Submodelos Elementares e uma Aplicação

Dione Andrade Lara

1 Introdução

Nesse trabalho apresentaremos as ferramentas necessárias para entender o que são submodelos elementares e como aplicar esse conceitos para demonstrar o seguinte Teorema:

Seja (X, τ) Lindelöf, regular e satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade. Então $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Para ver mais aplicações em topologia e teoria de conjuntos basta ver a referência [1].

Veremos que consiguiremos de certa forma um modelo bem grande que contenha o espaço X e as propriedades topológicas desejadas, mas como precisamos que o espaço tenha o tamanho de no máximo $\mathfrak{c}$ usaremos o Teorema Downward Löweinhein-Skolem. Tal Teorema nos permite conseguir um modelo menor que ainda contenha os objetos que nos são necessários.

2 Liguagens, Modelos e Submodelos

Nessa seção falaremos sobre linguagens, modelos e no final definiremos o que é um submodelo elementar. Para isso apresentaremos brevemente as definições de fórmulas, satisfação e Teoria.

Definição 2.1. Uma **linguagem** é um conjunto de símbolos e dentre eles teremos símbolos para relações, símbolos para funções e símbolos para constantes:

$$\mathcal{L} = \{P, ..., F, ..., c, ...\}$$

cada P é uma relação n-ária para algum $n \geq 1$ e cada F é uma m-função para algum $m \geq 1$.

Termos e fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$ são sequências finitas de símbolos de símbolos de $\mathcal{L}$, e de símbolos lógicos (símbolos de indentidade "$=$", parentesis "(e)", variáveis, conectivos "$\vee$ e $\wedge$",negação "$\neg$" e quantificadores "$\forall$ e $\exists$"). O conjuntos de todos os termos e fórmulas são definidos por recursão, para maiores detalhes veja David Maker.

Um **modelo** para uma linguagem dada $\mathcal{L}$ é o par $\mathcal{U} = (A, I)$ onde A é o universo de $\mathcal{U}$ e I é a função interpretação que interpreta os símbolos de $\mathcal{L}$ em A. Um modelo para $\mathcal{L}$ é usualmente denotado da seguinte forma:

$$\mathcal{U} = (A, P^{\mathcal{U}}, ..., F^{\mathcal{U}}, ..., c^{\mathcal{U}}, ...)$$

Como iremos verificar as intepretações das fórmulas dentro dos modelos é melhor entenderemos um pouco melhor o que são fómulas e o que é o seu valor.

Definição 2.2.

i) Uma variável é um **termo**.

ii) Um símbolo de constante é um **termo**.

iii) Se F é uma m-função e $t_1, ..., t_m$ são termos, então $F(t_1, ..., t_m)$ é um **termo**.

iv) Qualquer combinação finita dos ítens $i) - iii)$ são **termos**.

Definição 2.3.

i) $t_1 \equiv t_2$ é uma **fórmula atômica**, onde t_1 e t_2 são termos de $\mathcal{L}$.

ii) Se P é uma relação n-ária e $t_1, ..., t_m$ termos, então $P(t_1, ..., t_n)$ é uma **fórmula atômica**.

Definição 2.4.

i) Uma fórmula atômica é uma **fórmula**.

ii) Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ e $\neg\varphi$ são **fórmulas**.

iii) Se x é uma variável e φ uma fórmula, então $(\forall x)\varphi$ é uma **fórmula**.

iv) Qualquer combinação finita dos ítens $i) - iii)$ são **fórmulas**.

Uma **sentença** é uma fórmula sem variáveis livres.

Definição 2.5.
O valor de um termo $t(v_0, ..., v_q)$ em $x_0, ..., x_q$ é definido como $t[x_0, ..., x_q]$ da seguinte forma:

i) Se $t = v_i$, então $t[x_0, ..., x_q] = x_i$.

ii) Se t é um símbolo constante c, então é a interpretação de c em $\mathcal{U}$.

iii) Se $t = F(t_1, ..., t_m)$ onde F é uma m-função, então $t[x_0, ..., x_q] = G(t_1[x_0, ..., x_q], ..., t_m[x_0, ..., x_q])$ onde G é a interpretação de F em $\mathcal{U}$.

