Introdução aos jogos combinatórios - Parte 2

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos.

No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos. Por enquanto, vamos apresentar os axiomas informalmente e tentar motivá-los.

No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos. Por enquanto, vamos apresentar os axiomas informalmente e tentar motivá-los.

- Um movimento é de uma posição para uma subposição. O último jogador a jogar, vence;

No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos. Por enquanto, vamos apresentar os axiomas informalmente e tentar motivá-los.

- Um movimento é de uma posição para uma subposição. O último jogador a jogar, vence;
- Na soma de jogos, um jogador pode jogar em qualquer um dos jogos;

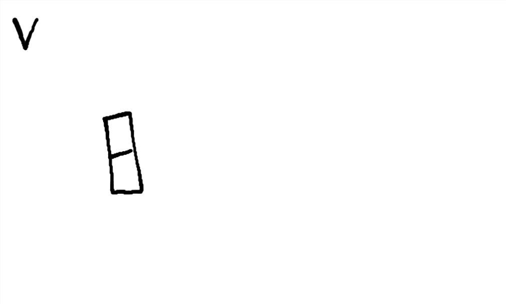
No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos. Por enquanto, vamos apresentar os axiomas informalmente e tentar motivá-los.

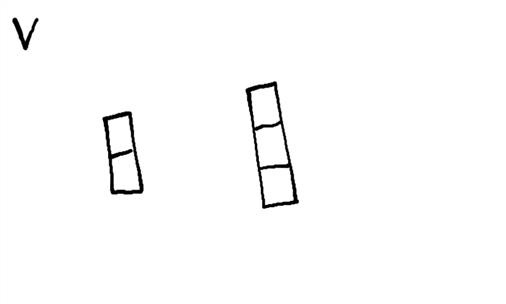
- Um movimento é de uma posição para uma subposição. O último jogador a jogar, vence;
- Na soma de jogos, um jogador pode jogar em qualquer um dos jogos;
- No "negativo" de um jogo, os papéis dos jogadores são invertidos;

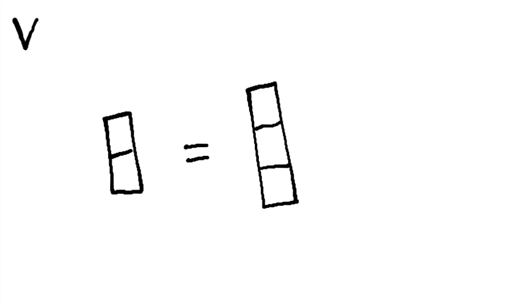
No próximo capítulo, vamos axiomatizar formalmente os jogos. Por enquanto, vamos apresentar os axiomas informalmente e tentar motivá-los.

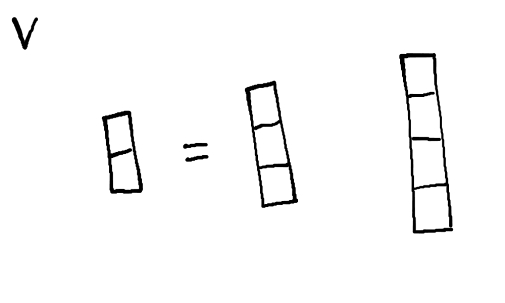
- Um movimento é de uma posição para uma subposição. O último jogador a jogar, vence;
- Na soma de jogos, um jogador pode jogar em qualquer um dos jogos;
- No "negativo" de um jogo, os papéis dos jogadores são invertidos;
- Uma posição A é tão boa quanto B (para LEFT) se LEFT ficaria satisfeito se B fosse trocado por A em qualquer soma.

