

Introdução aos jogos combinatórios - Parte 3

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$
- $n + 1 := \{ n \mid \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$
- $n + 1 := \{ n \mid \}$

(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$
- $n + 1 := \{ n \mid \}$

(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Definimos $-n$ de maneira análoga (note que a notação é coerente).

$$0 = \square$$

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \}$$

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \square$$

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \square$$

$$2 = \{\square \mid \}$$

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$2 = \{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \mid \} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

EXERCÍCIO: Dado um jogo G de valor $n \in \mathbb{Z}$, temos que o valor de $G + 1$ é $n + 1$ e o de $G - 1$ é $n - 1$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$).

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$ - o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$ - assim, podemos aplicar indução aqui (sobre $|a| + |b| + |c|$). \square

Agora suponha $A + B + C \geq 0$

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C , RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C , RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C , RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A .

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C , RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A . Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C , RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A . Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$. Note que este último jogo é mais simples que o original, logo podemos aplicar indução, o que implica o resultado.

Analogamente, temos

Analogamente, temos

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \leq 0$ se, e somente se, $A + B + C \leq 0$.

Analogamente, temos

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \leq 0$ se, e somente se, $A + B + C \leq 0$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$.

Analogamente, temos

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \leq 0$ se, e somente se, $A + B + C \leq 0$.

Proposição

Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$.

Demonstração.

Basta notar que, pelos últimos resultados, $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se, $a + b + (-c) = 0$. □

Proposição

Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Proposição

Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Demonstração.

Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$.

Proposição

Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Demonstração.

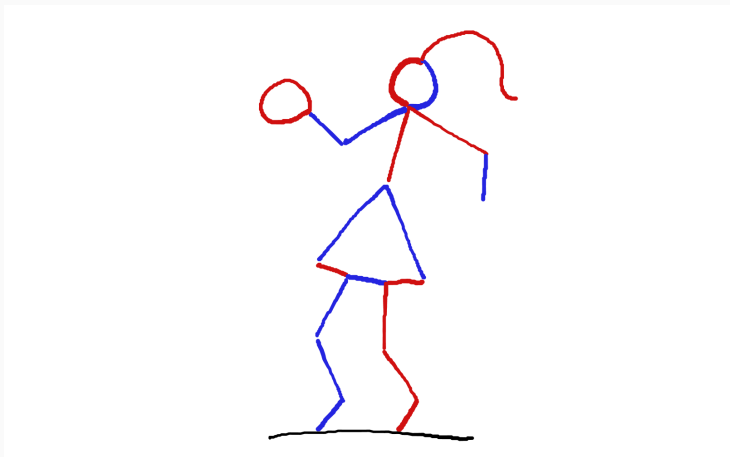
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$.

