Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

29 de junho de 2018

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversos usos. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma ser fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto trabalharemos principalmente com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos "normais" no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos "normais". Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N, que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma "definição" intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**)[1]:

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Vazio $\exists x \, \forall y \; y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

[1]Vale dizer que a lista apresentada aqui não é minimal - alguns axiomas são consequências de outros, mas optamos por esta apresentação por questões didáticas.

Extensionalidade $\forall x \; \forall y \; (x = y) \leftrightarrow (\forall z \; (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Par $\forall x \; \forall y \; \exists z \; x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y, existe um conjunto z que os contém como elementos.

Aqui já não apresentamos a forumalação explicitamente. Mas você pode fazer isso no Alongamento 1.1.10.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ, temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas. A fórmula φ também pode receber parâmetros (sejam conjuntos) - veja o Exercício 1.1.18.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U, mas não que só eles. U poderia conter "lixo" - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F} \; \exists U \; \forall x \; \forall y \; (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x, defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como "sucessor de x" - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S \; \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S \; s(x) \in S)$$

Aqui estamos fazendo um abuso na notação novamente: $a \subset b$ é uma abreviação para $\forall x \; x \in a \rightarrow x \in b$

Partes $\forall x \; \exists y \; \forall z \subset x \; z \in y$. Isto é, dado um conjunto x, existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.19.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x \; \exists y \; \forall z \in x \; \exists z' \in y \; \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D, conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D \; \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas. E, como anteriormente, a fórmula pode receber parâmetros, veja o Exercício 1.1.18.

Fundação $\forall x \neq \emptyset\ \exists y \in x\ x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituido pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construido a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a $\leq$ entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X. A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivessemos trabalhando com a relação $\leq$ nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N}\ a + c = b\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar $\leq$, então isso ficaria meio circular.

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X. Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenas estão em X. Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y, uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.20

Note que, dados x, y, temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Note também que usamos a soma para definir a relação de ordem. Para definir a soma, seguimos o mesmo padrão - pense apenas que uma função $y = f(x)$ nada mais é que uma relação entre x e y.

Note que fazendo isso, uma função acaba sendo o conjunto que comumente chamamos de gráfico dela.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Definição 1.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

(a) $x \leq x$;

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que $\leq$ é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N\ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução finita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω, temos que $\omega \subset X$. $\square$

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função "sucessor" usual dos naturais. Até o final desta seção, veremos alguns resultados que nos ajudam a entender melhor os elementos de ω e o próprio conjunto ω - um resultado que pode ajudar a ter em mente é o enunciado no Exercício 1.1.23.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. $\square$

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b. Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Vamos dividir em dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

□

Note que $\subset$ é uma ordem sobre ω, já que $\subset$ é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω, podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por $\subset$.*

Demonstração. Como já temos que $\subset$ é ordem, basta fazer o argumento sobre a existência de mínimos. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

$$M = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $M \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in M$. Suponha que $a \in M$. Vamos provar que $s(a) \in M$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in M$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $M = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. □

Note que, assim, temos que a ordem $\leq$ usual dos naturais se traduz como $\subset$ aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como $\in$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações $\in$ e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando $\in$ e $=$:

(a) $x \subset y$

(b) $x \cap y$

(c) $x = \{a\}$ para algum a.

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y, de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre diretamente que os seguintes conjuntos são transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alongamento 1.1.15. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Alongamento 1.1.16. Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais com a ordem usual $\leq$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, defina $a \preceq b$ se, e somente se, um dos casos abaixo ocorre:

- $a \leq b$ e a, b são ambos pares;
- $a \leq b$ e a, b são ambos ímpares;
- a é par e b é ímpar.

Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem sobre $\mathbb{N}$ (use o fato que $\leq$ é uma boa ordem).

Exercícios

Exercício 1.1.17. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.18. Normalmente, as fórmulas que aparecem nos axiomas da separação e substituição (bem como as que aparecem em induções e recursões), podem receber parâmetros que sejam conjuntos. Por exemplo, no axioma da separação, podemos trabalhar com fórmulas do tipo $\varphi(x, t)$, onde o t será pensado como um parâmetro (que é um conjunto dado). Considere φ como a fórmula

$$\exists a \in t \; x \in a$$

Dado X um conjunto e $t = \{A, B, C\}$, Diga quem é o conjunto (dado pelo axioma da separação):

$$\{x \in X : \varphi(x, t)\}$$

Exercício 1.1.19. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A, existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.20. Escreva a fórmula "x é um par ordenado".

Exercício 1.1.21. Uma função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.22. Seja $\leq$ uma ordem total sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\leq$ é uma boa ordem;

(ii) não existe $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

Exercício 1.1.23. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Exercício 1.1.24. Considere X o conjunto $\{0, 1\} \times \omega$ com a seguinte ordem:

$$(a, n) \preceq (b, m)$$

se $a < b$ ou se $a = b$ e $n \leq m$. Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Na verdade, para este texto, a maior importância da demonstração a seguir é que o princípio da boa ordem implica na existência de bases em espaços vetoriais - sem o uso do axioma da escolha.

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre V. Defina B da seguinte maneira

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Vamos mostrar que B é uma base para V. Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, ..., b_n \in B$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Seja b_j o máximo de $\{b_1, ..., b_n\}$ (com relação a $\preceq$). Note que $b_j \in [\{b_1, ..., b_n\} \smallsetminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja b o menor com tal propriedade. Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). □

Aqui estamos finalmente usando que $\preceq$ é boa ordem, antes só usamos que ela é total.

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (**Indução para boa ordem**). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Um jeito de ler essa é hipótese é "se vale para todo mundo antes de x, vale para x".

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ, temos que vale $\varphi(x)$, contradição. □

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n. Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar. Antes de provarmos tal resultado, é bom notar que, ao formarlizarmos o conceito de função em ZFC, tratamos cada função como um conjunto de pares ordenados - essa formalização tem também a vantagem que podemos trabalhar com funções como se fossem conjuntos, podendo tomar uniões, intersecções etc. Veja o Alongamento 1.2.9 para ver essa formalização. Usaremos este fato implicitamente nesta demonstração e em outras no decorrer deste texto.