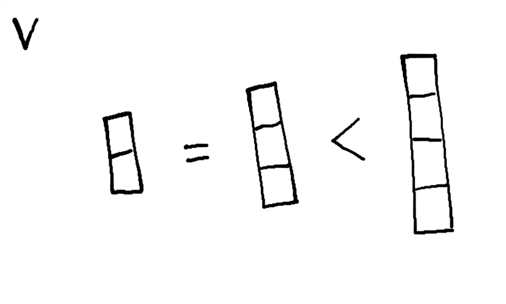

V


V

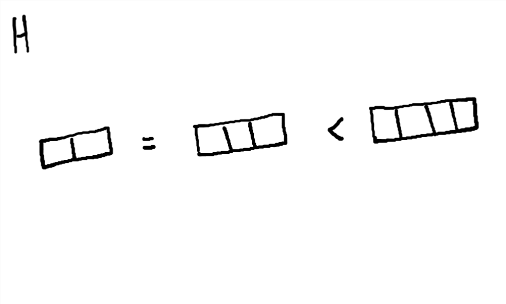

V

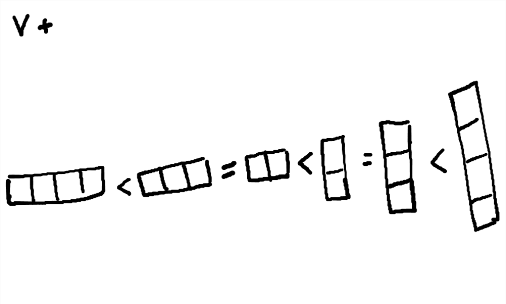

V
=

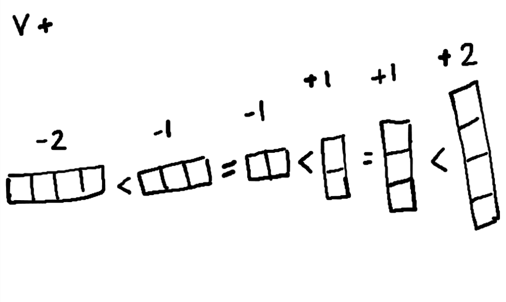

V
=


V

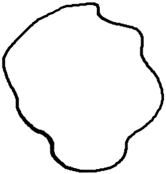
H

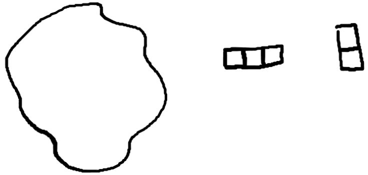

H
=
<

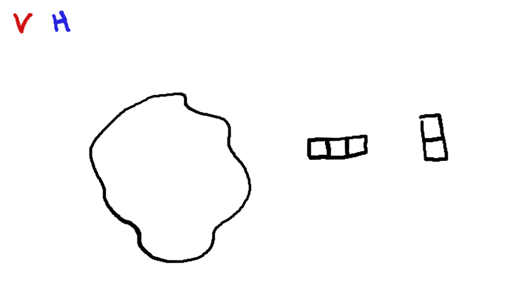

V+

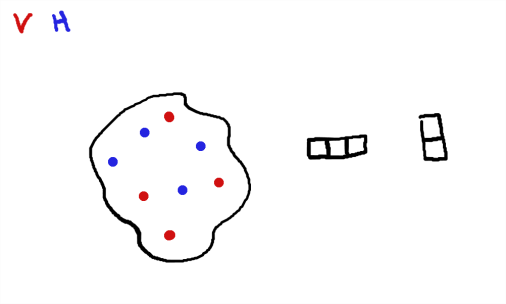

V+
-2
<
-1
=
-1
<
+1
=
+1
<
+2

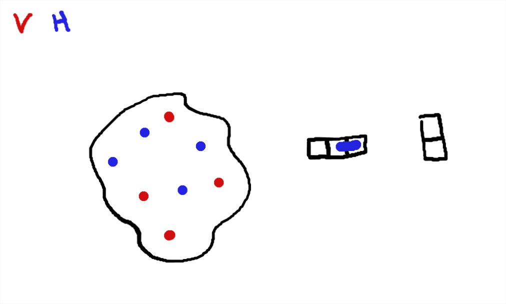

-1
+1



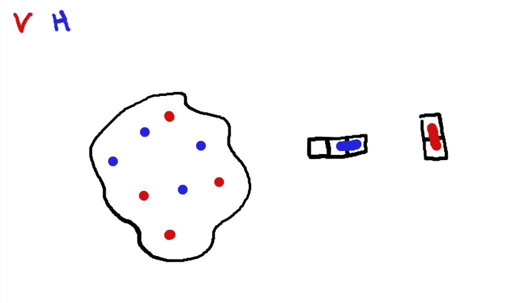


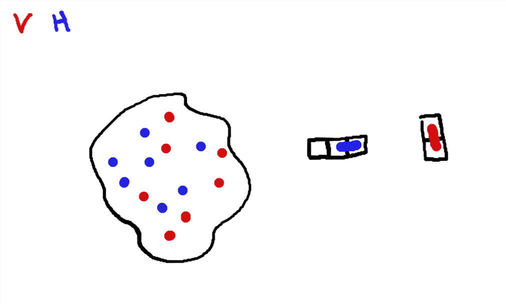

V
H


V H


V
H

Mas será que cancela?