Definição 2.6. Suponha que $\varphi(v_0, ..., v_q)$ é a fórmula atômica $t_1 \equiv t_2$, onde $t_1(v_0, ..., v_q)$ e $t_2(v_0, ..., v_q)$ são termos. Então $x_0, ..., x_q$ satisfaz φ se, e somente se, $t_1[x_0, ..., x_q] = t_2[x_0, ..., x_q]$.

Suponha que $\varphi(v_0, ..., v_q)$ é a fórmula atômica $P(t_1, ..., t_n)$ onde P é uma relação n-ária e $t_1(v_0, ..., v_q), ..., t_n(v_0, ..., v_q)$ são termos. Então $x_0, ..., x_q$ satisfaz φ se, e somente se, $R(t_1[x_0, ..., x_q], ..., t_m[x_0, ..., x_q])$ onde R é a interpretação de P em $\mathcal{U}$. Abreviamos como $\mathcal{U} \models \varphi[x_0, ..., x_q]$ para: $x_0, ..., x_q$ satisfaz φ em $\mathcal{U}$.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem. Uma $\mathcal{L}$-**teoria** T é um conjunto de $\mathcal{L}$-sentenças. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de T se $\mathcal{M} \models \varphi$ para todas as sentenças de $\varphi \in T$.

Definição 2.7. Dois modelos $\mathcal{U} = (A, P, ..., F, ..., c, ...)$ e $\mathcal{U}' = (A', P', ..., F', ..., c', ...)$ são isomorfos se existe um isomorfismo entre $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$, i.e., existe uma função f de A em A' tal que:

1. $P(x_1, ..., x_n)$ se, e somente se, $P'(f(x_1), ..., f(x_n))$.
2. $f(F(x_1, ..., x_n)) = F'(f(x_1), ..., f(x_n))$.
3. $f(c) = c'$

Para todas as relações, funções e constantes de $\mathcal{U}$. Se f é um isomorfismo, então $f(t^{\mathcal{U}}[a_1, ..., a_n]) = t^{\mathcal{U}'}[f(a_1), ..., f(a_n)]$ para cada termo, e $\mathcal{U} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ se, e somente se, $\mathcal{U}' \models \varphi[f(a_1), ..., f(a_n)]$ para cada fórmula φ e todas $a_1, ..., a_n \in A$.

Definição 2.8. Um **submodelo** de $\mathcal{U}$ é um subconjunto $B \subset A$ dotado das relações $P^{\mathcal{U}} \cap B^n$,..., funções $F^{\mathcal{U}} \upharpoonright B^m$, ... e constantes $c^{\mathcal{U}}$,... todas as constantes $c^{\mathcal{U}}$'s pertencem a B, e B é fechado para todos $F^{\mathcal{U}}$ (se $(x_1, ..., x_m) \in B^m$, então $F^{\mathcal{U}}(x_1, ..., x_m) \in B$). Um mergulho de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{U}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{B}$ e um submodelo $\mathcal{B}' \subset \mathcal{U}$. Um submodelo $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ é um **submodelo elementar** (denotamos por $\mathcal{B} \prec \mathcal{U}$) se para toda fórmula φ e para todos $a_1, ..., a_n \in B$ temos:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ se, e somente se, } \mathcal{U} \models \varphi[a_1, ..., a_n].$$

3 O Teorema de Löweinhein-Skolem

Veremos o que é necessário para entender o O Teorema de Löweinhein-Skolem.

Teorema 3.1 (Critério de Tarski-Vaught)**.** *Sejam $\mathscr{U}$ e $\mathscr{B}$ modelos para $\mathcal{L}$, $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ onde $\mathscr{U} = (A, I^A)$, $\mathscr{B} = (B, I^B)$ e $A \subset B$. Então $\mathscr{U} \preceq \mathscr{B}$ se, e somente se, para toda fórmula $\varphi(\vec{x}, v) \in \mathcal{L}$ e para todo $\vec{a} \in A^n$ se existe $b \in B$ tal que $\mathscr{B} \models \varphi(\vec{a}, b)$, então existe $c \in A$ tal que $\varphi(\vec{a}, c)$.*

Demonstração. Veja [3]. □

Observação. O critério nos diz que para um submodelo ser elementar basta testar a validade para as fórmulas existenciais. Ou seja, para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ com parâmetros no submodelo se existir alguém no modelo que testemunha a validade de φ então existe alguém no submodelo que atesta a validade de φ.