Proposição 1.2.3 (**Recursão para boa ordem**). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(z, y)$ vale para algum z, y, então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.16.

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X, isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g. Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em $\mathcal{F}$, elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.10), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X, terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \mathrm{dom}(f)\}$. Note que $f \upharpoonright \{y \in X : y < x\}$ é um elemento de $\mathcal{F}$. Considere

$$g = (f \upharpoonright \{y \in X : y < x\}) \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f. $\square$

Ordem $\times$ escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se $\mathcal{C}$ é **totalmente ordenado** por $\leq$, isto é, dados $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a < b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq a$.

Formalmente, aqui estamos provando que o Princípio da Boa Ordem implica no Lema de Zorn

Proposição 1.2.5 (**Lema de Zorn**). *Seja $\leq$ uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar melhor a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a $\preceq$. Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existe A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a $\preceq$) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a $\preceq$), mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a $\leq$. Vamos fazer isso por indução sobre x. Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.12). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x. Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercício 1.2.12, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a $\leq$. Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A. Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então $z \notin A$, já que x é majorante de A. Note também que, pela definição de A_z, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y < z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. $\square$

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem:

Cuidado que na próxima demonstração, trabalharemos com relações como se elas fosse conjuntos - da mesma maneira que fizemos com funções.

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos pares $(A, \leq_A)$ onde $A \subset X$ e $\leq_A$ é uma boa ordem sobre A. Considere a seguinte relação sobre $\mathcal{O}$:

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B, isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \smallsetminus A$, $a \leq_B b$. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{O}$. Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A,\leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y = \bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{C}} A$. Que $\leq$ é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a $\leq_A$). Note que, pela maneira como $\preceq$ é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S. Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e, além disso, $(Y, \leq)$ é um majorante para a cadeia $\mathcal{C}$ (exercício). Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe $(B, \leq_B)$ maximal em $\mathcal{O}$. Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \smallsetminus B$, basta estender a ordem $\leq_B$ para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de $\mathcal{O}$ estritamente maior que $(B, \leq_B)$. □

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.13.)

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (**Axioma da escolha**). *Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe $\leq$ uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. □

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial admite uma base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação “princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base”. A volta também vale. Vamos provar isso, mas não vamos fazer um caminho direto - primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F. Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.15). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$

o corpo de frações com "variáveis" em X. Isto é, os elementos de $k(X)$ são "frações de polinômios de várias variáveis", mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F-grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F-homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F-grau n e todos os monômios de p_1 tem F-grau $d+n$.

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K. Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K-espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V. Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. De maneira análoga ao que fizemos antes, podemos escrever

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.11). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x}\sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. De fato, defina para cada x:

$$f_x = \frac{1}{x} \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$$

Temos

$$\begin{aligned} f_x &= \tfrac{1}{x}\textstyle\sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x \\ &= \textstyle\sum_{b \in B(x)} \tfrac{1}{x}\lambda_b^x \\ &= \textstyle\sum_{b \in B(x)} \tfrac{1}{y}\lambda_b^y \\ &= f_y \end{aligned}$$

Ou seja $f = f_x$ não depende da escolha do particular x. Mais que isso, f é F-homogêneo de grau -1 (já que $\lambda_b^x \in K$). Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. $\square$

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Sejam X e Y conjuntos. Dizemos que f é uma **função** de X em Y (notação $f : X \to Y$ se $f \subset X \times Y$ tal que:

- Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$;
- Para todo $x \in X$, se $(x, a), (x, b) \in f$, então $a = b$.

Usualmente, em vez de denotarmos $(x, y) \in f$, usamos $f(x) = y$.

(a) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $\operatorname{dom}(f)$ (domínio de f).

(b) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $Im(f)$ (imagem de f). Cuidado aqui, não queremos o contradomínio de f.

(c) Dados $f : X \to Y$ e $Z \subset X$, determine o conjunto $f \restriction Z$, onde $f \restriction Z$ é a **função restrição** de f a Z.

Alongamento 1.2.10. Mostre que, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.11. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de $\mathcal{F}$ não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G-grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.12. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou seja, $\mathcal{C}$ é uma cadeia com relação a $\subset$). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por $\leq$. Mostre que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por $\leq$.

Informalmente, lemos este exercício como "cadeia de cadeias é cadeia".

Exercício 1.2.13. Escreva a ordem usual de $\mathbb{Z}$ como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.14. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.15. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.16. Seja $\leq$ boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

"($x \in X$ e existe uma função f com domínio $\{y \in X : y \leq x\}$ tal que $f(z) = b$ onde $\varphi(\{z' : z' < z\}, b)$ e $f(x) = a$ onde $\varphi(\{z' : z < x\}, a)$)
ou $a = \emptyset$"

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ.

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2 (**de Cantor-Bernstein-Schroeder**)**.** *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado supondo que $A \cap B = \emptyset$. Para ver como obter o caso geral a partir desse, veja o Alongamento 1.3.10. Seja $x \in A \cup B$. Defina

Pense essa construção da seguinte forma: números positivos vão indicando para onde um ponto vai (via f ou g, dependendo de onde le está), enquanto negativos vão indicando de onde ele veio (via f^{-1} ou g^{-1}). Mas como as funções não são sobrejetoras, um ponto pode não ter vindo de lugar algum, daí paramos.

- $s_0^x = x$
- $s_{n+1}^x = \begin{cases} f(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in A \\ g(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in B. \end{cases}$
- $s_{-(n+1)}^x = \begin{cases} f^{-1}(s_{-n}^x) & \text{se } s_{-n}^x \text{ está definido e pertence a } B \\ g^{-1}(s_{-n}^x) & \text{se } s_{-n}^x \text{ está definido e pertence a } A \end{cases}$

Note que s_z^x pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s_z^x \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s_z^x \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s_z^y = s_k^x$. Note que, então $s_{z+m}^y = s_{k+m}^x$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $S^y = S^x$.