V
H

Proposição
Seja G um jogo qualquer. Suponha $Z \in \mathcal{P}$. Então a classe de G é a mesma de $G + Z$.

Proposição
Seja G um jogo qualquer. Suponha $Z \in \mathcal{P}$. Então a classe de G é a mesma de $G + Z$.

Demonstração.
Vamos mostrar que o jogador que ganhava antes, continua ganhando.

Proposição
Seja G um jogo qualquer. Suponha $Z \in \mathcal{P}$. Então a classe de G é a mesma de $G + Z$.

Demonstração.
Vamos mostrar que o jogador que ganhava antes, continua ganhando. Enquanto o outro jogador jogar em G, responda em G.

Proposição
Seja G um jogo qualquer. Suponha $Z \in \mathcal{P}$. Então a classe de G é a mesma de $G + Z$.

Demonstração.
Vamos mostrar que o jogador que ganhava antes, continua ganhando. Enquanto o outro jogador jogar em G, responda em G. Quando o outro jogador jogar em Z, jogue em Z como segundo jogador.

Proposição
Seja G um jogo qualquer. Suponha $Z \in \mathcal{P}$. Então a classe de G é a mesma de $G + Z$.

Demonstração.
Vamos mostrar que o jogador que ganhava antes, continua ganhando. Enquanto o outro jogador jogar em G, responda em G. Quando o outro jogador jogar em Z, jogue em Z como segundo jogador. Repita. $\square$

Suponha que Z seja um jogo que, não importa qual G você toma, G e $G + Z$ têm a mesma classe.

Suponha que Z seja um jogo que, não importa qual G você toma, G e $G + Z$ têm a mesma classe.

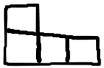
Note que isso inclui o caso em que G é o jogo vazio

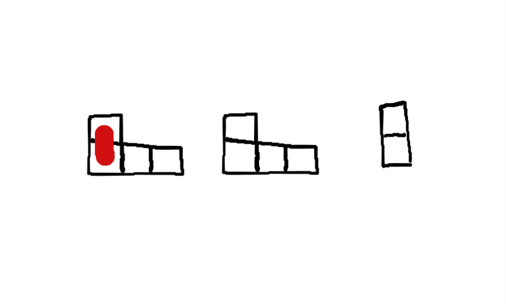
Suponha que Z seja um jogo que, não importa qual G você toma, G e $G + Z$ têm a mesma classe.

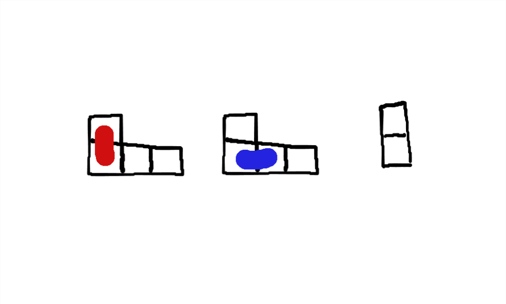
Note que isso inclui o caso em que G é o jogo vazio - que é $\mathcal{P}$.

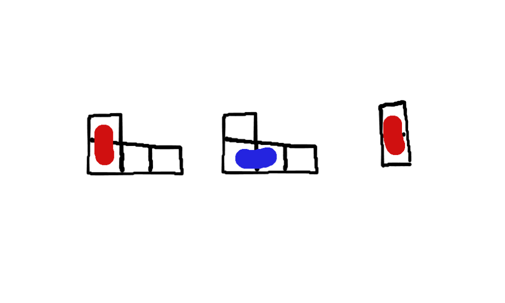
Suponha que Z seja um jogo que, não importa qual G você toma, G e $G + Z$ têm a mesma classe.

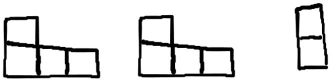
Note que isso inclui o caso em que G é o jogo vazio - que é $\mathcal{P}$. Logo, $G + Z \in \mathcal{P}$, mas como $Z = G + Z$, temos que Z obrigatoriamente precisa ser $\mathcal{P}$.