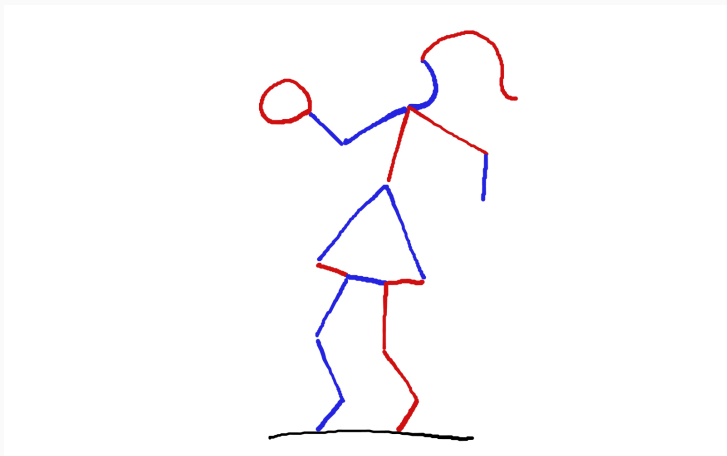
Proposição

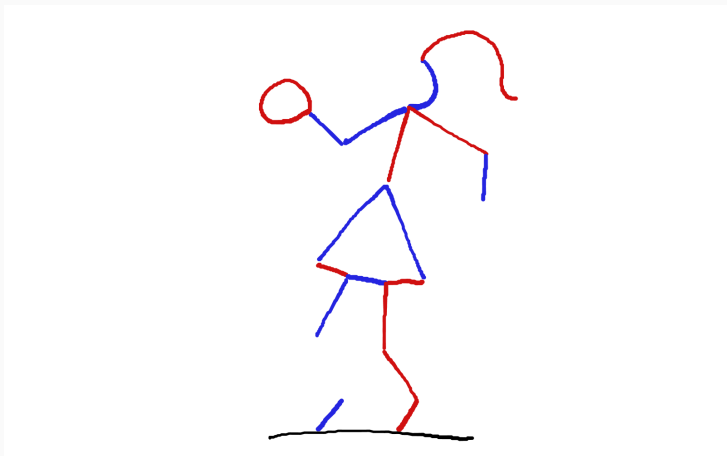
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

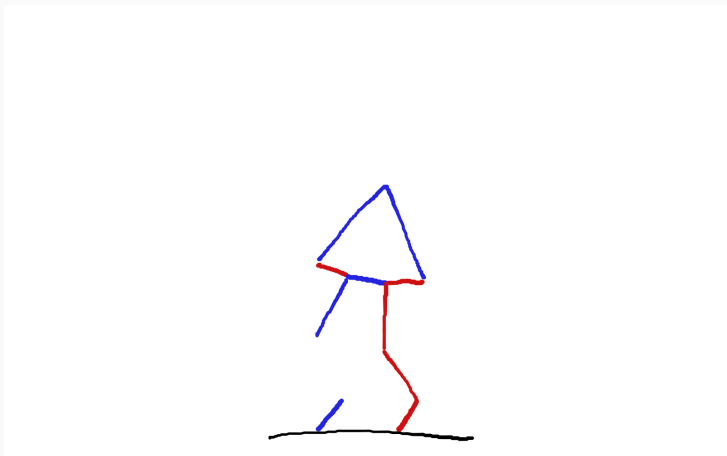
Demonstração.

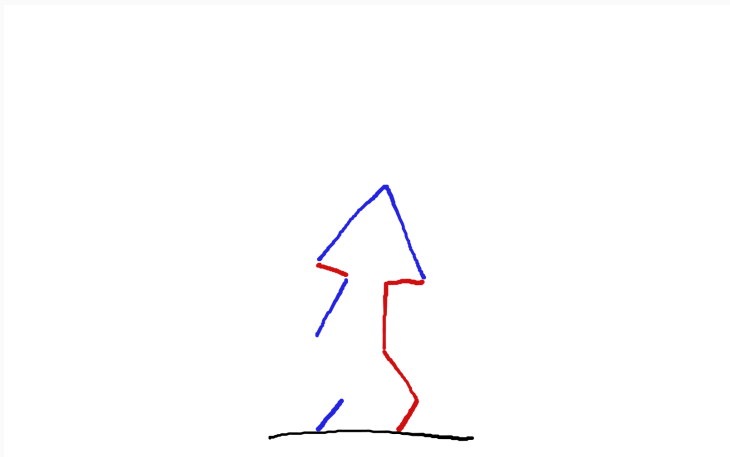
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$. Assim, $A \geq B$ se, e somente se, $a - b + 0 \geq 0$ que é o que queríamos. \square