Com isso, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s_z^x está definido para todo z, f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.
- Se $s_z^x \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).
- Se $s_z^x \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

□

Uma aplicação simples do próximo resultado é que sempre podemos aumentar os tamanhos:

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \longrightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \longrightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A, temos que $x \notin f(x) = A$.
- Se $x \notin A$, então, pela definição de A, temos que $x \in f(x) = A$.

□

Uma aplicação com circunferências

Essa aplicação foi tirada de [3].

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que tivermos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem $\leq$ sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X.*

Digamos que essa seja uma ótima ordem.

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem qualquer sobre X. Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X. Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). $\square$

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0. Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1. Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n, contradição. $\square$

A situação muda bem quando passamos para o $\mathbb{R}^3$. Comecemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi$ é um plano tal que $x \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de $\mathcal{C}$ em P (basicamente, porque

Fazer alguns desenhos ajuda bastante nesta demonstração.

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Considere

$$S = \{p \in \pi : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}.$$

Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$. Seja $p \in \pi \smallsetminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p. A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de $\mathbb{R}$. Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. $\square$

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X. Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere $\leq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}^3$ com a propriedade apresentada na Proposição 1.3.4. Seja x o menor ponto de $\mathbb{R}^3$ segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x. Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

(i) se $y < z$, então $y \in C_y$.

(ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

(i) $z \in C_z$.

(ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguimos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.

- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X e seja $f : X \longrightarrow Y$ bijeção. Mostre que $\preceq$ dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y.

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \longrightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Este é um um roteiro para mostrar que, se vale o Teorema de Cantor-Bernstein-Schoroeder para conjuntos disjuntos, então vale para o caso geral. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injetoras.

(a) Considere os conjuntos $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$ e $B' = \{(b, 1) : b \in B\}$. Note que tais conjuntos são disjuntos.

(b) Mostre que $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$.

(c) Conclua o resultado.

Alongamento 1.3.11. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.12. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \longrightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Na sequência, vamos apresentar alguns resultados envolvendo reticulados. Entre eles, vamos apresentar um teorema de Tarski ([13]) e, como aplicação de tal teorema, uma nova demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.3.2).

Exercício 1.3.13. Dizemos que uma ordem $(A, \leq)$ é um **reticulado** se, para $a, b \in A$, existe o supremo do conjunto $\{a, b\}$ (normalmente denotado por $a \vee b$) e e também o ínfimo (denotado por $a \wedge b$). Dizemos que $(A, \leq)$ é um **reticulado completo** se, para todo $B \subset A$, existe o supremo e o ínfimo de B (denotados por $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ respectivamente).

(a) Mostre que toda ordem total é um reticulado.

(b) Mostre que $[a, b]$ com a ordem usual de $\mathbb{R}$ é um reticulado completo.

(c) Dados $a, b \in A$, denotamos por $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ e } x \leq b\}$. Mostre que, se $a \leq b$ e A é completo, então $[a, b]$ é um reticulado completo.

Exercício 1.3.14. Seja $(A, \leq)$ um reticulado completo. Seja $f : A \to A$ monótona não decrescente, isto é, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Este é um roteiro para mostrar que o conjunto $F = \{a \in A : f(a) = a\}$ dos pontos fixos de f é um reticulado completo.

(a) Considere $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Note que $B \neq \emptyset$.

(b) Mostre que, para todo $b \in B$, $f(b) \in B$.

(c) Seja $s = \bigvee B$. Mostre que $s \in B$.

(d) Note que s é um ponto fixo.

(e) Note que não existe ponto fixo maior que s (e que s é maior que todo outro ponto fixo).

(f) De maneira análoga, mostre que existe i ponto fixo minimal (e menor que todo outro ponto fixo).

(g) Considere $1 = \bigvee A$. Seja $C \subset F$. Seja $c = \bigvee C$. Note que $c \in B$.

(h) Note que $f[[c, 1]] \subset [c, 1]$. Ou seja, podemos considerar f' como a restrição de f a $[c, 1]$ e obter um ponto fixo de f' (e, portanto de f) que é menor que todos os outros pontos fixos em $[c, 1]$.

(i) Note que o ponto fixo do item anterior é o ínfimo de C.

(j) Conclua que F é completo.

Exercício 1.3.15. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras.

(a) Note que $(\wp(X), \subset)$ é um reticulado completo.

(b) Mostre que $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ dada por $\varphi(A) = X \smallsetminus (g[Y \smallsetminus f[A]])$ é uma função monótona não decrescente.

(c) Seja $F \subset X$ ponto fixo de φ. Mostre que $i : X \to Y$ dada por

$$i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \smallsetminus F \end{cases}$$

é uma bijeção entre X e Y.

Note que nem precisamos de f contínua.

Exercício 1.3.16. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ função monótona não decrescente. Mostre que, além de f ter pontos fixos, o conjunto de tais pontos admite máximo e mínimo.

Capítulo 2

Ordinais, cardinais e outros

2.1 Ordinais

Já vimos que boa ordem é algo bastante importante neste texto. Agora, vamos apresentar certos conjuntos que, de alguma forma, são representantes canônicos de todas as boas ordens possíveis:

Definição 2.1.1. Dizemos que α é um **ordinal** se ele é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Cuidado aqui, dizemos que $\in$ é uma boa ordem no sentido de ordem estrita. Para ficarmos com a definição formal, precisamos trabalhar com "$\in$ ou igual".

Note que, pelo que provamos anteriormente, cada $n \in \omega$ é um ordinal. Mais que isso, o próprio conjunto ω também é um ordinal. E, não é muito difícil de ver, $\omega \cup \{\omega\}$ também é um ordinal.