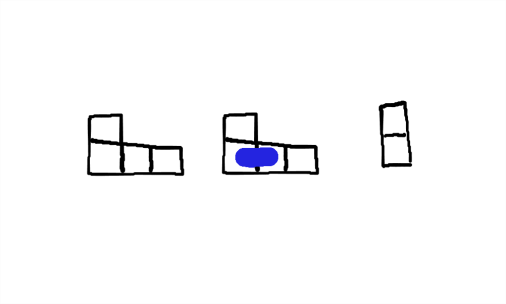


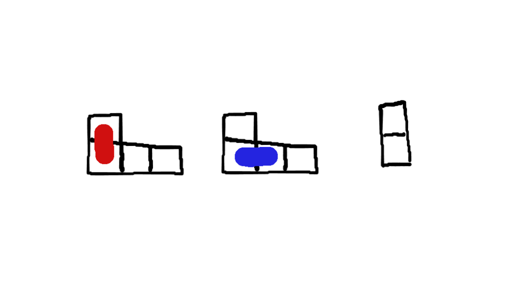


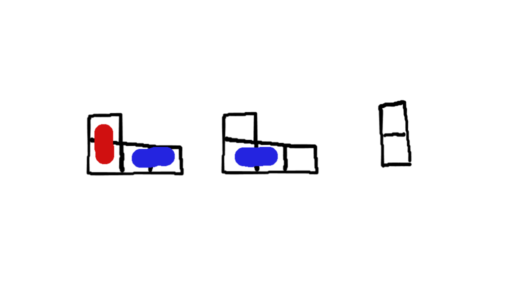


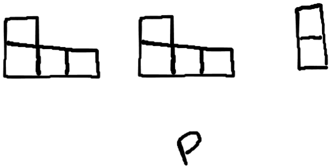


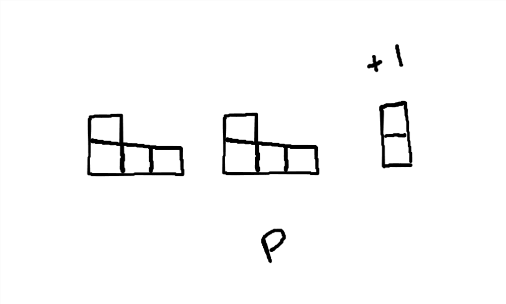


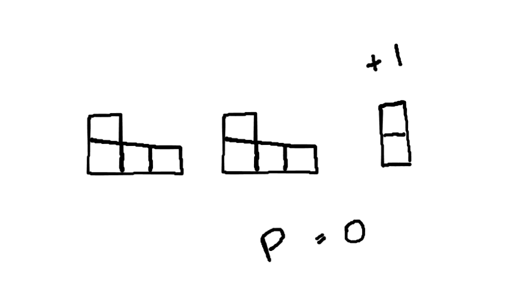


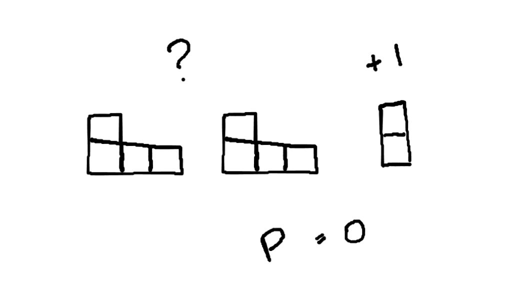





P


+1
P


+1
P = 0


?
+1
P = 0

Proposição
Seja G um jogo qualquer e seja $X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ (ou seja, Left *vence se jogar segundo). Então a classe de $G + X$ é tão boa para* Left *quanto a classe de G.*

	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	?	$\mathcal{L}$ ou $\mathcal{N}$
$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{N}$
$\mathcal{R}$	?	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{N}$
$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$ ou $\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{N}$	?

Mais uma técnica

Suponha que colocamos uma restrição sobre quais jogadas um determinado jogador pode fazer. Se ainda assim ele vence, então ele vence mesmo sem a restrição.

Suponha que colocamos uma restrição sobre quais jogadas um determinado jogador pode fazer. Se ainda assim ele vence, então ele vence mesmo sem a restrição.

Este é o princípio “pé-nas-costas” (One-Hand-Tied principle).

Suponha que colocamos uma restrição sobre quais jogadas um determinado jogador pode fazer. Se ainda assim ele vence, então ele vence mesmo sem a restrição.