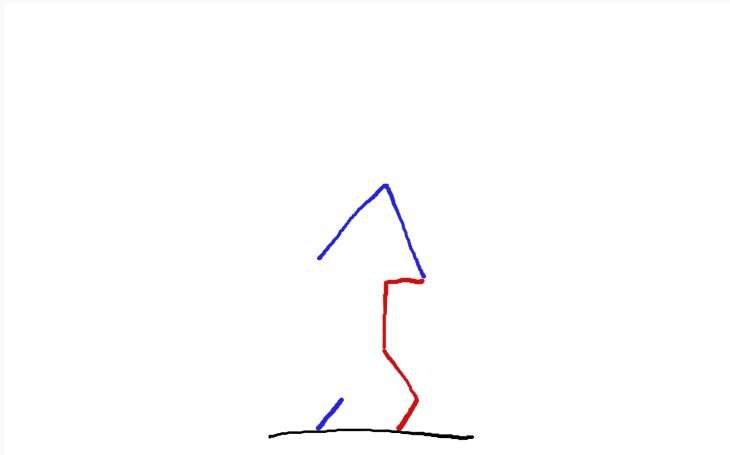


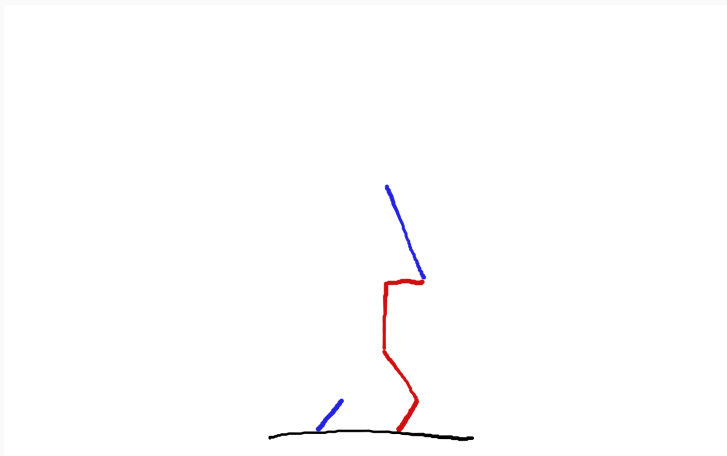


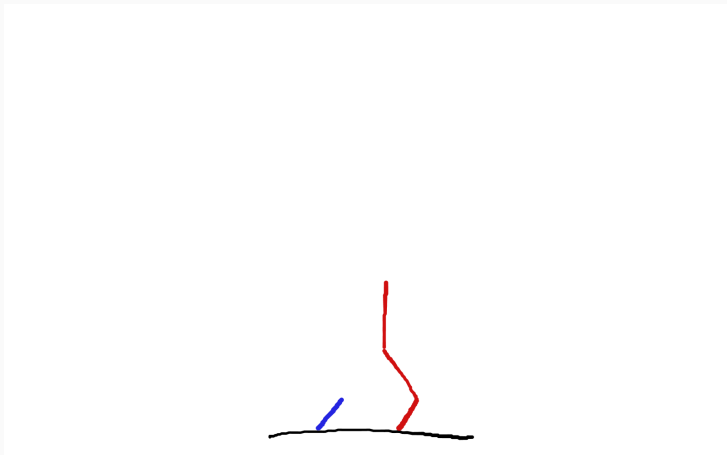


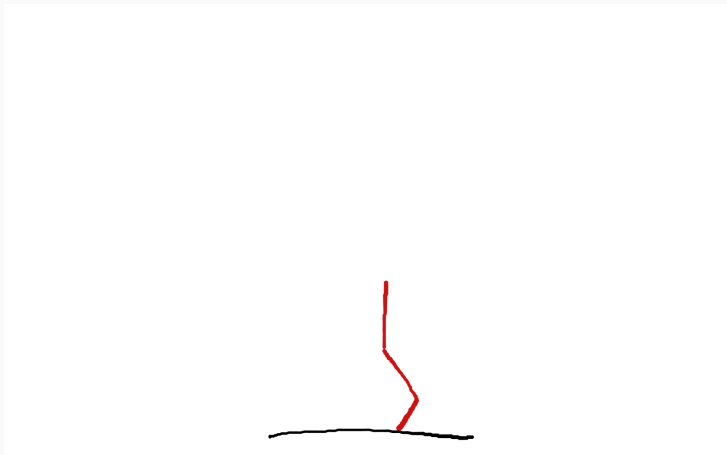






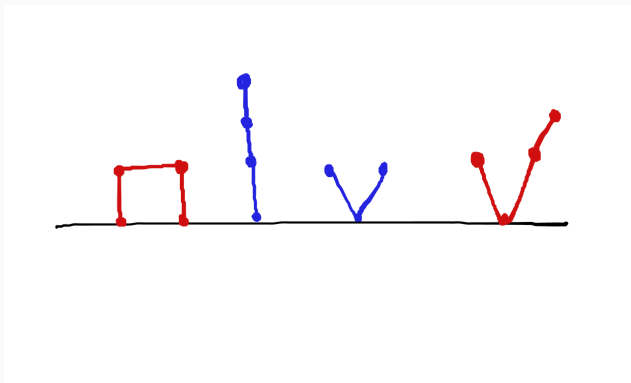


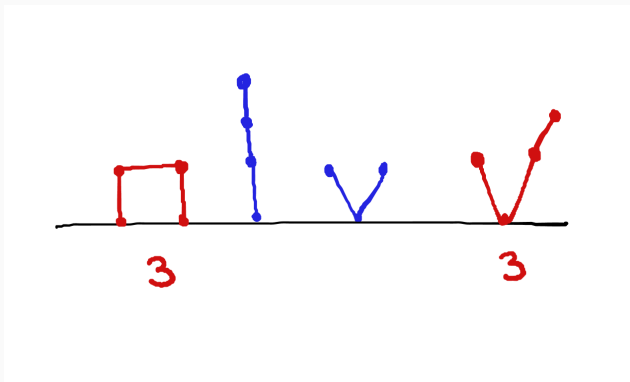


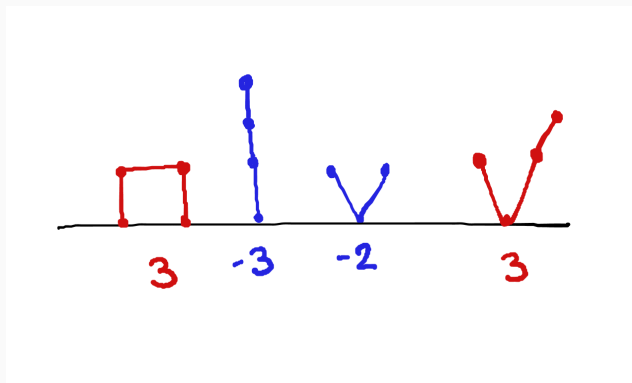


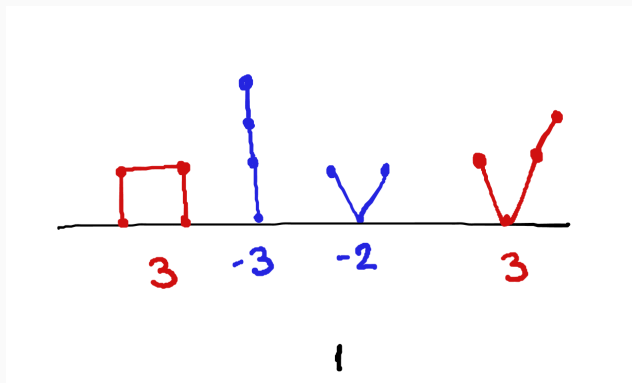
Note que no HACKENBUSH, se todas as arestas são vermelhas, o valor do jogo é n , onde n é o número de arestas.

Analogamente, $-n$ se todas as n arestas forem azuis.









Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} =$$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Exemplo

$$\frac{19}{32} =$$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Exemplo

$$\frac{19}{32} = \left\{ \frac{18}{32} \mid \frac{20}{32} \right\} =$$

Definição

Para $j, m \in \mathbb{N}_{>0}$, com m ímpar, definimos o jogo de número

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Exemplo

