Introdução aos jogos combinatórios - Parte 3

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{\ |\ \}$
- $n + 1 := \{n|\ \}$

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{ \mid \}$
- $n + 1 := \{n \mid \}$

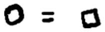
(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Vamos estender a ideia de numeração que apresentamos antes.

- $0 := \{\ |\ \}$
- $n + 1 := \{n|\ \}$

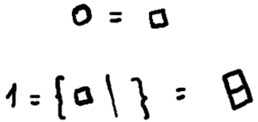
(o n dentro do jogo indica o jogo chamado n)

Definimos $-n$ de maneira análoga (note que a notação é coerente).



$$0 = \square$$

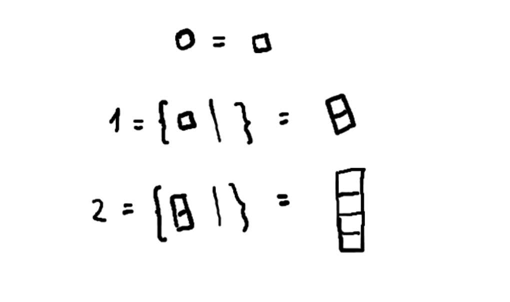
$$1 = \{\square \mid \}$$


0 =
1 = { | } =

$$0 = \square$$

$$1 = \{\square \mid \} = \boxminus$$

$$2 = \{\boxminus \mid \}$$


0 =
1 =
2 =

EXERCÍCIO: Dado um jogo G de valor $n \in \mathbb{Z}$, temos que o valor de $G + 1$ é $n + 1$ e o de $G - 1$ é $n - 1$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \geq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$).

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que Left vence jogando em segundo.

Se Right consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, Right moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \geq 0$ se, e somente se, $A + B + C \geq 0$.

Demonstração.
Suponha $a + b + c \geq 0$. Queremos mostrar que $A + B + C \geq 0$- o que é o mesmo que provar que LEFT vence jogando em segundo.

Se RIGHT consegue jogar, foi num jogo de valor negativo- vamos supor C (ou seja, RIGHT moveu C para $C + 1$). Como $a + b + c \geq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $a > 0$. Então LEFT pode mover A para $A - 1$. Ou seja, o jogo fica na posição $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$ - assim, podemos aplicar indução aqui (sobre $|a| + |b| + |c|$). $\square$

Agora suponha $A + B + C \geq 0$

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Se Right tem algum movimento, digamos em C, Right pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C, RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, Left vence jogando em segundo. Se Right não tem movimentos, terminamos.

Se Right tem algum movimento, digamos em C, Right pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, Left precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C, RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A. Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$.

Agora suponha $A + B + C \geq 0$ - ou seja, LEFT vence jogando em segundo. Se RIGHT não tem movimentos, terminamos.

Se RIGHT tem algum movimento, digamos em C, RIGHT pode mudar o jogo para $A + B + (C + 1)$. Mas, por hipótese, LEFT precisa ter um movimento vencedor contra isso - digamos em A. Então $(A - 1) + B + (C + 1) \geq 0$. Note que este último jogo é mais simples que o original, logo podemos aplicar indução, o que implica o resultado.

Analogamente, temos

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \leq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \leq 0$.

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $a + b + c \leq 0$ *se, e somente se,* $A + B + C \leq 0$*.*

Proposição
Considere jogos A, B, C *de valores* a, b, c *respectivamente. Então* $A + B = C$ *se, e somente se,* $a + b = c$*.*

Analogamente, temos

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $a + b + c \leq 0$ se, e somente se, $A + B + C \leq 0$.

Proposição
Considere jogos A, B, C de valores a, b, c respectivamente. Então $A + B = C$ se, e somente se, $a + b = c$.

Demonstração.
Basta notar que, pelos últimos resultados, $A + B + (-C) = 0$ se, e somente se, $a + b + (-c) = 0$. $\square$

Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

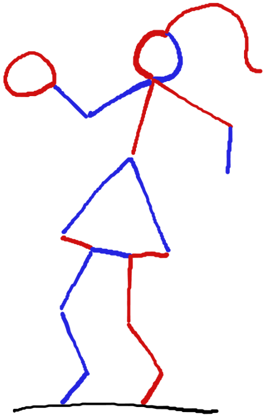
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$.

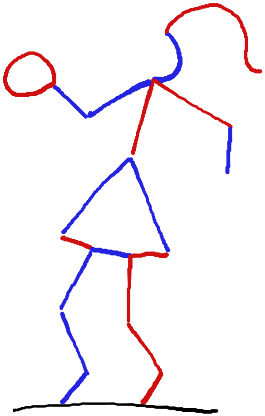
Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

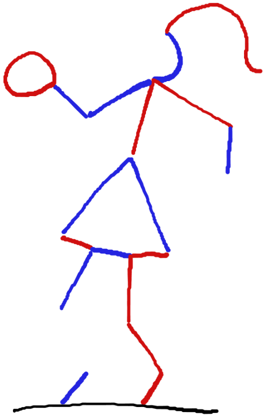
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$.