Este é o princípio "pé-nas-costas" (One-Hand-Tied principle).

EXERCÍCIO Resolver o DOMINANDO nos casos $2 \times n$.

Suponha que colocamos uma restrição sobre quais jogadas um determinado jogador pode fazer. Se ainda assim ele vence, então ele vence mesmo sem a restrição.

Este é o princípio "pé-nas-costas" (One-Hand-Tied principle).

EXERCÍCIO Resolver o DOMINANDO nos casos $2 \times n$.

EXERCÍCIO Resolver o DOMINANDO nos casos $3 \times n$.

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;
- $G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$;

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;
- $G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$;
- $-G := \{-\mathcal{G}^R | -\mathcal{G}^L\}$;

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;
- $G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$;
- $-G := \{-\mathcal{G}^R| - \mathcal{G}^L\}$;
- $G = H$ se $\forall X \;\; G + X$ é da mesma classe que $H + X$;

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;
- $G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$;
- $-G := \{-\mathcal{G}^R| - \mathcal{G}^L\}$;
- $G = H$ se $\forall X\ G + X$ é da mesma classe que $H + X$;
- $G \geq H$ se $\forall X$ Left vencer $H + X$ implica que Left vence $G + X$.

- G é da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$, onde $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos;
- $G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$;
- $-G := \{-\mathcal{G}^R| - \mathcal{G}^L\}$;
- $G = H$ se $\forall X\ G + X$ é da mesma classe que $H + X$;
- $G \geq H$ se $\forall X$ Left vencer $H + X$ implica que Left vence $G + X$.

No último, queremos dizer que Left vencer $H + X$ como jogador S, implica Left vencer como jogador S em $G + X$, com S variando entre primeiro e segundo.

Começamos com G ser da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$.

Começamos com G ser da forma $\{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^R\}$.

Note que fazendo $\mathcal{G}^L = \mathcal{G}^R = \emptyset$, temos que $\{\ |\ \}$ é um jogo. Vamos chamar esse jogo de 0.

Vamos dizer que o jogo 0 nasceu no dia 0.

Vamos dizer que o jogo 0 nasceu no dia 0.

Dado G um jogo qualquer, vamos definir que G nasceu no dia $n+1$ se o maior dia de nascimento nos jogos de $\mathcal{G}^L \cup \mathcal{G}^R$ for n.

Nascidos até dia 1

Nascidos até dia 1

- $0 := \{ \mid \}$;

Nascidos até dia 1

- $0 := \{\ |\ \}$;
- $1 := \{0|\ \}$;

Nascidos até dia 1

- $0 := \{\ |\ \}$;
- $1 := \{0|\ \}$;
- $-1 := \{\ |0\}$;

Nascidos até dia 1

- $0 := \{\ |\ \}$;
- $1 := \{0|\ \}$;
- $-1 := \{\ |0\}$;
- $* := \{0|0\}$.

Vamos trabalhar apenas com jogos cujo nascimento é algum $n \in \mathbb{N}$.

Vamos trabalhar apenas com jogos cujo nascimento é algum $n \in \mathbb{N}$.

Note que isso também implica que $G \in \mathcal{G}^L \cup \mathcal{G}^R$ e coisas do tipo (não entra em loop).

Lema
Considere $g(n)$ a quantidade de jogos nascidos até o dia n. Então $g(n)$ é finito.

Lema
Considere $g(n)$ a quantidade de jogos nascidos até o dia n. Então $g(n)$ é finito.

Demonstração.
Por indução.

Lema
Considere $g(n)$ a quantidade de jogos nascidos até o dia n. Então $g(n)$ é finito.

Demonstração.
Por indução. Note que $g(0) = 1$.

Lema
Considere $g(n)$ a quantidade de jogos nascidos até o dia n. Então $g(n)$ é finito.

Demonstração.
Por indução. Note que $g(0) = 1$.

Note que dado G nascido até $n+1$, $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos de aniversário até n.

Lema
Considere $g(n)$ a quantidade de jogos nascidos até o dia n. Então $g(n)$ é finito.

Demonstração.
Por indução. Note que $g(0) = 1$.

Note que dado G nascido até $n+1$, $\mathcal{G}^L$ e $\mathcal{G}^R$ são conjuntos de jogos de aniversário até n.

Assim, existem apenas $2^{g(n)}2^{g(n)}$ possibilidades para estes conjuntos. $\square$

Corolário
Se G tem aniversário finito, G tem um número finito de opções.

