Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

23 de março de 2015

[1] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Contar coisas é muito útil. Contar relações entre coisas também. Basicamente, veremos maneiras de contar coisas. Para isso, veremos maneiras de descrever coisas - incluindo aí, descrever relações entre coisas. E vamos ver maneiras de como contar coisas simplesmente. Para ilustrar isso, comecemos com o princípio da casa dos pombos:

Se existem mais pombos que casas, tem pelo menos uma casa com mais de um pombo.

Para isso fazer sentido, temos que supor que todo pombo está em alguma casa.

Formalizando um pouco:

Teorema 1.0.1 (Princípio da casa dos pombos)**.** *Seja* $f : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., m\}$ *uma função com* $n > m$. *Então existem* $i \neq j$ *tais que* $f(i) = f(j)$.

Deixando um pouco mais geral e mais compacto:

Teorema 1.0.2 (Princípio da casa dos pombos)**.** *Seja* $f : A \longrightarrow B$ *com* $|A| > |B|$. *Então* f *não é injetora.*

Desse jeito, vale até se A ou B forem infinitos.

Demonstração. Suponha que não. Então podemos definir uma inversa de $g : Imf(f) \longrightarrow A$ sobrejetora. Como $Im(g) \subset B$, teríamos que $|A| \leq |B|$. $\square$

Apesar de bastante intuitivo, este princípio tem diversas aplicações. Vamos apresentar algumas.

Exemplo 1.0.3. Considere uma gaveta contendo meias vermelhas, brancas e amarelas, todas misturadas. Quantas meias no mínimo são necessárias se retirar da gaveta para se ter certeza de formar um par de uma única cor?

Como são 3 cores, basta pegarmos 4 meias. Assim, com certeza tem uma com cor repetida. Além disso, é possível pegar uma meia de cada cor - o que mostra que 3 meias não é suficiente.

Exemplo 1.0.4. Na cidade de São Paulo existem pelo menos duas pessoas com a mesma quantidade de fios de cabelo.

Mesmo sem fazer essa suposição, podemos simplesmente "excluir" todas as pessoas que tem mais do que 1.000.000 de fios que ainda sobram mais pessoas que possibilidades. Podemos até excluir as com 0.

Basta notar que um ser humano tem, em média, 150.000 fios de cabelo. Assim, se fizermos a suposição (bem conservadora) de que todos os habitantes de São Paulo tem entre 0 e 1.000.000 fios de cabelos, basta notarmos que existem mais habitantes do que possibilidades.

Exemplo 1.0.5. Considere n pessoas e suponha que essas pessoas se cumprimentaram com apertos de mão entre si - mas não necessariamente todos os cumprimentos possíveis. Então existem pelo menos duas pessoas que cumprimentaram uma quantidade igual de pessoas.

É um bom jeito de não perder tempo escolhendo nomes para filhos

Chamemos as pessoas de $1, ..., n$. Considere $f(i)$ a quantidade de pessoas que i cumprimentou. Note que, a princípio, para cada i, as possibilidades variam entre 0 e $n-1$. Aparentemente, não podemos aplicar o princípio aqui, afinal, são n possibilidades. Mas note que se $f(i) = 0$ para algum i, então nenhum j pode ser tal que $f(j) = n-1$ (pois se i não cumprimentou ninguém, j não pode ter cumprimentado todos). Analogamente, se $f(i) = n-1$ para algum i, então não existe j tal que $f(j) = 0$. Assim $\{f(i) : 1 \leq n\} \subset \{0, ..., n-2\}$ ou $\{f(i) : 1 \leq n\} \subset \{1, ..., n-1\}$ e, portanto, $\{f(i) : 1 \leq i \leq n\}$ tem, no máximo, $n-1$ elementos. Logo, existem $i \neq j$ com $f(i) = f(j)$.

Exemplo 1.0.6. Todo programa de compactação que necessariamente diminui o tamanho do arquivo de entrada é "com perda"[1].