$$\frac{19}{32} = \left\{ \frac{18}{32} \mid \frac{20}{32} \right\} = \left\{ \frac{9}{16} \mid \frac{5}{8} \right\}.$$

$$0 = \{ 1 \}$$

$$0 = \{ \backslash \} \quad 1 = \{ 0 | \}$$

$$0 = \{ \ 1 \} \quad 1 = \{ 0 \ 1 \} \quad -1 = \{ 1 \ 0 \}$$

$$0 = \{ \mid \} \quad 1 = \{ 0 \mid \} \quad -1 = \{ \mid 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\}$$

$$0 = \{ \mid \} \quad 1 = \{ 0 \mid \} \quad -1 = \{ \mid 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\} = \{ 0 \mid 1 \}$$

$$0 = \{ 1 \} \quad 1 = \{ 0 \mid \} \quad -1 = \{ 1 \ 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\} = \{ 0 \mid 1 \}$$

$$0 = \square$$

$$0 = \{ \mid \} \quad 1 = \{ 0 \mid \} \quad -1 = \{ \mid 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\} = \{ 0 \mid 1 \}$$

$$0 = \square \quad 1 = \boxplus$$

$$0 = \{ | \} \quad 1 = \{ 0 | \} \quad -1 = \{ 1 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\} = \{ 0 \mid 1 \}$$