Corolário
Se G tem aniversário finito, G tem um número finito de opções.

Demonstração.
Note que G tem aniversário até $n+1$, então $|\mathcal{G}^L|, |\mathcal{G}^R| \leq g(n)$. $\square$

$$G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$$

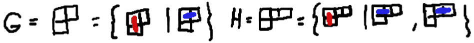
$$G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$$

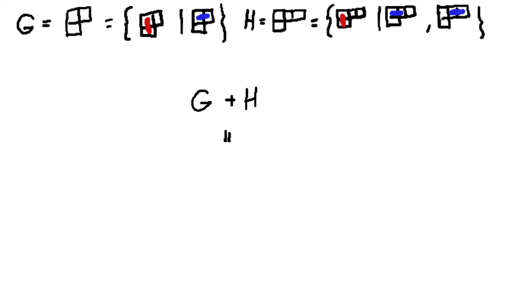
Note o abuso na notação: $G + \mathcal{F} = \{G + F : F \in \mathcal{F}\}$.

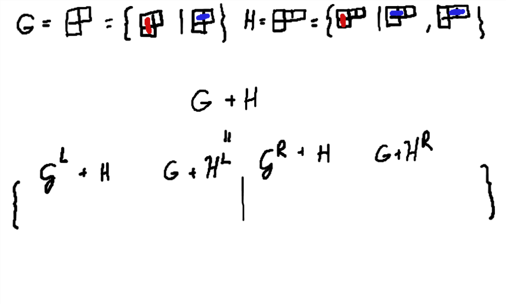
$$G + H := \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\}$$

Note o abuso na notação: $G + \mathcal{F} = \{G + F : F \in \mathcal{F}\}$.

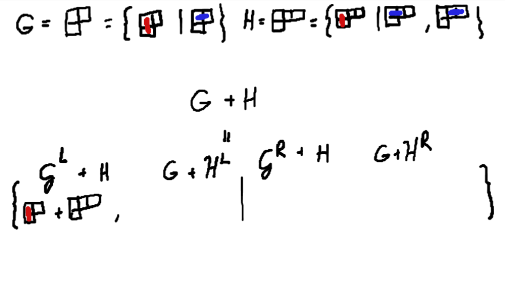
Outro abuso é não usar a notação de união.

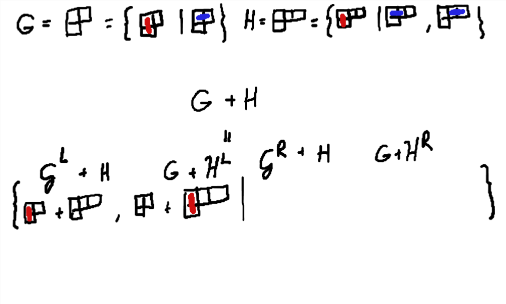

G =
H =

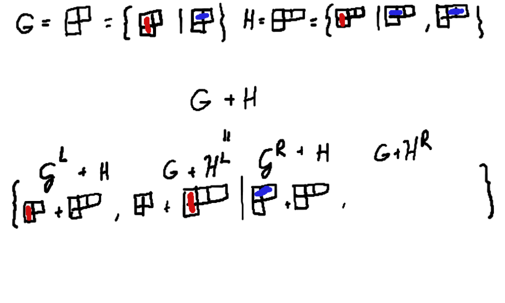

G + H

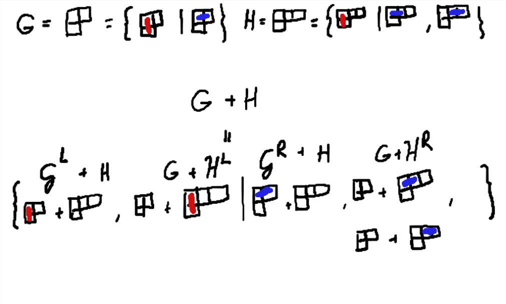

G = = { | }
H = = { | , }
G + H
$G^L + H$
$G + H^L$
$G^R + H$
$G + H^R$

Era o que a gente queria?




G =
H =
G + H
G^L + H
G + H^L
G^R + H
G + H^R


G =
= {
}
H =
= {
}
G + H
G^L + H
G + H^L
G^R + H
G+H^R


G =
H =
G + H
G^L + H
G + H^L
G^R + H
G + H^R

Lema
Dado $\mathcal{F}$ um conjunto de jogos, $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$.