Se quiser formular isso mais formalmente, trabalhe com os arquivos como sequências de 0's e 1's e o tamanho do arquivo é a quantidade de algarismos nele presente.

Fixe um tamanho de arquivo. Seja S o conjunto de todos os arquivos possíveis com tal tamanho. Note que a quantidade de arquivos com tamanho estritamente menor que o tamanho fixado é menor que a quantidade de elementos de S. Logo, um deles é repetido e, portanto, existem pelo menos duas alternativas diferentes de "descompactação" para tal elemento repetido.

Até agora foi muito fácil. Vamos esquentar um pouco.

Exemplo 1.0.7. Considere 101 números naturais estritamente positivos organizados num círculo e tais que sua soma seja 300. Então existe uma coleção de números adjacentes neste círculo cuja soma é 200.

Fixe qualquer um destes números. Vamos chamar tal número de a_1. A partir dele e girando em sentido horário, enumere os outros como $a_1, ..., a_{101}$. Para cada $n = 1, ..., 101$, defina

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

[1]Isto é, pode não ser possível "recuperar" exatamente o arquivo depois de compacta-lo. Um exemplo disso é a conversão de imagens para o formato JPEG.

Vamos analisar o resto da divisão de cada S_n por 100. Como só existem 100 possibilidades para tal resto, existem i, j distintos tais que S_i e S_j tem o mesmo resto. Sem perda de generalidade, suponha $i > j$. Logo, $S_i > S_j$. Note que $S_i - S_j$ é divisível por 100. Ou seja, só pode ser 0, 100, 200 ou 300. Como todo número é estritamente positivo, só nos restam as possbilidades 100 ou 200. Note também que

$$S_i - S_j = a_{j+1} + \cdots + a_i$$

Ou seja, se $S_i - S_j = 200$, já encontramos nossa coleção. Se não for, basta pegarmos como a coleção todos os outros números do círculo.

Exemplo 1.0.8. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Existe um múltiplo de n formado apenas pelos dígitos 0 e 7.

Considere o conjunto

$$S = \{7, 77, ..., \underbrace{77 \cdots 7}_{n \text{ vezes}}\}$$

Note que S tem n elementos. Vamos olhar para o resto de cada um dos elementos de S na divisão por n. Existem n possibilidades para cada um dos restos (variando de 0 a $n-1$). Se algum deles for 0, já encontramos o múltiplio desejado. Se todos forem diferentes de 0, pelo princípio da casa dos pombos, existem $a, b \in S$ com o mesmo resto na divisão por n. Sem perda de generalidade, suponha $a > b$. Note que $a - b$ tem resto 0 na divisão por n (ou seja, é um múltiplo de n) e que é formado apenas pelos algarismos 7 e 0. Na verdade, ele é da forma:

$$\underbrace{77 \cdots 7 \overbrace{0 \cdots 0}^{\# \text{ dígitos de } b}}_{\# \text{ dígitos de } a}$$

Se você já fez análise alguma vez na vida, já percebeu que dada uma sequência infinita de números distintos, existe uma subsequência (também infinita) monótona. Eis uma versão finita:

Teorema 1.0.9 (Erdös / Szekeres)**.** *Sejam $m, n \geq 1$. Então, dada uma sequência com $mn + 1$ números reais distintos, existe uma subsequência crescente com $m + 1$ números ou existe uma subsequência decrescente com $n + 1$ números.*

Demonstração. Considere $\sigma = x_1 x_2 \cdots x_{mn+1}$ tal sequência. Para cada $i = 1, ..., mn+1$, seja a_i a quantidade de elementos da maior sequência crescente começando em x_i. Seja b_i a quantidade de elementos da maior sequência descrescente terminando em x_i. Note que se algum i é tal que $a_i \geq m+1$ ou algum $b_i \geq n+1$, terminamos.