Note que, como cada ordinal é transitivo, então todo elemento seu também é bem ordenado por $\in$. Assim, podemos provar:

Proposição 2.1.2. *Seja α um ordinal. Se $x \in \alpha$, então x é um ordinal.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que x é transitivo. Sejam a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$. Como α é transitivo, temos que $b \in \alpha$. E, pelo mesmo motivo, $a \in \alpha$. Como $\in$ é uma ordem sobre α, temos que esta é uma relação transitiva e, portanto, $a \in x$. $\square$

Proposição 2.1.3. *Seja X um conjunto não vazio de ordinais. Então $\bigcap X$ é um ordinal.*

Demonstração. Basta notar que intersecção de conjuntos transitivos é um conjunto transitivo e que, dado $\alpha \in X$, temos que $\bigcap X \subset \alpha$ e, portanto, como $\in$ bem ordena α, $\in$ bem ordena $\bigcap X$. $\square$

Na sequência, vamos provar alguns resultados técnicos para ordinais. Um dos objetivos é formalizar indução e boa ordem sobre ordinais. Comecemos com a ideia de sucessor de um ordinal.

Leia esse enunciado com $<$ no lugar de $\in$ para ele parecer mais natural.

Proposição 2.1.4. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \in \alpha$. Suponha que exista $\gamma \in \alpha$ seja tal que γ é o menor tal que $\beta \in \gamma$. Então $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$.*

Note que pela transitividade dos ordinais, temos que todos os elementos aqui pertencem a α.

Demonstração. Como γ é um ordinal, temos que $\beta \subset \gamma$ e, portanto, $\beta \cup \{\beta\} \subset \gamma$. Por outro lado, dado $\xi \in \gamma$, temos pela minimalidade de γ que $\beta \notin \xi$. Ou seja, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos $\xi \in \beta$ ou $\xi = \beta$. Desta forma, temos que $\gamma \subset \beta \cup \{\beta\}$. $\square$

Proposição 2.1.5. *Seja α um ordinal. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ para algum β ou, para todo $\beta \in \alpha$, temos $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$. Suponha que exista $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$. Podemos supor que γ seja o menor com tal propriedade. Note que $\beta \in \gamma$ (de fato, como $\gamma, \beta \in \alpha$, se $\beta \notin \gamma$, como $\in$ é uma ordem total sobre α, teríamos que $\beta = \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Mas ambos esses casos contrariam o fato que $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$). Então, pelo resultado anterior, temos que $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ contrariando o fato que $\gamma \in \alpha$ e $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. $\square$

Os resultados anteriores nos motivam a denotar $\alpha \cup \{\alpha\}$ como $s(\alpha)$ (se α é um ordinal). Ainda mais, costumamos denotar por $\alpha + 1$ tal conjunto. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.6. Seja α um ordinal. Se $\alpha = \beta + 1$ para algum β ordinal, dizemos que α é um **ordinal sucessor**. Caso contrário, dizemos que α é um **ordinal limite**.

Note que todo $n \in \omega$ não vazio é um ordinal sucessor. Note também que ω é um ordinal limite (veja o Alongamento 2.1.21).

Lema 2.1.7. *Sejam α, β e γ ordinais tais que $\beta \subset \alpha$ e $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Então $\beta \subset \gamma$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \beta$. Vamos provar que $\xi \in \gamma$. Suponha que não. Note que $\xi, \gamma \in \alpha$. Logo, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos dois casos:

- $\xi = \gamma$. Mas isso é uma contradição pois neste caso temos $\gamma \in \beta$, contrariando a definição de γ.

- $\gamma \in \xi$. Mas isso é uma contradição, pois isso também implica que $\gamma \in \beta$.

□

Da mesma forma que ocorre com os elementos de ω, temos a seguinte tradução:

Lema 2.1.8. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$. Então $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.*

Demonstração. Suponha $\beta \neq \alpha$. Seja $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Podemos supor γ o menor com tal propriedade. Vamos mostrar que $\gamma = \beta$ (note que isso implica que $\beta \in \alpha$ como queremos). Suponha que não. Pelo lema anterior, temos que $\beta \subset \gamma$. Então existe $\gamma' \in \gamma \smallsetminus \beta$. Logo, temos que $\gamma' \in \alpha \smallsetminus \beta$, contrariando o fato que γ era o menor com tal propriedade. □

Teorema 2.1.9 (Indução para ordinais). *Seja φ uma fórmula tal que, se para todo α ordinal, temos que $\varphi(\beta)$ para $\beta \in \alpha$, então $\varphi(\alpha)$. Então, para todo α ordinal, temos que $\varphi(\alpha)$.*

Demonstração. Seja α um ordinal qualquer. Defina

$$B = \{\xi \in \alpha : \varphi(\xi)\}.$$

Se $B = \alpha$ então, por hipótese, temos que vale $\varphi(\alpha)$. Caso contrário, seja $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus B)$. Note que, como $\gamma \subset \alpha$, temos que, para todo $\xi \in \gamma$, vale $\varphi(\xi)$. Logo, por hipótese, vale $\varphi(\gamma)$, contrariando o fato que $\gamma \notin B$. □

Estamos usando aqui o mínimo com relação ao $\in$.

Com isso, podemos provar que quaisquer dois ordinais são comparáveis com relação a $\subset$:

Proposição 2.1.10. *Sejam α, β ordinais. Então vale $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$.*

Demonstração. Vamos provar a afirmação por indução sobre α. Ou seja, fixe β ordinal e suponha que, para todo $\xi \in \alpha$, temos que vale

$$\xi \subset \beta \text{ ou } \beta \subset \xi$$

Note que se, existe $\xi \in \alpha$ tal que $\beta \subset \xi$, temos que $\beta \subset \alpha$ já que $\xi \subset \alpha$ pela transitividade.