Lema
Dado $\mathcal{F}$ um conjunto de jogos, $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$.

Demonstração.
Basta notar que um elemento de $\mathcal{F} + \emptyset$ seria da forma $F + A$, onde $A \in \emptyset$, o que não é possível. $\square$

Proposição
$G + 0 = G$

Lema
Dado $\mathcal{F}$ um conjunto de jogos, $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$.

Demonstração.
Basta notar que um elemento de $\mathcal{F} + \emptyset$ seria da forma $F + A$, onde $A \in \emptyset$, o que não é possível. $\square$

Proposição
$G + 0 = G$

Demonstração.

$$G + 0 \quad = \quad \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} + \{\ |\ \}$$

Lema
Dado $\mathcal{F}$ um conjunto de jogos, $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$.

Demonstração.
Basta notar que um elemento de $\mathcal{F} + \emptyset$ seria da forma $F + A$, onde $A \in \emptyset$, o que não é possível. □

Proposição
$G + 0 = G$

Demonstração.

$$\begin{aligned} G + 0 &= \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} + \{\ |\ \} \\ &= \{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset | \mathcal{G}^R + 0, G + \emptyset\} \end{aligned}$$

Lema
Dado $\mathcal{F}$ *um conjunto de jogos,* $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$*.*

Demonstração.
Basta notar que um elemento de $\mathcal{F} + \emptyset$ seria da forma $F + A$, onde $A \in \emptyset$, o que não é possível. $\square$

Proposição
$G + 0 = G$

Demonstração.

$$\begin{aligned} G + 0 &= \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} + \{\ |\ \} \\ &= \{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset | \mathcal{G}^R + 0, G + \emptyset\} \\ &= \{\mathcal{G}^L + 0 | \mathcal{G}^R + 0\} \end{aligned}$$

Lema
Dado $\mathcal{F}$ um conjunto de jogos, $\mathcal{F} + \emptyset = \emptyset$.

Demonstração.
Basta notar que um elemento de $\mathcal{F} + \emptyset$ seria da forma $F + A$, onde $A \in \emptyset$, o que não é possível. □

Proposição
$G + 0 = G$

Demonstração.

$$\begin{aligned} G + 0 &= \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} + \{\ |\ \} \\ &= \{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset | \mathcal{G}^R + 0, G + \emptyset\} \\ &= \{\mathcal{G}^L + 0 | \mathcal{G}^R + 0\} \\ &= \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} \end{aligned}$$

□

Proposição
Soma de jogos é comutativa e associativa

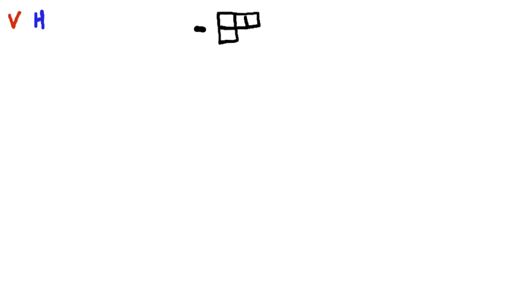
Proposição
Soma de jogos é comutativa e associativa

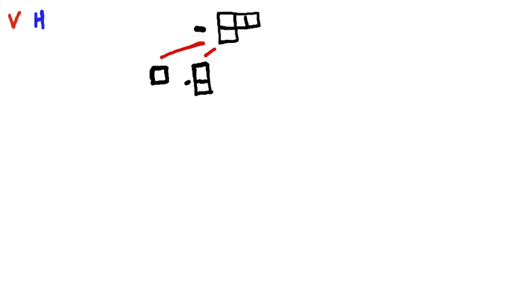
Demonstração.
EXERCÍCIO. □

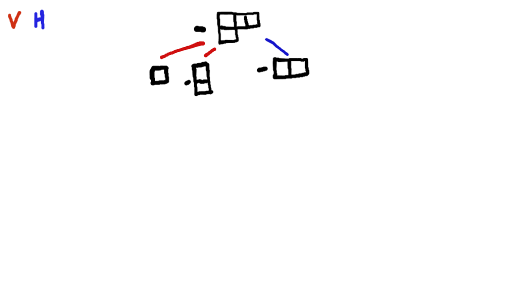
$$-G := \{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\}$$