Definição 3.2. Seja B um conjunto não vazio e θ um cardinal.

- Se $f : B^\alpha \to B$ para algum $\alpha < \theta$ então $A \subset B$ é fechado sobre f se, e somente se, $f[A^\alpha] \subset A$.
- Se $\mathcal{F} \subset \{f : B^\alpha \to B : \alpha < \theta\}$ então $A \subset B$ é fechado se, e somente se, A é fechado sobre f para todo $f \in \mathcal{F}$.
- O fecho de $S \subset B$ sobre $\mathcal{F}$ é $\bigcap\{X : S \subset X \subset B \text{ e } X \text{ é fechado sobre } \mathcal{F}\}$.

Se quisermos saber a cardinalidade de $\mathcal{F}$ precisamos construí-lo recursivamente, e para isso usaremos o seguinte Lema:

Lema 3.3. *Seja θ um cardinal regular infinito, e seja $\mathcal{F} = \{f : B^\alpha \to B : \alpha < \theta\}$. Fixe $S \subset B$, e defina recursivamente:*

1. $S_0 = S$.

2. $S_{\xi+1} = S_\xi \cup \{f(\vec{x}) : f \in \mathcal{F} \text{ e } f : B^\alpha \to B \text{ e } \vec{x} \in (S_\xi)^\alpha\}$.

3. $S_\eta = \bigcup_{\xi<\eta} S_\eta$ *se* η *for um ordinal limite.*

Então S_θ *é o fecho de* S *sobre* $\mathcal{F}$.

Fazendo $\theta = \omega$ temos o seguinte:

Lema 3.4. *Se* $\mathcal{F} \subset \{f : B^n \to B : n \in \omega\}$ *e* κ *um cardinal infinito tal que* $|S| \leq \kappa$ *onde* $S \subset B$ *e* $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ *então o fecho de* S *sobre* $\mathcal{F}$ *tem tamanho no máximo* κ.

Demonstração. Note que $S_\omega = \bigcup_{n\in\omega}\{f(\vec{x}) : f \in \mathcal{F} \text{ e } f : B^n \to B \text{ e } \vec{x} \in S^n\}$. Para cada $n \in \omega$ $|S^n| = |S| = \kappa$, então $|S_\omega| \leq |\mathcal{F}| \cdot |S| \cdot \aleph_0 = \kappa \cdot \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$. □

Teorema 3.5 (Downward Löweinhein-Skolem-Tarski)**.** *Seja* $\mathscr{B} = (B, I^B)$ *um modelo para* $\mathcal{L}$. *Fixe* κ *tal que* $max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\} \leq \kappa \leq |B|$ *e fixe* $S \subset B$ *tal que* $|S| \leq \kappa$. *Então existe um submodelo elementar* $\mathscr{A} = (A, I^A)$ *tal que* $\mathscr{U} \preceq \mathscr{B}$ *e* $S \subset A$ *e* $|A| = \kappa$.

Demonstração. Para cada fórmula existencial φ de $\mathcal{L}$, uma função de Skolem da seguinte maneira:

Seja φ uma fórmula existencial, então $\varphi(\vec{x})$ é da forma $\exists y\psi(\vec{x}, y)$. Seja $f_\varphi : B^n \to B$ tal que para todo $\vec{a} \in B^n$ se $\mathscr{B} \models \varphi(\vec{a})$, então existe $b \in B$ tal que $\mathscr{B} \models \exists y\psi(\vec{a}, b)$, então tome $f_\varphi(\vec{a}) = b$. Caso contrário $f_\varphi(\vec{a})$ escolhe qualquer valor arbitrário.[1] Note que $n = n_\varphi$ depende de φ, na verdade temos que $f_\varphi : B^{n_\varphi} \to B$ Podemos definir as funções de Skolem usando a boa ordem de B.[2]

Seja $\mathcal{F}$ a família de todas as f_φ's. Note que $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, $|\mathcal{L}| \leq \kappa$. Como $|B| \geq \kappa$ fixe $S' \subset B$ tal que $S \subset S' \subset B$ e $|S'| = \kappa$. Seja A o fecho de S' sobre $\mathcal{F}$. Pelo último Lema temos que $|A| \leq \kappa$. Como $S' \subset A$ então $|A| = \kappa$. Então o conjunto A define um modelo $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ e $\mathscr{U} \preceq \mathscr{B}$ pelo critério de Tarski-Vaught.