Assim, podemos supor que para todo $\xi \in \alpha$, $\beta \not\subset \xi$. Ou seja, pela hipótese de indução, para todo $\xi \in \alpha$, temos que $\xi \subset \beta$. Para cada $\xi \in \alpha$, pelo Lema 2.1.8, teríamos dois casos: $\xi = \beta$ ou $\xi \in \beta$. Note que o primeiro caso nunca ocorre já que estamos supondo $\beta \not\subset \xi$ para todo $\xi \in \alpha$. Desta forma, temos que para todo $\xi \in \alpha$, ocorre o segundo caso: $\xi \in \beta$. Mas isso nada mais é que dizer $\alpha \subset \beta$. □

Mais do que funcionar como uma ordem total para os ordinais, a inclusão funciona como uma boa ordem:

A ideia é que se certa propriedade vale para algum ordinal, então existe o menor ordinal que a satisfaz.

Teorema 2.1.11 (**Boa ordem para ordinais**). *Seja φ uma fórmula sobre ordinais tal que pelo menos um ordinal a satisfaça. Então existe um ordinal α tal que vale $\varphi(\alpha)$ e, se β é um ordinal tal que $\varphi(\beta)$, então $\alpha \subset \beta$.*

Demonstração. Seja ξ ordinal tal que vale $\varphi(\xi)$. Se não existe $\eta \in \xi$ tal que vale $\varphi(\eta)$, tomamos $\alpha = \xi$. Caso contrário, tomamos

$$\alpha = \min\{\eta \in \xi : \varphi(\eta)\}.$$

Seja β um ordinal tal que vale $\varphi(\beta)$. Precisamos mostrar que $\alpha \subset \beta$. Suponha que não. Então, pela Proposição 2.1.10, temos que $\beta \subset \alpha$. Note que, assim, temos que $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$. Mas ambos implicam em contradição. □

Com isso, podemos provar que "$\in \vee =$" funciona como uma boa ordem sobre os ordinais. Desta forma, muitas vezes vamos denotar por $<$ quando queremos dizer $\in$ com relação a ordinais. Também utilizaremos a notação min como se $\in$ fosse uma ordem comum. Uma observação importante a ser feita é que não podemos dizer que $\in$ é de fato uma boa ordem sobre os ordinais basicamente por que os ordinais não formam um conjunto:

Proposição 2.1.12. *A coleção de todos os ordinais não forma um conjunto.*

Demonstração. Suponha que A seja o conjunto de todos os ordinais. Note que A é também um ordinal. Logo, $A \in A$, o que é uma contradição. □

Aqui você poderia dizer que $A \in A$ contraria o axioma da fundação. Mas note que nem precisamos disso, basta lembrar que $\in$ é uma ordem estrita dentro de ordinais.

Formalmente, dada um fórmula φ sobre conjuntos, chamamos a coleção de todos os conjuntos que a satisfazem de uma **classe**. Claramente, todo conjunto é uma classe. Assim, para indicarmos que uma classe não é um conjunto, diremos que ela é uma **classe própria**.

Também é possível fazer recursão sobre ordinais:

Aqui pode parecer que estamos quantificando sobre fórmulas (o que não é permitido). A formalização é: para cada fórmula φ, provamos que a fórmula ψ apresentada satisfaz o enunciado - ou seja, temos infinitos teoremas.

Teorema 2.1.13 (**Recursão para ordinais**). *Seja φ uma fórmula do tipo função. Então existe uma fórmula ψ também do tipo função tal que, para todo ordinal α, vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, vale $\varphi((a_\xi)_{\xi<\alpha}, b)$, onde cada a_ξ é tal que vale $\psi(\xi, a_\xi)$. Além disso, se ψ' é outra fórmula satisfazendo tal enunciado, temos que, para todo ordinal α e todo conjunto b, temos que vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, $\psi'(\alpha, b)$.*

Demonstração. A parte da unicidade segue facilmente da "boa ordem" sobre os ordinais (exercício). Vamos então mostrar que existe alguma ψ.

Considere $\psi(\alpha, b)$ a afirmação:

Existe uma sequência $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ tal que vale $\varphi((a_\xi)_{\xi\in\alpha}, b)$ e, para todo $\xi \in \alpha$, vale $\varphi((a_\eta)_{\eta\in\xi}, a_\xi)$.

Por indução, pode-se mostrar que ψ está bem definida e que é do tipo função como gostaríamos. □

Vamos terminar esta seção mostrando que os ordinais representam (de forma única) cada boa ordem:

Definição 2.1.14. Sejam X e Y conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \leq b$.

Na próxima demonstração, vamos usar que todo segmento inicial de um ordinal é um ordinal e que, portanto, é um elemento dele. Veja o Exercício 2.1.25.

Proposição 2.1.15. *Sejam α e β ordinais. Se existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Vamos provar por indução sobre α o seguinte resultado: se existe $f : \alpha \to \beta$ isomorfimo de ordem, então $\alpha \subset \beta$ (note que isso é suficiente já que depois é só trabalhar com a inversa). Se $\alpha = \emptyset$, então claramente o resultado vale. Agora suponha que o resultado vale para todo $\xi < \alpha$. Suponha que exista $f : \alpha \to \beta$ isomorfismo de ordem. Seja $\xi < \alpha$. Note que $f \restriction \xi : \xi \to A$ é um isomorfismo de ordem, onde $A \subset \beta$. Note que A é um segmento inicial de β e, portanto, $A = \gamma$ para algum $\gamma \in \beta$. Pela hipótese de indução, temos que $\xi \subset \gamma$. Ou seja, $\xi \in \gamma$ ou $\xi = \gamma$. Ambos os casos implicam que $\xi \in \beta$ e, portanto, obtemos que $\alpha \subset \beta$ como queríamos. □

Teorema 2.1.16. *Seja X um conjunto bem ordenado. Então existe um, e apenas um, ordinal α tal que existe $f : X \longrightarrow \alpha$ isomorfismo de ordem.*

Demonstração. A unicidade segue do resultado anterior. Para a existência, basta definir f recursivamente como $f(x) = \min\{\beta : \forall y < x \; f(y) < \beta\}$. □

Ordinais compactos

Fixado um ordinal α, há uma topologia bastante natural sobre ele, a topologia da ordem:

Definição 2.1.17. Dado um ordinal α, chamamos de **topologia da ordem** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $]\xi, \eta[$ e $[0, \xi[$ para todo $\xi, \eta \in \alpha$.