Ou seja, só precisamos considerar o caso em que $a_i \leq m$ e $b_i \leq n$ para todo i. Note que existem mn pares da forma (a, b) onde $1 \leq a \leq m$ e $1 \leq b \leq n$. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, existem i_1 e i_2 tais que $1 \leq i_1 < i_2 \leq mn+1$ tais que $(a_{i_1}, b_{i_1}) = (a_{i_2}, b_{i_2})$. Como $x_{i_1} \neq x_{i_2}$, temos dois casos:

- $x_{i_1} < x_{i_2}$: Neste caso, qualquer sequência crescente começando em x_{i_2} pode ser estendida para uma começando em x_{i_1}. Logo, $a_{i_1} > a_{i_2}$.

- $x_{i_1} > x_{i_2}$: Neste caso, qualquer sequência decrescente terminando em x_{i_1} pode ser estendida para uma terminando em x_{i_2}. Logo, $b_{i_1} < b_{i_2}$.

Em ambos os casos, temos que $(a_{i_1}, b_{i_1}) \neq (a_{i_2}, b_{i_2})$, contradição. □

Temos também uma outra formulação para o princípio da casa dos pombos: o princípio do cabeça de pombo.

> "Se ao entrar num elevador, existem mais botões pressionados do que pessoas no elevador, existe pelo menos um cabeça de pombo."

Alongamentos

Alongamento 1.0.10. Prove que dados n números inteiros (com $n \geq 2$), existem dois deles cuja diferença é divisível por $n-1$.

Exercícios

Exercício 1.0.11. Melhore o exemplo sobre compactação. Mostre que se um programa de compactação é sem perdas e que ele de fato diminua o tamanho de pelo menos um arquivo, então existe um que ao ser compactado, aumenta de tamanho.

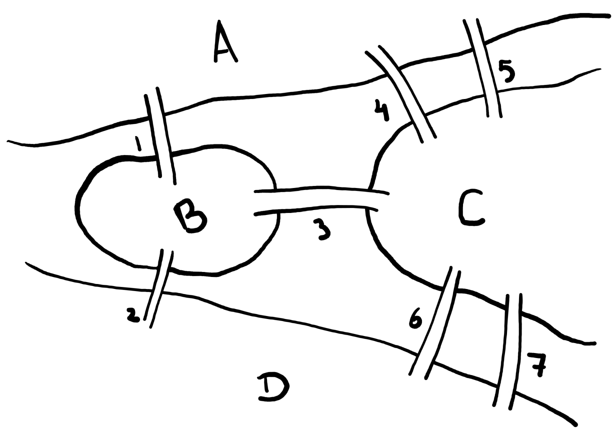
Exercício 1.0.12. Mostre que, dados 23 números inteiros, existem dois cuja diferença de seus quadrados é um múltiplo de 100.

Exercício 1.0.13. Mostre que o teorema Erdös / Szekeres é ótimo no seguinte sentido: Encontre uma sequência de 4^2 números de forma que não exista uma sequência monótona de tamanho 5. Generalize para n^2 qualquer.

Capítulo 2

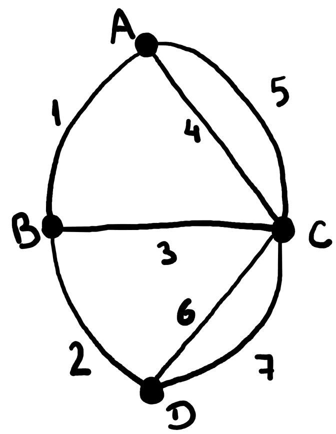
Grafos

Vamos começar apresentando um problema simples. Ele é conhecido como o problema de Königsberg. Considere o seguinte "mapa" para uma região da cidade de Königsberg:



A cidade é composta por 4 regiões A, B, C e D, separadas por um rio e tais regiões são ligadas apenas por pontes (os números $1, ...7$ no mapa). O problema é o seguinte: é possível começar em alguma das regiões de Königsberg e percorrer um caminho que passe por todas as pontes sem repeti-las e voltar ao ponto original?