Note que A é fechado para todas as funções de $\mathcal{L}$. Ou seja, se $g \in \mathcal{L}$ tal que $g_\mathscr{B} : B^n \to B$ então $g_\mathscr{B}(A^n) \subset A$. De fato, para cada $g \in \mathcal{L}$ tal que g é função seja $\varphi(\vec{x})$ dado por $\exists y(g(\vec{x}) = y)$ note que a função de Skolem f_φ tem que ser $g_\mathscr{B}$. No caso $n = 0$ A contem $c_\mathscr{B}$ para cada constante c de $\mathcal{L}$. Nesse caso tome φ a sentença $\exists y(c = y)$ e a função de Skolem f_φ leva $B^0 = \{\emptyset\}$ em B, e $f_\varphi(\emptyset)$ tem que ser $c_\mathscr{B}$, então $c_\mathscr{B} \in A$. □

[1] Note que usamos o axioma da escolha para definir as $f_\varphi(\vec{a})$.

[2] $f_\varphi(\vec{a}) = min\{b \in B : \mathscr{B} \models \varphi(\vec{a}, b), \vec{a} \in A^n\}$.

4 Como aplicar esses resultados?

Intuitivamente $(V, \in)$ satisfaz todos os axiomas de ZFC. Contudo V é uma classe própria e assim não podemos aplicar o Löwenhein-Skolem.

Definição 4.1. Para cada ordinal θ seja $H(\theta) = \{x : |tr(X)| < \theta\}$.

Cada $H(\theta)$ é um conjunto e $(H(\theta), \in)$ satisfaz boa parte dos axiomas de ZFC. Então o resultado a seguir no garante que dada uma coleção finita de fórmulas podemos tomar $H(\theta)$ para θ "suficientemente" grande.

Teorema 4.2 (Princípio da Reflexão)**.** *Se $\varphi_i(x_1, ..., x_n)$, $i \leq m$ são fórmulas e α um cardinal, então existe $\theta > \alpha$ tal que para todo $a_1, ..., a_n \in H(\theta)$ e para todo $i \leq m$:*

$$(H(\theta), \in) \models \varphi_i(x_1, ..., x_n) \text{ se, e somente se, } \varphi_i(x_1, ..., x_n) \text{ vale em } V.$$

Usando todos esses resultados queremos provar o seguinte Teorema:

Teorema 4.3. *Seja (X, τ) Lindelöf, regular e satisfazendo o primeiro axioma de enumerabilidade*[3]. *Então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Mas antes disso veremos dois Lemas auxiliares:

Lema 4.4. *Seja δ um ordinal e θ um cardinal. Suponha que $(M_\alpha)_{\alpha<\delta}$ é uma cadeia de submodelos elementares de $H(\theta)$, i.e. para todo $\alpha < \delta$, $M_\alpha \preceq H(\theta)$ e para todo $\alpha < \beta < \delta$, $M_\alpha \preceq H(\theta)_\beta$. Então $M = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha \preceq H(\theta)$.*

Demonstração. Basta observar que a união arbitrária de submodelos elementares é um submodelo elementar. □

Observação. Note que todo modelo M contém $\aleph_0$, i.e., $\aleph_0 \in M$ e como podemos descrever cada elemento de $\aleph_0$ em M por meio de fórmulas temos que $\aleph_0 \subset M$. Seja $x \in M$ tal que $|x| \leq \aleph_0$ emtão existe uma bijeção $f : \aleph_0 \to x$ e então $x = f(\aleph_0) \subset M$. Agora veremos quais condições um modelo tem que satisfazer para que se $x \subset M$ com $|x| \leq \aleph_0$ então $x \in M$.

Lema 4.5. *Sejam θ um cardinal infinito tal que $\omega < \theta$. Então, para cada $A \subset H(\theta)$ com $|A| \leq \aleph_1$ existe $M \preceq H(\theta)$ tal que $A \subset M$, $|M| \leq \aleph_1$ e para cada $x \subset M$ com $|x| \leq \aleph_0, x \in M$.*

[3] i.e. para cada $x \in X$ existe $(U_n)_{n\in\omega} \subset \tau \setminus \{\emptyset\}$ que é base local para x.