Os intervalos de ordinais são definidos de forma análoga aos intervalos de reais.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos um ordinal como um espaço topológico, estaremos adotando a topologia da ordem.

O seguinte resultado usaremos implicitamente diversas vezes ao longo do texto - note que ele é apenas a Proposição 2.1.5:

Proposição 2.1.18. *Seja α ordinal limite. Se $\beta \in \alpha$, então $\beta + 1 \in \alpha$.*

Finalmente, podemos caracterizar os ordinais limites topologicamente:

Proposição 2.1.19. *Se α é um ordinal limite diferente de 0, então α não é compacto.*

Demonstração. Basta notar que $\{[0, \beta + 1[: \beta \in \alpha\}$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita. $\square$

Proposição 2.1.20. *Se α é um ordinal sucessor, então α é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Seja β tal que $\alpha = \beta + 1$. Se β for sucessor, terminamos (afinal, α será um compacto adicionado de um ponto). Suponha que β não seja sucessor. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos para α. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $\beta \in C$. Note que existe ξ tal que $]\xi, \beta] \subset C$. E, como β é limite, $\xi + 1 < \beta$. Por hipótese de indução, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $\xi + 1 = [0, \xi] \subset \bigcup \mathcal{C}'$. Note, então, $\mathcal{C}' \cup \{C\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \beta] = \alpha$. $\square$

Alongamentos

Alongamento 2.1.21. Mostre que todo $n \in \omega$ não nulo é um ordinal sucessor. Mostre que ω é um ordinal limite.

Alongamento 2.1.22. Mostre que, para todo α ordinal, temos que $[0, \alpha] = [0, \alpha + 1[$.

Alongamento 2.1.23. Mostre que no Teorema 2.1.16 o isomorfismo também é único.

Alongamento 2.1.24. Considere ω com a seguinte ordem: se $a, b \neq 0$, então $a \preceq b$ se, e somente se, $a \leq b$ ($\leq$ é a ordem usual) e $a \leq 0$ para todo $a \in \omega$.

(a) Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

(b) Mostre que ω com esta ordem é isomorfo a $\omega + 1$.

Exercícios

Exercício 2.1.25. Seja α um ordinal e seja $A \subset \alpha$ um segmento inicial de α.

(a) Mostre que A é um ordinal.

(b) Mostre que $A \in \alpha$.

Exercício 2.1.26. Mostre que, se X é um conjunto, não existe uma função com domínio X e sobrejetora nos ordinais.

Exercício 2.1.27. Mostre que não existe um conjunto ilimitado nos ordinais.

Exercício 2.1.28. Mostre que a coleção dos ordinais sucessores é uma classe própria.

Exercício 2.1.29. Mostre que num ordinal α, os únicos pontos isolados são os sucessores e o 0.

x é dito um **ponto isolado** se $\{x\}$ é aberto.

Exercício 2.1.30. Mostre que todo ordinal é um **espaço de Hausdorff**, isto é, dados dois pontos x, y distintos, existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Exercício 2.1.31. Mostre que se $\alpha = \sup A$, então $\alpha \in \overline{A}$.

Exercício 2.1.32. Sejam X bem ordenado e Y totalmente ordenado. Chamamos de **ordem lexicográfica** a seguinte ordem sobre Y^X: $f < g$ se $f(x) < g(x)$ onde $x = \min\{z \in X : f(z) \neq g(z)\}$.

(a) Mostre que isso é de fato uma ordem e mostre também que tal ordem é total.

(b) Considere ω^ω com a ordem apresentada acima. Mostre que $A \subset \omega^\omega$ onde $A = \{f \in \omega^w : \exists n \; f(n) \neq 0\}$ não admite mínimo.

(c) Conclua que, mesmo que Y seja bem ordenado, não temos que a ordem acima é uma boa ordem.

Exercício 2.1.33. Sejam α e β ordinais. Defina $\alpha + \beta$ como o único ordinal que é isomorfo a $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ com a ordem lexicográfica. Verifique se é verdadeira a afirmação "$\omega + 1 = 1 + \omega$".

Exercício 2.1.34. Dizemos que uma função de ordinais em ordinais é uma **função normal** se $f(\alpha) < f(\beta)$ se $\alpha < \beta$ e $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$ se α é limite e diferente de $\emptyset$. Seja f uma função normal. Mostre que:

(a) $f(\sup A) = \sup\{f(a) : a \in A\}$ para todo A conjunto de ordinais.

(b) $f(\alpha) \geq \alpha$ para todo α.

(c) dado β ordinal, existe $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

2.2 Uma aplicação de aritmética ordinal

Essa seção é livremente inspirada na Seção 10.2 de [8].

Nesta seção vamos apresentar a aritmética ordinal. Nosso intuito com ela é apresentar algumas construções recursivas e também fazer uma aplicação interessante, que está no final desta seção. Mas é melhor ressaltar que depois desta seção, utilizaremos sempre a aritmética cardinal (ainda a ser definida). Fica o aviso aqui porque ambas têm a mesma notação.

Comecemos com a definição da soma ordinal. Fixado α um ordinal, definimos $\alpha + \beta$ recursivamente da seguinte forma:

- $\alpha + 0 = 0$;
- $\alpha + \beta = s(\alpha + \gamma)$ se $\beta = s(\gamma)$;
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta}(\alpha + \gamma)$ se β é um ordinal limite diferente de 0.

Lembrando aqui que $s(\xi) = \xi \cup \{\xi\}$.

De maneira análoga, podemos definir o produto ordinal. Fixado α um ordinal, definimos:

- $\alpha \cdot 0 = 0$;
- $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma) + \alpha$ se $\beta = s(\gamma)$;
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta}(\alpha \cdot \gamma)$ se β é um ordinal limite diferente de 0.