Um jeito bem fácil de resolver esse problema é primeiro eliminar os dados não importantes para o problema. Basicamente, podemos fazer o seguinte desenho:



Vamos definir essas coisas direito em instantes.

O desenho representa um típico grafo. Cada bolinha nele (que chamaremos de vértices) representa uma das regiões da cidade (mantivemos os mesmos nomes) e cada linha ligando estes vértices (que chamaremos de arestas) representam as pontes. Assim, nossa pergunta se resume a responder "é possível percorrer o grafo acima, passando por todas as arestas uma única vez e voltar ao vértice original?".

Vejamos que a resposta é não. Suponha que pudéssemos fazer isso, começando no vértice A. Note que, necessariamente, o caminho começaria "saindo" de A por alguma aresta que se conecta a A. Depois "voltaria" a A por alguma das outras duas arestas (não se pode repetir) e finalmente sairia de A pela aresta restante. O importante deste argumento é que, se começarmos em A não há como passar por todas as arestas que se conectam a A sem repetir e terminar no próprio A. Ou seja, não é possível um caminho começar e terminar em A. Note também que a única coisa que usamos para este argumento funcionar é o fato de A ter uma quantidade ímpar de arestas se conectando a ele (3). Note que todos os outros vértices também tem esta característica. Assim, não é possível realizar tal caminho no grafo.

Esse tipo de raciocínio é bastante comum é o assunto das próximas seções.

2.1 Caminhos eulerianos

A definição informal de um grafo é uma coleção de vértices e de arestas que ligam tais vértices. Formalmente, podemos fazer algo assim:

Esta definição não permite duas arestas distintas ligando os mesmos vértices. Mas permite uma aresta ligar um vértice a ele mesmo. Para efeitos de clareza, não vamos considerar grafos com tais arestas.

Definição 2.1.1. Um **grafo** é um par $G = (G_V, G_A)$ onde V é um conjunto de pontos (que chamaremos de **vértices**) e A é um conjunto de pares de pontos de V (que chamaremos de **arestas**).

Podemos definir o grau de um vértice simplesmente contando em quantas arestas ele "aparece":

Definição 2.1.2. Seja G um grafo. Dado $v \in G_V$, denotamos por $g(v)$ (**grau de** v) o número $|\{a \in G_A : v \in a\}|$.

Caminhos também são fáceis de definir:

Definição 2.1.3. Seja G um grafo. Dizemos que $v_1, ..., v_n$ é um **caminho** em G se cada $v_i \in G_V$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in G_A$ para cada $i = 1, ..., n-1$. Dizemos que um caminho $v_1, ..., v_n$ é um **circuito** se $v_1 = v_n$.

O caminho apresentado no problema tem um nome especial:

Definição 2.1.4. Dado G um grafo, dizemos que um caminho $v_1, ..., v_n$ é um **caminho euleriano** se, para todo $a \in G_A$, existe um único $i = 1, ..., n-1$ tal que $a = \{v_i, v_{i+1}\}$. Um **circuito euleriano** é definido de forma análoga.

A discussão acima simplesmente nos dá o seguinte critério:

Proposição 2.1.5. *Se um grafo G admite um circuito euleriano, então todo vértice de G tem grau par.*

Salvo certos cados triviais, temos também a volta do resultado anterior. Mas antes, vamos fazer alguns resultados e definições auxiliares.

Definição 2.1.6. Um grafo G é **grafo conexo** se, dados $v_1, v_2 \in G_V$, existe um caminho iniciando em v_1 e terminando em v_2.