$$0 = \square \quad 1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad -1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$0 = \{ | \} \quad 1 = \{ 0 | \} \quad -1 = \{ 1 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1-1}{2} \mid \frac{1+1}{2} \right\} = \{ 0 \mid 1 \}$$

$$0 = \square \quad 1 = \boxplus \quad -1 = \boxminus$$

$$\frac{1}{2} = \{ \square \mid \boxplus \}$$

$$0 = \{ | \} \quad 1 = \{ 0 | \} \quad -1 = \{ | 0 \}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{|-|}{2} \mid \frac{|+|}{2} \right\} = \{ 0 | 1 \}$$

$$0 = \square \quad 1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad -1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \square \mid \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Exemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Exemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (lembrando, } \frac{1}{2} = \{0|1\}).$$

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$.

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Resta analisar o caso em que o primeiro jogador joga em -1 .

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Resta analisar o caso em que o primeiro jogador joga em -1 . Lembre que $-1 = \{ |0\}$.

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

Demonstração.

Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

Resta analisar o caso em que o primeiro jogador joga em -1 . Lembre que $-1 = \{ | 0\}$. Ou seja, este caso só é possível para RIGHT, que deixaria o jogo em $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Exemplo

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (lembrando, $\frac{1}{2} = \{0|1\}$).

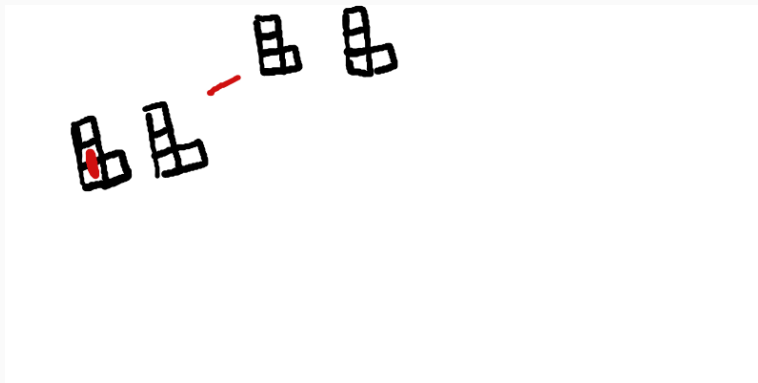
Demonstração.

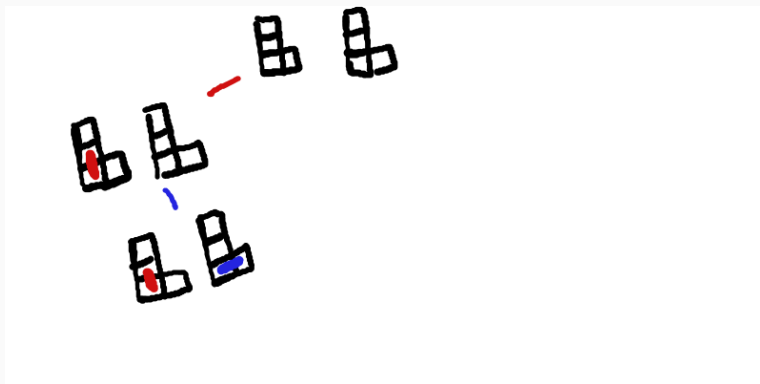
Note que é suficiente provar que $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - 1 \in \mathcal{P}$.

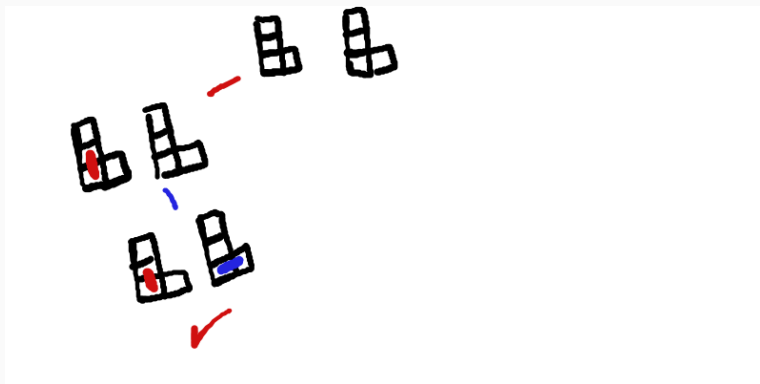
Note que se o primeiro jogador optar por jogar num dos $\frac{1}{2}$'s, o outro pode simplesmente jogar no outro $\frac{1}{2}$. O que resultaria na posição $1 - 1 = 0$, garantindo vitória do segundo.