Fixado α ordinal, a exponenciação ordinal também pode ser definida recursivamente:

- $\alpha^0 = 1$;
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$ se $\beta = s(\gamma)$;
- $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha^\gamma$ se β é um ordinal limite diferente de 0.

Com isso, é possível provar o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 (Forma normal de Cantor). *Sejam α e β ordinais tais que $1 < \alpha \leq \beta$. Existão existe um único $k \in \omega$ e únicos ordinais $\gamma_0, ..., \gamma_{k-1}$ e*
$delta_0, ..., \delta_{k-1}$ com $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_{k-1}$, $0 < \delta_i < \alpha$ para todo i e tais que

$$\beta = \alpha^{\gamma^0} \cdot \delta_0 + \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_{k-1}} \cdot \delta_{k-1}$$

Vamos agora a uma aplicação em teoria dos números. Dizemos um número $n \in \omega$ está escrito recursivamente na base b se n está escrito na base b, cada expoente também está escrito na base b, cada expoente de cada expoente também etc. Por exemplo, considere o número 521. Ele escrito na base 2 fica

$$521 = 2^9 + 2^3 + 2^0$$

Mas os expoentes 9 e 3 não estão escritos na base 2, assim, arrumamos:

$$521 = 2^{2^3 + 2^0} + 2^{2^1 + 2^0} + 2^0$$

Apareceu um novo 3, daí fazemos:

$$521 = 2^{2^{2^{2^0}+2^0}+2^0} + 2^{2^{2^0}+2^0} + 2^0$$

Agora o processo terminou. Note podemos fazer isso em qualquer base fixada. Para cada possível base $b \in \omega$, com $b \geq 2$, considere a função $p_b : \omega \to \omega$ que faz o seguinte processo:

- p_b recebe um número n;
- escreve o número n recursivamente na base b;
- substitui cada ocorrência da base b por $(b + 1)$ e faz a conta;
- a função p_b retorna o valor obtido na conta acima.

Por exemplo, lembrando que já fizemos a expansão acima,

$$\begin{aligned} p_2(521) &= 3^{3^{3^1+3^0}+3^0} + 3^{3^1+3^0} + 3^0 \\ &= 1.330.279.464.729.113.309.844.748.891.857.449.678.491 \\ &\approx 13 \cdot 10^{38} \end{aligned}$$

Recursivamente, podemos definir $p_b : \omega \to \omega$ da seguinte forma:

- $p_b(k) = k$ se $k < b$.
- $p_b(kb^t + r) = k(b+1)^{p_b(t)} + p_b(r)$ para $k < b$, $r < b^t$, $t \geq 1$.

Vamos agora definir uma função muito parecida em sua construção, mas que associa a cada natural, um ordinal:

- $P_b(k) = k$ se $k < b$.
- $P_b(kb^t + r) = \omega^{P_b(t)} \cdot k + P_b(r)$ para $k < b$, $r < b^t$, $t \geq 1$.

Intuitivamente falando, P_b é feita da mesma maneira que p_b, com a diferença que trocamos as ocorrências da base b por ω (em vez de $b+1$) e invertemos a ordem usual na multiplicação. Vejamos o exemplo que fizemos anteriormente:

$$\begin{aligned} P_b(521) &= \omega^{\omega^{\omega^1+\omega^0}+\omega^0} + \omega^{\omega^1+\omega^0} + \omega^0 \\ &= \omega^{\omega^{\omega+1}+1} + \omega^{\omega+1} + 1 \end{aligned}$$

Vejamos algumas propriedades auxiliares sobre essas funções:

Lema 2.2.2. *Fixado $b \geq 2$, dados $n < m$ temos que $P_b(n) < P_b(m)$.*

Lema 2.2.3. *Fixado $b \geq 2$ e dado $k \in \omega$, temos que $P_{b+1}(p_b(k)) = P_b(k)$.*

Finalmente, definimos as **sequências de Goodstein** recursivamente para cada $k \in \omega$:

- $g_k(1) = k$;
- $g_k(n+1) = \begin{cases} p_{n+1}(g_k(n)) - 1 & \text{se } g_k(n) > 0; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Teorema 2.2.4 (Goodstein). *Dado $k \geq 1$, existe $n \in \omega$ tal que $g_k(n) = 0$.*

Demonstração. Considere a seguinte sequência:

$$P_{n+1}(g_k(n))_{n\in\omega} \tag{2.1}$$

Suponha que $g_k(n+1) > 0$. Então, pela definição de $g_k(n+1)$, temos que

$$P_{n+2}(g_k(n+1)) = P_{n+2}(p_{n+1}(g_k(n)) - 1)$$

Note que o Lema 2.2.2 diz que P_{n+1} é uma função crescente, logo

$$P_{n+2}(p_{n+1}(g_k(n)) - 1) < P_{n+2}(p_{n+1}(g_k(n))).$$

Já o Lema 2.2.3 nos dá uma maneira alternativa de computar o lado direito da desigualdade acima:

$$P_{n+2}(p_{n+1}(g_k(n))) = P_{n+1}(g_k(n)).$$

Ou seja

$$P_{n+2}(g_k(n+1) < P_{n+1}(g_k(n)).$$

Assim, se $g_k(n) > 0$ para todo n, temos que a sequência em (2.1) é uma sequência decrescente infinita de ordinais, o que é uma contradição com a boa ordem. □

O teorema acima foi provado por Goodstein em 1944 ([6]). Essa demonstração faz uso de ordinais e depois, em 1982, Kirby e Paris provaram em [9] que algo do tipo é necessário: esse teorema não decorre dos axiomas de Peano.

2.3 Medindo a complexidade dos conjuntos

Nesta seção, vamos mostrar uma maneira de medir o quão complicado é montar um determinado conjunto. A intuição é mais ou menos assim: $\emptyset$ é o mais simples, $\{\emptyset\}$ é um pouco mais complicado, enquanto $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ é um pouco mais ainda.