Proposição 2.1.7. *Seja G um grafo tal que todo vértice tem grau par. Então, dado v um vértice qualquer de G existe um circuito passando por v que não repete arestas.*

Demonstração. Seja $\{v, w_1\}$ uma aresta qualquer de G. A cada w_i, encontre uma aresta $\{w_i, w_{i+1}\}$ que ainda não tenha sido utilizada. Se, em algum momento $w_{i+1} = v$, terminamos (e encontramos o circuito). Vamos provar que sempre chegamos a v: suponha que não. Seja $v, w_1, ..., w_{i+1}$ um caminho que não chegou a w e que não foi mais possível continuar (estamos usando aqui que o grafo é finito). Note que, com exeção de v e w_{i+1}, a cada vértice que passamos, "gastamos" duas arestas (uma para entrar, outra para sair). Assim, ao chegamor em w_i, w_{i+1} ainda tem uma quantidade par de arestas disponíveis. Logo, ao gastarmos $\{w_i, w_{i+1}\}$, ainda sobra uma aresta e, portanto, ainda podemos sair de w_{i+1}, contradição. $\square$

Agora ficou fácil:

Proposição 2.1.8. *Seja G um grafo conexo. Se todo vértice de G tem grau par, então G admite um circuito euleriano.*

Demonstração. Escolha v_0 um vértice qualquer. Aplique o resultado anterior. Considere o circuito obtido com sendo $w_1, ..., w_n$. Se algum dos vértices deste circuito tiver alguma aresta que ainda não foi usada (suponha ser w_j), considere o grafo G' obtido "apagando-se" as arestas que já foram usadas e aplique o resultado anterior a w_j (note que esse grafo novo tem todos os seus vértices com grau par, assim podemos de fato aplicar o resultado anterior). Chame o circuito obtido de $u_1, ..., u_m$. Note que $u_1 = u_m = w_j$. Assim, podemos "colar" tudo como $w_1, ..., w_i, u_2, ..., u_{m-1}, w_i, ..., w_n$. Repita este processo até não existir um vértice com arestas não utilizadas. Neste momento, como o grafo é conexo, temos o circuito desejado. □

Obviamente, se um grafo admite um circuito euleriano, então ele é conexo. Assim, o seguinte resultado resume os anteriores:

Corolário 2.1.9. *Seja G um grafo. Então G admite um circuito euleriano se, e somente se, G é conexo e todo vértice de G tem grau par.*

Alongamentos

Alongamento 2.1.10. Tente formalizar grafo de maneira que que possamos ter arestas repetidas (como no problema das pontes).

Alongamento 2.1.11. Há algum problema no critério que apresentamos para circuitos eulerianos se permitirmos arestas repetidas?

Exercícios

Exercício 2.1.12. Mostre que, se um grafo conexo contém exatamente dois vértices de grau ímpar, então ele tem um caminho euleriano.

Exercício 2.1.13. Caracterize os grafos conexos que possuem caminhos ou circuitos eulerianos em termos do grau de seus vértices.

2.2 Caminhos hamiltonianos

Outro tipo de caminho de destaque é o que leva em conta os vértices:

Definição 2.2.1. Seja G um grafo. Dizemos que um caminho $v_1, ..., v_n$ é um **caminho hamiltoniano** se, dado qualquer $v \in G_V$, existe um único i tal que $v = v_i$. Um **circuito hamiltoniano** é definido de maneira análoga[1]

Ao contrário dos caminhos eulerianos, não temos um bom procedimento para decidir se um grafo tem um caminho euleriano. Mas temos alguns resultados:

Definição 2.2.2. Seja G um grafo. Dizemos que os vértices a, b de G são **adjacentes** se o par $\{a, b\}$ é uma aresta de G.

Teorema 2.2.3 (Bondy-Chvátal)**.** *Seja G um grafo. Sejam a, b dois vértices de G não adjacentes tais que $g(a)+g(b) \geq |G_V|$. Então G admite um circuito hamiltoniano se, e somente se, o grafo G' admite um circuito hamiltoniano, onde G' é o próprio grafo G com a aresta $\{a, b\}$ adicionada.*

Demonstração. É claro que se G tem um circuito hamiltoniano, então G' também tem. Agora suponha que G' tenha um circuito hamiltoniano e que G não. Escreva o circuito em G' como

$$a, v_1, ..., v_n, b, a$$

FATO: Existe $i = 1, ..., n-1$ tal que v_i é adjacente a b e v_{i+1} é adjacente a a (em G).