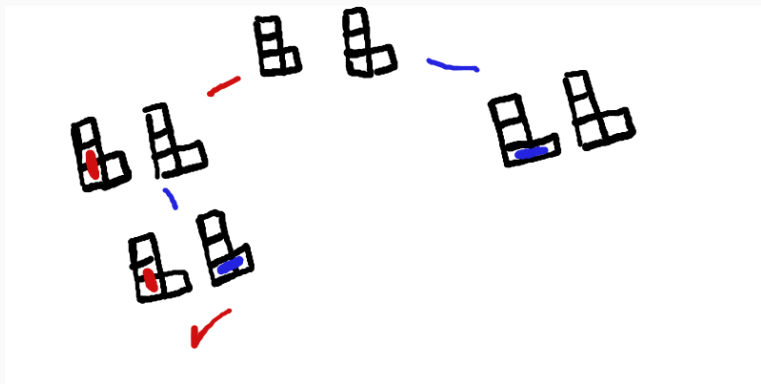
Resta analisar o caso em que o primeiro jogador joga em -1 . Lembre que $-1 = \{ |0\}$. Ou seja, este caso só é possível para RIGHT, que deixaria o jogo em $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Seguindo as únicas opções restantes, LEFT deixaria o jogo em $\frac{1}{2}$, RIGHT em 1 e LEFT faria a última jogada para 0, vencendo. □

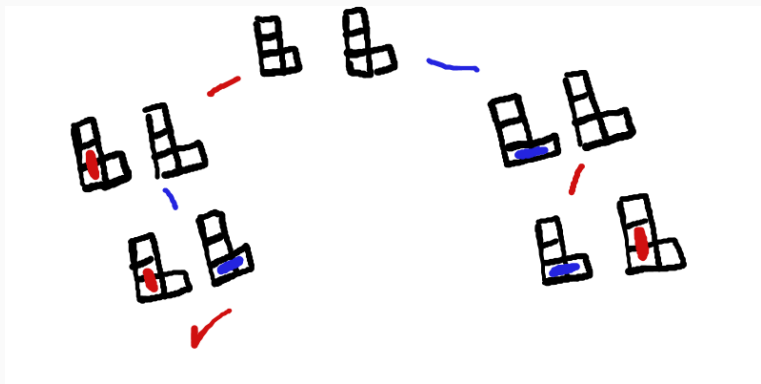


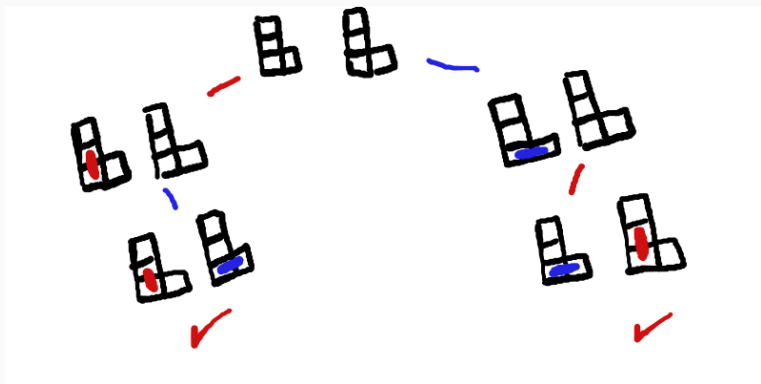












Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n\}$$

Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n\}$$

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Lembrando as duas definições:

$$n + 1 := \{n | \}$$

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \mid \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Note que quem joga, sempre muda o jogo para um de número pior para si: LEFT diminui, RIGHT aumenta.

Lema

Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

$$(a) \quad a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0;$$

$$(b) \quad a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0;$$

$$(c) \quad a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0.$$

Lema

Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

$$(a) \quad a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0;$$

$$(b) \quad a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0;$$

$$(c) \quad a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0.$$

Demonstração.