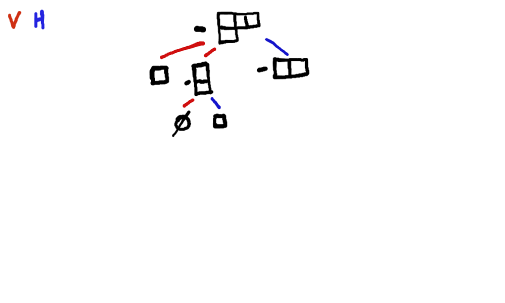
$$-G := \{-\mathcal{G}^R | -\mathcal{G}^L\}$$

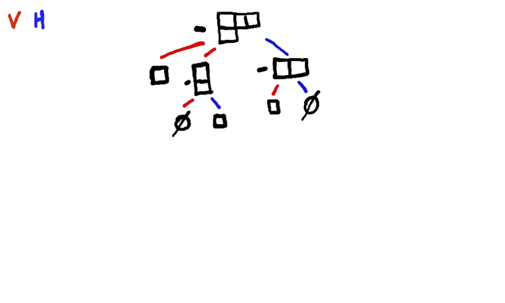
Onde $-\mathcal{F} = \{-F : F \in \mathcal{F}\}$.

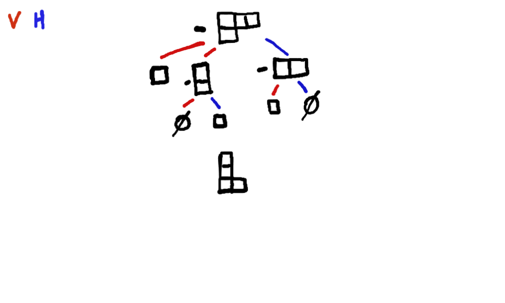

V H

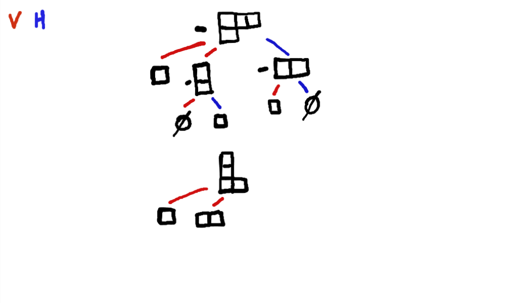

V
H

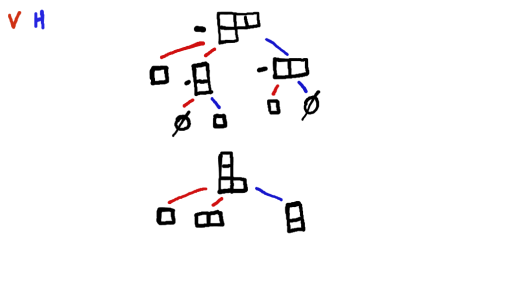

V
H

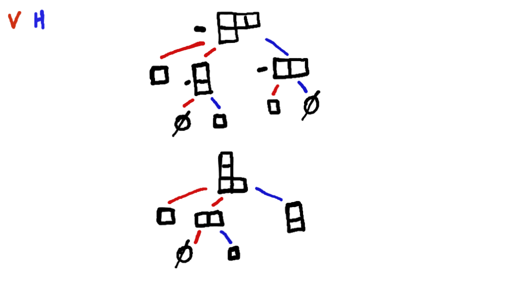

V H

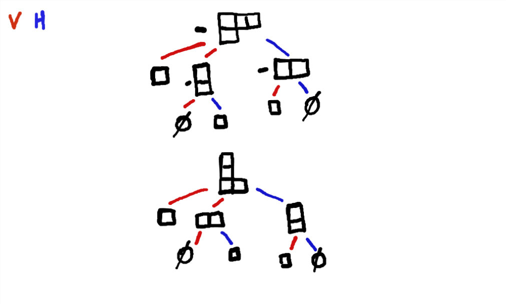

V H
∅
∅


V
H


V
H


V H


V H


V H

Podemos definir

$$G - H := G + (-H)$$

Podemos definir

$$G - H := G + (-H)$$

Exercício Mostre que $-(-G) = G$.

Podemos definir

$$G - H := G + (-H)$$

Exercício Mostre que $-(-G) = G$.

Exercício Mostre que $-(G + H) = (-G) + (-H)$.