PROVA DO FATO: Suponha que não. Então, para cada w adjacente a b, existe um vértice não adjacente a a e diferente de a. Note que tal associação é injetora (basta pegar o seguinte a w no circuito). Assim, temos que

$$\# \text{ adjacentes a } b \leq \# \text{ não adjacentes a } a$$

Mas note que, ao tomarmos ao escolhermos um "não adjacente a a" acima, nunca escolhemos o próprio a. Então a desigualdade pode ser melhorada assim:

$$\# \text{ adjacentes a } b \leq (\# \text{ não adjacentes a } a) - 1$$

Substituindo os valores, temos:

$$g(b) \leq |G_V| - g(a) - 1$$

Ou seja

$$g(a) + g(b) + 1 \leq |G_V|$$

[1] Só tomar cuidado com o último vértice, que aparece duas vezes.

contradizendo nossa hipótese. Isso completa a demonstração do FATO.

Assim, escolhendo v_i adjacente a b e v_{i+1} adjacente a a, temos que

$$a, v_1, ..., v_i, b, v_{n-1}, ..., v_{i+1}, a$$

é um circuito hamiltoniano. □

Uma construção é bastante útil neste contexto:

Definição 2.2.4. Seja $G = (G_V, G_A)$ um grafo. Dizemos que G é **Ore-fechado** se, para todos $a, b \in G_V$ distintos não adjacentes, temos que $g(a) + g(b) < |G_V|$.

Definição 2.2.5. Seja $G = (V, A)$. Defina o **Ore-fecho** de G como sendo o grafo

$$(V, \bigcap_{W \in \mathcal{O}} B)$$

onde $\mathcal{O} = \{B : A \subset B \text{ e } (V, B) \text{ é Ore-fechado}\}$.

Poderíamos ter algum problema na definição anterior, se não existisse nenhum grafo com mais arestas que admitisse circuito hamiltoniano. Mas isso não ocorre:

Definição 2.2.6. Seja n. Definimos K_n o **grafo completo de tamanho** n como sendo o grafo com n vértices e todas as arestas possíveis.

Lema 2.2.7. *Dado $n \geq 3$, K_n admite circuito hamiltoniano.*

Demonstração. Basta notar que $v_1, ..., v_n, v_1$ é um circuito. □

Lema 2.2.8. *Sejam $G_1 = (V, A_1)$ e $G_2(V, A_2)$ dois grafos Ore-fechados. Então $G = (V, A_1 \cap A_2)$ também é Ore-fechado.*

Demonstração. Sejam $a, b \in V$ distintos tais que a, b não sejam adjacentes em G. Então $\{a, b\} \notin A_1 \cap A_2$. Sem perda de generalidade, suponha $\{a, b\} \notin A_1$. Como G_1 é Ore-fechado, temos que $g_1(a) + g_2(b) < |V|$. Note que $g_i(v) \leq g(v)$. Assim, temos

$$g(a) + g(b) \leq g_1(a) + g_1(b) < |V|$$

□

Corolário 2.2.9. *O Ore-fecho de um grafo é Ore-fechado.*

Algoritmo: acrescentar (uma por vez) uma aresta para cada para a, b de vértices distintos que não sejam adjacentes e tais que $g(a) + g(b) \geq |G_V|$. Terminar quando existirem mais pares assim. Atenção: contar no grau inclusive as arestas novas. Ore-Algoritmo?

Lema 2.2.10. *A saída do algoritmo descrito acima é sempre o Ore-fecho do grafo inicial.*

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que a saída é única. Seja $G = (V, A)$ a entrada. Suponha (V, A_1) e (V, A_2) duas saídas distintas. Sem perda de generalidade, suponha que exista $\{a, b\} \in A_2 \smallsetminus A_1$ e que ao aplicar o algoritmo que gerou G_2, esta foi a primeira aresta que ocorreu isso. Note que, neste passo, $g_2(a) + g_2(b) \geq n$. Então $g_1(a) + g_1(b) \geq n$ pela minimalidade. Logo, $\{a, b\} \in A_1$, contradição.

