Uma demonstração do Teorema de Brouwer usando o jogo Hex

Leandro F. Aurichi

Não há empates

Não há empates

Vamos começar supondo o seguinte resultado sobre o jogo Hex:

Não há empates

Vamos começar supondo o seguinte resultado sobre o jogo Hex:

Proposição
Se um tabuleiro $n \times n$ está completamente preenchido, então há um (único) vencedor.

Não há empates

Vamos começar supondo o seguinte resultado sobre o jogo Hex:

Proposição
Se um tabuleiro $n \times n$ está completamente preenchido, então há um (único) vencedor.

Note que isso é um pouco mais forte que dizer que não há empates.

Outra norma

Vamos trabalhar com a seguinte norma sobre o $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$$

Outra norma

Vamos trabalhar com a seguinte norma sobre o $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$$

Como essa norma é equivalente a usual, não teremos problemas.

O Teorema do ponto fixo de Brouwer

O Teorema do ponto fixo de Brouwer

Teorema
Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *contínua. Então existe* $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ *tal que* $f(x, y) = (x, y)$.

Uniformemente contínua

Como f é contínua em (x, y), temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\|$$

Uniformemente contínua

Como f é contínua em (x, y), temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\|$$

Como $[0, 1] \times [0, 1]$ é compacto, podemos encontrar um δ comum a todos os (x, y)'s.

Uniformemente contínua

Como f é contínua em (x, y), temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\|$$

Como $[0, 1] \times [0, 1]$ é compacto, podemos encontrar um δ comum a todos os (x, y)'s. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\|$$

para todo $(x, y), (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

O ponto fixo

Além disso, para mostrarmos que existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x, y) = (x, y)$, basta mostrarmos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$\|f(x, y) - (x, y)\| < \varepsilon$$

De fato...

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário).

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário). Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja n tal que

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário). Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja n tal que

- $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}$;

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário). Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja n tal que

- $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$;

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário). Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja n tal que

- $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $d(f(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

De fato...

... isso vale para qualquer compacto:

Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n+1}$. Por compacidade, podemos supor tal sequência convergente para algum $x \in X$ (passando a uma subsequência se necessário). Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja n tal que

- $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $d(f(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, f(x)) \\ &\leq d(x, x_n) + d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Mudando um pouco o tabuleiro

Podemos jogar Hex num tabuleiro $\{0, ..., n\} \times \{0, ..., n\}$ definindo que (a, b) é adjacente a (m, n) se, e somente se, as duas casas dividem um lado ou o vértice superior direito de uma é o mesmo que o vértice inferior esquerdo da outra.

A demonstração

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \times [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$.

A demonstração

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \times [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $\|f(x,y) - (x,y)\| < \varepsilon$, terminamos.

A demonstração

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \times [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $\|f(x,y) - (x,y)\| < \varepsilon$, terminamos.

Seja $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y, a, b \in [0,1]$,

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(a,b)\| < \varepsilon$$

A demonstração

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \times [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $\|f(x,y) - (x,y)\| < \varepsilon$, terminamos.

Seja $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y, a, b \in [0,1]$,

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(a,b)\| < \varepsilon$$

Seja $n > 1$ tal que $\delta, \varepsilon < \frac{1}{n}$.

Definindo um jogo

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. De fato,, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. De fato,, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) - \frac{a}{n} + \frac{c}{n} > 2\varepsilon$$

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. De fato,, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) - \frac{a}{n} + \frac{c}{n} > 2\varepsilon$$

Mas, se $(a, b), (c, d)$ são adjacentes, $\frac{c}{n} - \frac{a}{n} < \frac{1}{n} < \delta$.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. De fato,, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) - \frac{a}{n} + \frac{c}{n} > 2\varepsilon$$

Mas, se $(a, b), (c, d)$ são adjacentes, $\frac{c}{n} - \frac{a}{n} < \frac{1}{n} < \delta$. Assim, obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) > \varepsilon$$

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. De fato,, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) - \frac{a}{n} + \frac{c}{n} > 2\varepsilon$$

Mas, se $(a, b), (c, d)$ são adjacentes, $\frac{c}{n} - \frac{a}{n} < \frac{1}{n} < \delta$. Assim, obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) > \varepsilon$$

Mas, isso contradiz a continuidade da f.

Empate?

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-.

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes.

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical).

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical). Note que, se houver uma casa vazia, demonstramos o teorema: se (x, y) está vazia, $\|f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})\| < \varepsilon$.

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical). Note que, se houver uma casa vazia, demonstramos o teorema: se (x, y) está vazia, $\|f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})\| < \varepsilon$. Suponha que todas as casas estão preenchidas.

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical). Note que, se houver uma casa vazia, demonstramos o teorema: se (x, y) está vazia, $\|f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})\| < \varepsilon$. Suponha que todas as casas estão preenchidas. Como não pode haver empate, um dos jogadores venceu.

Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical). Note que, se houver uma casa vazia, demonstramos o teorema: se (x, y) está vazia, $\|f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})\| < \varepsilon$. Suponha que todas as casas estão preenchidas. Como não pode haver empate, um dos jogadores venceu. Sem perda de generalidade, suponha que foi o jogador I.

Não

Não

Como H^+ e H^- não são adjacentes, temos que o caminho vitorioso de I está contido inteiramente num deles.

Não

Como H^+ e H^- não são adjacentes, temos que o caminho vitorioso de I está contido inteiramente num deles. Sem perda de generalidade, suponha que está contido em H^-. Note que isso é um absurdo, pois nenhum ponto de H^- contém um ponto da forma $(0, y)$.