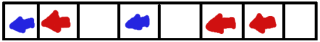
Teorema
Dado um jogo G, se todas as opções satisfazem $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e têm valores numéricos, então G também tem valor numérico. Mais que isso, G tem valor x, onde x é o mais simples entre $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$.

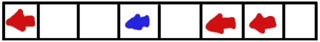
Demonstração.
Escreva $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$ onde $\mathcal{G}^L < \mathcal{G}^R$ e todas as opções tem valores numéricos. Seja x o mais simples satisfazendo $\mathcal{G}^L < x < \mathcal{G}^R$. Basta mostrarmos que $x - G \in \mathcal{P}$ - ou seja, que o segundo a jogar vence.

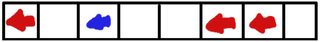
Suponha Right o primeiro a jogar (o outro caso é análogo). Temos duas opções de movimentos possíveis:

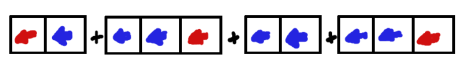
- $x - G^L$. Note que este caso é positivo, dado que $\mathcal{G}^L < x$.
- $x^R - G$. Note que não pode ocorrer $x^R < \mathcal{G}^R$ pois x^R é mais simples que x e também satisfaria $\mathcal{G}^L < x^R < \mathcal{G}^R$. Assim, existe G^R tal que $x^R \geq G^R$ e, portanto, $x^R - G^R$ é uma opção vitoriosa para Left.

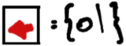
□

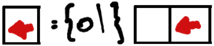




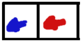


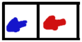




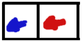



= {0|}
= {1|} = 2





$= \{1 \mid 2\}$

 $= \{1 \mid 2\} = \frac{3}{2}$

 $= \left\{ \frac{3}{2} \;\middle|\; 3 \right\}$

Empurra

 $= \left\{ 3/2 \mid 3 \right\} = 2$