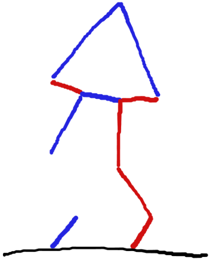
Proposição
Considere jogos A, B de valores a, b respectivamente. Então $A \geq B$ se, e somente se, $a \geq b$.

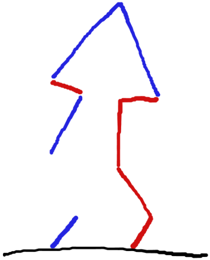
Demonstração.
Lembre que $A \geq B$ se, e somente se, $A - B \geq 0$. E isso é o mesmo que $A - B + 0 \geq 0$. Assim, $A \geq B$ se, e somente se, $a - b + 0 \geq 0$ que é o que queríamos. $\square$

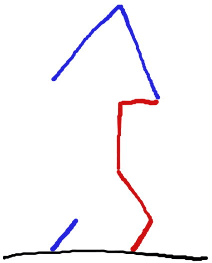


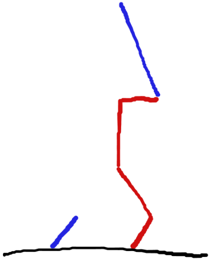


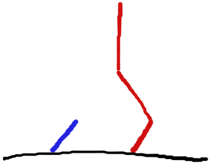






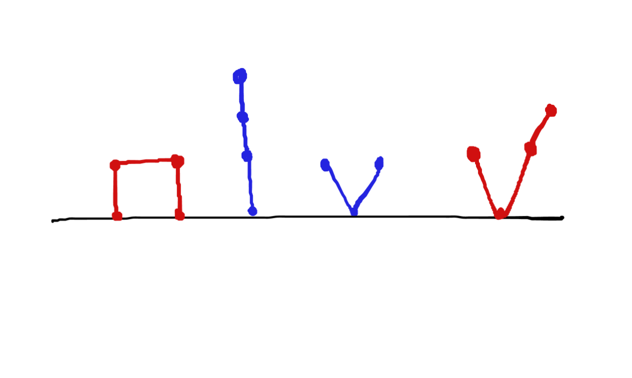


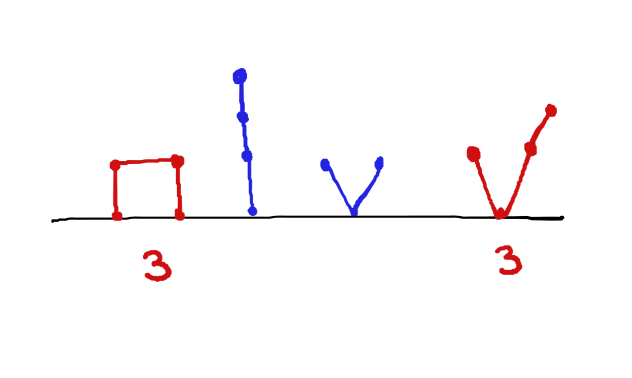


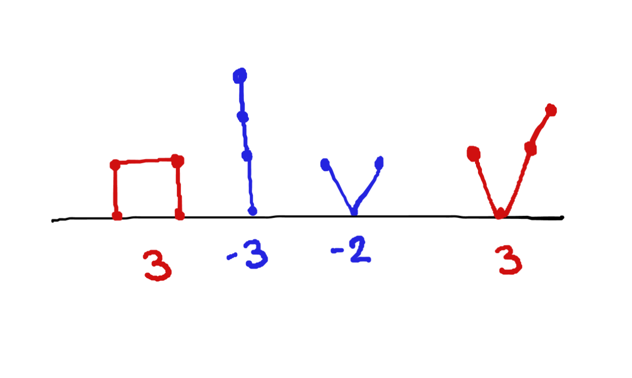


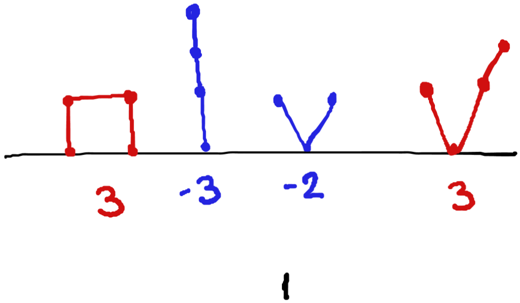
Note que no HACKENBUSH, se todas as arestas são vermelhas, o valor do jogo é n, onde n é o número de arestas.

Analogamente, $-n$ se todas as n arestas forem azuis.




3
3


3
-3
-2
3


3
-3
-2
3
1