Para ver que a saída é o próprio fecho, basta notar que o fecho é uma possível saída (só seguindo uma ordem boa). □

Corolário 2.2.11. *Um grafo G admite um circuito hamiltoniano se, e somente se, seu Ore-fecho é hamiltoniano.*

Demonstração. Basta acrescentar uma aresta do fecho por vez e aplicar o teorema. □

Corolário 2.2.12 (Ore)**.** *Seja G um grafo tal que, para todo a, b vértices distintos não adjacentes, temos que $g(a)+g(b) \geq n$. Então G admite circuito hamiltoniano.*

Demonstração. Note que o Ore-fecho de G é um K_n e, portanto, admite circuito hamiltoniano. Logo, G também admite. □

Alongamentos

Alongamento 2.2.13. Qual o Ore-fecho de um grafo completo menos uma aresta?

Exercícios

Exercício 2.2.14. Qual o número mínimo de arestas que devemos retirar de um K_n ($n \geq 3$) para que ele deixe de ter um circuito hamiltoniano?

2.3 Básico

Proposição 2.3.1. *Dado um grafo G, temos que*

$$\sum_{v \in G_V} g(v) = 2|G_A|$$

Demonstração. A cada v, contamos $g(v)$ arestas. Mas, desta maneira, estamos contando cada aresta duas vezes. $\square$

Corolário 2.3.2. *Dado um grafo G, temos que a quantidade de vértices com grau ímpar é par.*

Demonstração. Seja I o conjunto dos vértices de grau ímpar e P o conjunto dos vértices de grau par. Temos

$$\begin{array}{rcl} 2|G_A| & = & \sum_{v \in G_V} g(v) \\ & = & \sum_{v \in I} g(v) + \sum_{v \in P} g(v) \end{array}$$

Assim, $\sum_{v \in I} g(v)$ é par. Logo, a quantidade de elementos de I é par. $\square$

Definição 2.3.3. Seja G um grafo. Denotamos por $\delta(G) = \min\{g(v) : v \in G_V\}$ e por $\Delta(G) = \max\{g(v) : v \in G_V\}$.

Proposição 2.3.4. *Seja G um grafo tal que $\delta(G) > 0$ e $|G_A| < |G_V|$. Então existem pelo menos dois vértices em G de grau 1.*

Demonstração. Suponha que não. Então $g(v) \geq 2$ para todo $v \in G_V$. Assim:

$$\begin{array}{rcl} 2|G_A| & = & \sum_{v \in G_V} g(v) \\ & \geq & \sum_{v \in G_V} 2 \\ & = & 2|G_V| \end{array}$$

Contradição. $\square$

Proposição 2.3.5. *Seja G um grafo com $|G_V| \geq 2$. Então existem $v, w \in G_V$ distintos com $g(v) = g(w)$.*

Demonstração. É o problema dos apertos de mãos, que já fizemos. $\square$

Proposição 2.3.6. *Seja G grafo tal que $\delta(G) \geq \frac{|G_V|}{2}$. Então G é conexo.*

Demonstração. Sejam $a, b \in G_V$. Precisamos mostrar que existe um caminho entre a e b. Suponha a, b não adjacentes e sejam A e B o conjunto dos vértices adjacentes a a e b respectivamente. Temos que $g(a) \geq \delta(G)$. Assim, $|A| \geq \delta(G)$. Analogamente, $|B| \geq \delta(G)$. Note que se $A \cap B \neq \emptyset$, terminamos. Assim, suponha que não. Então

$$|A| + |B| + 2 \leq |G_V|$$

Contradição, pois $|A| + |B| + 2 > |G_V|$. □

Definição 2.3.7. Seja G um grafo. Uma **componente conexa** é um subgrafo maximal e conexo de G (isto é, ele não pode ser "aumentado" e continuar sendo conexo).