Vamos provar as afirmações ao mesmo tempo.

Lema

Sejam A, B, C jogos com valores a, b, c respectivamente. Então

$$(a) \quad a + b + c = 0 \Leftrightarrow A + B + C = 0;$$

$$(b) \quad a + b + c > 0 \Leftrightarrow A + B + C > 0;$$

$$(c) \quad a + b + c < 0 \Leftrightarrow A + B + C < 0.$$

Demonstração.

Vamos provar as afirmações ao mesmo tempo. Note que, como elas são excludentes entre si, basta mostrar as direções \Rightarrow . □

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de RIGHT.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de RIGHT. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de RIGHT. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

De maneira análoga, mostra-se que $a + b + c \leq 0$ implica em $A + B + C \leq 0$.

Demonstração.

Suponha $a + b + c \geq 0$. Se RIGHT começa jogando, digamos em A , ele deixa o jogo numa posição $A^R + B + C$. Pela observação anterior, o valor a^R de A^R é pior para RIGHT - ou seja, é maior.

Assim, $a^R + b + c > 0$ e, por hipótese de indução, $A^R + B + C > 0$. O que implica derrota de RIGHT. Ou seja, $A + B + C \geq 0$.

De maneira análoga, mostra-se que $a + b + c \leq 0$ implica em $A + B + C \leq 0$. Juntando as duas, obtemos $a + b + c = 0$ implicando em $A + B + C = 0$. □

Suponha $a + b + c > 0$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a .

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a . Então a opção A^L de valor a^L é tal que $a^L + b + c \geq 0$ e, por indução, $A^L + B + C \geq 0$, garantindo vitória de LEFT.

Suponha $a + b + c > 0$. Já temos o argumento de LEFT vencer jogando em segundo, resta provar para o caso jogando em primeiro. Escreva $a + b + c = \frac{i}{2^j}$, com i ímpar ou $j = 0$. Temos dois casos:

- algum entre a, b, c é da forma $\frac{i'}{2^{j'}}$ com $j' \geq j$, $j' > 0$ e $a + b + c - \frac{1}{2^{j'}}$. Digamos que tal número seja a . Então a opção A^L de valor a^L é tal que $a^L + b + c \geq 0$ e, por indução, $A^L + B + C \geq 0$, garantindo vitória de LEFT.
- todos os a, b, c são inteiros. Esse caso segue como fizemos anteriormente.

Demonstração.

O último caso seria $a + b + c < 0$, mas esse caso é simétrico ao anterior.



Teorema

Dados jogos A, B, C de valores a, b, c , temos:

- (a) $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$;
- (b) $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Teorema

Dados jogos A, B, C de valores a, b, c , temos:

- (a) $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$;
- (b) $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Demonstração.

Teorema

Dados jogos A, B, C de valores a, b, c , temos:

- (a) $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$;
- (b) $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Demonstração.

- (a) Basta notar que $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se,
 $a + b + (-c) = 0$;

Teorema

Dados jogos A, B, C de valores a, b, c , temos:

- (a) $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$;
- (b) $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Demonstração.

- (a) Basta notar que $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se,
 $a + b + (-c) = 0$;
- (b) Basta notar que $A - B + 0 \geq 0$ se, e somente se, $a - b + 0 \geq 0$.



Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$.

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$.

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$.

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, LEFT vence jogando primeiro em $G + X^L$.

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, LEFT vence jogando primeiro em $G + X^L$. Assim, pela hipótese de indução, existe G^L opção em G tal que $G^L + X^L \geq 0$.

Teorema (Evite números (fraco))

Suponha que X seja um jogo com um valor e que G não tenha valor. Se LEFT pode vencer jogando em primeiro em $G + X$, então LEFT pode fazer isso começando com uma opção de G .

Demonstração.

Note que o que queremos provar é que, se $G + X^L \geq 0$ para alguma opção X^L , então existe G^L tal que $G^L + X \geq 0$. Como G não tem um valor numérico, $G \neq -X^L$. Assim, $G + X^L > 0$. Ou seja, LEFT vence jogando primeiro em $G + X^L$. Assim, pela hipótese de indução, existe G^L opção em G tal que $G^L + X^L \geq 0$. Como $X^L < X$, obtemos que $G^L + X \geq 0$ como desejado. □