Exercícios de enumerabilidade

Grupo:

Definição 0.1. Dizemos que um conjunto X é enumerável[1] se $|X| = |\mathbb{N}|$.

1 Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Mostre que $A \cup B$ é enumerável (para facilitar, mostre o caso em que eles são disjuntos).

2 Mostre que, se para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n é enumerável, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é enumerável (novamente, faça o caso em que eles são todos dois a dois disjuntos).

[1]Em geral, um conjunto finito também é dito enumerável, mas vamos supor nestes exercícios que todos os conjuntos são infinitos para facilitar.

3 Seja X um conjunto enumerável. Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, considere $X_n = \{A \subset X : A \text{ tem } n \text{ elementos}\}$.

(a) Mostre que X_1 é enumerável.

(b) Seja $x \in X$. Lembre-se que existe $f : X \to X \setminus \{x\}$ bijetora. Mostre que $|X_n| = |Y|$, onde $Y = \{B \subset X \setminus \{x\} : B \text{ tem } n \text{ elementos}\}$.

(c) Dado $x \in X$, mostre que $|W| = |X_n|$, onde $W = \{B \subset X : x \in B \text{ e } B \text{ tem } n+1 \text{ elementos}\}$.

(d) Mostre que cada X_n é enumerável.

Definição 0.2. Dizemos que um conjunto A é **finito** se A tem n elementos para algum n.

(e) Mostre que $\mathcal{F}$ é enumerável, onde $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é finito}\}$.