Proposição 2.3.8. *Seja G um grafo. Então $|G_A| \geq |G_V| - c(G)$ onde $c(G)$ denota a quantidade de componentes conexas de G.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução no número de arestas. Note que, se $|G_A| = 0$, então cada vértice é sua própria componente conexa. Ou seja, $|G_V| = c(G)$. Ou seja, vale a desigualdade. Agora suponha que vale o resultado para todo grafo com n arestas e vamos provar para um grafo com $n + 1$ arestas. Seja G um grafo com $n + 1$ arestas. Considere G' o grafo obtido a partir de G e da remoção de uma aresta $\{a, b\}$. Temos

$$|G'_A| \geq |G'_V| + c(G')$$

Ao adicionarmos de volta a aresta $\{a, b\}$, temos que o número de componentes pode permanecer igual ou diminuir em 1 (basta analizar se a e b estão na mesma componente ou não). Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} |G_A| & = & |G'_A| + 1 \\ & \geq & |G'_V| + c(G') \\ & \geq & |G_V| + c(G) \end{array}$$

□

Exercícios

Exercício 2.3.9. Mostre a igualdade $\sum_{v \in G_V} g(v) = 2|G_A|$ por indução sobre $|G_A|$.

Exercício 2.3.10. Mostre que se G é conexo, então $|G_A| = |G_V| - 1$.

Exercício 2.3.11. Use o exercício anterior e faça uma nova demonstração para a Proposicao 2.3.8.

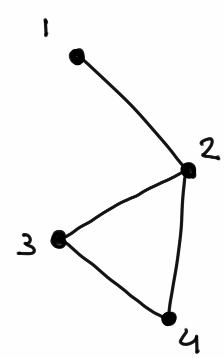
2.4 Matriz de adjacências

Podemos representar um grafo usando uma matriz da seguinte forma: fixe uma enumeração para os vértices de G: $v_1, ..., v_n$. Defina uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j,=1,...,n}$ $n \times n$ de forma que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } \{v_i, v_j\} \in G_A \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta é chamada de **matriz de adjacências** de G.

Exemplo 2.4.1. Neste grafo, temos que a matriz de adjacências é



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aproveitando este exemplo, note que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que cada (a_{ij}) na matriz A^2 conta "quantos caminhos distintos existem entre v_i e v_j usando duas arestas".

Definição 2.4.2. Seja $v_1, ..., v_n$ um caminho. Dizemos que $n-1$ é o **comprimento** de tal caminho.

Proposição 2.4.3. *Seja A a matriz de adjacências de um grafo. Então $A^n = (a_{ij})$ é tal que cada a_{ij} indica quantos caminhos existem entre v_i e v_i de comprimento n.*

Demonstração. Por indução sobre n. Caso $n = 1$, é imediato. Suponha que vale o resultado para n e vamos provar para $n+1$. Seja $A^n = (b_{ij})$ e $A^{n+1} = (c_{ij})$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Note que, por hipótese, cada b_{ik} é a quantidade de caminhos de comprimento n de v_i até v_k. Se v_k é tal que existe uma aresta entre v_k e v_j, então cada um desses caminhos é contado. Assim, contamos todos os caminhos que passam de comprimento n que passam por algum v_k e depois podem seguir para v_j. Ou seja, contamos todos os caminhos de comprimento $n+1$ entre v_i e v_j. $\square$

Dicas de alguns exercícios

1.0.11 Não consegui fazer isso com casa dos pombos. Tente pegar o menor tamanho possível que tenha alguém que diminua.

1.0.12 Conte quantos quadrados módulo 100 existem (se não entende essa linguagem, conte quantos restos possíveis de quadrados existem na divisão por 100).

2.1.12 Acrescente uma aresta ligando os dois vértices de grau ímpar.

Soluções de alguns exercícios

Notação

Índice Remissivo