Demonstração. Pelo Löwenhein-Skolem existe um modelo $M_0 \preceq H(\theta)$ tal que $A \subset M_0$ e $|M_0| \leq \mathfrak{c}$. Para $\alpha < \omega_1$ limite seja $M_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$, pelo Lema anterior temos que $M_\alpha \preceq H(\theta)$ e $|M_\alpha| \leq \mathfrak{c}$. Para $\alpha + \beta + 1$ seja $M_\alpha \preceq H(\theta)$ tal que $|M_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, $M_\beta \subset M_\alpha$ e para cada $x \subset M_\beta$ tal que $|x| \leq \aleph_0$, $x \in M_\alpha$. Isso é possível pelo Löwenhein-Skolem junto com o fato de M_β não ter mais de $\mathfrak{c}$ elementos de tamanho $\aleph_0$. Seja $M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$. Note que $A \subset M$ e $|M| \leq \mathfrak{c}$. Pelo Lema 4.4 $M \preceq H(\theta)$. Seja $x \subset M$ tal que $|x| \leq \aleph_0$ e para cada $a_n \in x$ seja $\alpha_n < \omega_1$ tal que $a_n \in M_{\alpha_n}$. Seja $\alpha = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ como $\alpha < \omega_1$ temos que $x \subset M_\alpha \subset M$ e assim $x \in M_{\alpha+1}$. □

E agora vamos para a demonstração do Teorema 4.3

Demonstração. Seja τ uma topologia para X tal que X seja Lindelöf, regular e satisfaça o primeiro axioma da enumerabilidade. Tome θ grande o suficiente e seja $M \preceq H(\theta)$ tal que $X, \tau \in M$, $|M| \leq \mathfrak{c}$ e para todo $x \subset M$ tal que $|x| \leq \aleph_0$ temos que $x \in M$. Note que M existe pelo Lema 4.5.

Afirmação 1: $X \cap M$ é um subespaço fechado de X.

Seja $x \in \overline{X \cap M}$. Em $H(\theta)$ existe $(x_n)_{n\in\omega} \subset X \cap M$ tal que $lim_{n\in\omega} x_n = x$. Note que $(x_n)_{n\in\omega} \in M$ (Lema Anterior) e M "pensa" que $lim_{n\in\omega} x_n = y$ para algum $y \in M$. Logo, em $H(\theta)$ temos que $lim_{n\in\omega} x_n = y = x$. Portanto $x \in X \cap M$.

Afirmação 2: $X \subset M$.

Suponha que não, e tome $z \in X \setminus M$.

Primeiramente, mostremos que para todo $y \in X \cap M$ existe $U \in \tau \cap M$ tal que $y \in U_y$ e $z \notin U_y$. Temos que em $H(\theta)$ existe $(V_n)_{n\in\omega} \subset \tau$ tal que $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Note que y é elemento de M então existe $(U_n)_{n\in\omega} \subset \tau \cap M$ tal que $M \models \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{y\}$ e, novamente, pelo Lema anterior $(U_n)_{n\in\omega} \in M$. Também temos que para todo $n \in \omega$ $U_n \in M$ e sendo assim existe $k \in \omega$ tal que $z \notin U_k$. Tome $U_y := U_k$.

Agora, $\mathscr{C} = \{U_y : y \in X \cap M\}$ forma uma cobertura para $X \cap M$. Como $X \cap M$ é fechado então $X \cap M$ é Lindelöf e então existe $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$, $|\mathscr{C}'| = \aleph_0$ tal que $\bigcup \mathscr{C}' \supset X \cap M$. Portanto $\mathscr{C}' \in M$. Pela definição de submodelos elementares temos:

$$H(\theta) \models (\mathscr{C}' \text{ cobre } X) \text{ se, e somente, se } M \models (\mathscr{C}' \text{ cobre } X).$$

Porém $z \notin \bigcup \mathscr{C}'$ o que é um absurdo! Portanto $X \cap M = X$.

□

Referências

[1] Dow A. An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Topology Proceedings 13*, 1. (1988), 17–72.

[2] Jech, T. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics.* Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[3] Kunen, K. Set Theory. *Studies in logic.* College Publications, 2011.

[4] Marker, D. *Model Theory: An Introduction. Graduate Texts in Mathematics* Springer, 2002.