Comecemos com um resultado simples:

Proposição 2.3.1. *Seja X um conjunto qualquer. Então existe um conjunto transitivo $tr(X)$ onde $X \subset tr(X)$ e, dado qualquer conjunto Y transitivo tal que $X \subset Y$, temos que $tr(X) \subset Y$.*

Chamamos $tr(X)$ de **fecho transitivo** de X.

Cuidado aqui, $\bigcup T_n = \{x : \exists y \in T_n \; x \in y\}$.

Demonstração. Defina $T_0 = X$ e $T_{n+1} = \bigcup T_n$ para $n \in \omega$. Defina $tr(X) = \bigcup_{n\in\omega} T_n$. Claramente, $X \subset tr(X)$ e $tr(X)$ é transitivo. Note também que, se $x \in T_n$ para algum $n \in \omega$, $x \in Y$ para qualquer Y transitivo tal que $X \subset Y$. □

Proposição 2.3.2. *Toda classe não vazia de conjuntos admite um elemento $\in$-minimal - isto é, um elemento a tal que não existe um elemento b na classe tal que $b \in a$.*

Demonstração. Lembre que uma classe é a coleção de conjuntos que satisfazem uma determinada fórmula. Assim, seja φ uma fórmula tal que exista X tal que vale $\varphi(X)$. Considere

$$A = \{a \in tr(X) : \varphi(a)\}$$

Note que A é um conjunto pelo axioma da separação. Se $A = \emptyset$, como $X \subset tr(X)$, temos que X é minimal. Caso contrário, pelo axioma da fundação, existe $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$. Note que tal a é minimal: se $b \in a$ é tal que vale $\varphi(b)$, teríamos que $b \in A$ e, portanto, $b \in A \cap a$, contrariando a definição de a. □

Esse resultado nos dá que podemos definir algo recursivamente sobre os próprios elementos. Para ficar mais claro, vejamos isso em ação, justamente no exemplo que nos será importante agora:

Definição 2.3.3. Seja X um conjunto. Definimos $rank(\emptyset) = \emptyset$ e denotamos por $rank(X)$= $\sup\{rank(y) + 1 : y \in X\}$.

Formalmente, deveríamos trabalhar como na demonstração do teorema de recursão.

Note que isso está bem definido. De fato, suponha que não. Considere todos os conjuntos X de forma que não foi possível definir o *rank*. Seja X o $\in$-minimal sem *rank*. Mas note que, então, todo elemento de X tem rank e, portanto, X também tem.

Além do *rank* dar uma medida sobre a complexidade do conjunto, também nos dá uma ideia sobre sua construção. Considere a seguinte construção recursiva:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$

Vamos provar que todo conjunto pertence a algum dos V_α's. Para isso, vamos provar o seguinte resultado:

Lema 2.3.4. *Sejam α, β ordinais. Temos:*

(a) V_α é transitivo.

(b) $V_\alpha \subset V_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

(c) se $X \subset V_\alpha$ e $\alpha < \beta$, então $X \in V_\beta$.

(d) se $X \in V_\alpha$, então $X \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

Demonstração. (a) Por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, é imediato. Se α é limite, o resultado é imediato uma vez que V_α é união de conjuntos transitivos. Finalmente, se $\alpha = \beta+1$, temos que, dado $X \in V_\alpha$, $X \subset V_\beta$. Logo, se $Y \in X$, temos que $Y \in V_\beta$. Mas, como V_β é transitivo, $Y \subset V_\beta$ e, portanto, $Y \in V_{\beta+1}$ como queríamos.

(b) Por indução sobre β. Caso $\beta = \gamma + 1$. Podemos supor que $\alpha \leq \gamma$ (caso contrário, $\alpha = \beta$). Assim, pela hipótese de indução, temos que $V_\alpha \subset V_\gamma$. Logo, $V_\alpha \in V_{\gamma+1}$. Como $V_{\gamma+1}$ é transitivo, temos o que queríamos. Agora suponha que β é limite. Neste caso, é imediato que $V_\alpha \subset V_\beta$ pela definição de V_β.

(c) Basta notar que $X \in V_{\alpha+1} \subset V_\beta$.

(d) Por indução sobre V_α. Se $\alpha = \beta + 1$, o resultado é imediato ($\xi = \beta$). Se α é limite, então $X \in V_\beta$ para algum $\beta < \alpha$ e portanto o resultado segue por indução e pelo fato que $V_\beta \subset V_\alpha$.

$\square$

Proposição 2.3.5. *Seja X um conjunto. Então $rank(X) = \alpha$ se, e somente se, $X \subset V_\alpha$ e $X \not\subset V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Ou seja, todo conjunto é formado apenas por $\emptyset$ e pares de { e }. Se denotarmos $\emptyset$ por {}, então todo conjunto nada mais é que uma coleção de { e }. Parece um pouco triste.

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Suponha o resultado para todo $\xi < \alpha$. Seja X conjunto tal que $rank(X) = \alpha$. Assim, todo $Y \in X$ é tal que $rank(Y) < \alpha$ e, portanto, $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Logo, $Y \in V_\alpha$ pelo lema anterior. Ou seja, $X \subset V_\alpha$. Note também que $X \not\subset V_\xi$ para todo $\xi < \alpha$ por hipótese de indução.

Por outro lado, seja $X \subset V_\alpha$ tal que $X \not\subset V_\xi$ para tod $\xi < \alpha$. Dado $Y \in X$, temos, pelo lema anterior, que $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Portanto, $rank(Y) \leq \xi$. Assim, já temos que $rank(X) \leq \alpha$. Por outro lado, dado qualquer $\xi < \alpha$, existe $Y \in X$ tal que $rank(Y) \geq \xi$. Caso contrário, todo $Y \in X$ seria tal que $Y \in V_\xi$ e, portanto, $X \subset V_\xi$, uma contradição. $\square$

Acabando com as escolhas

Esta seção foi bastante baseada no livro [7].

Nesta seção, vamos fechar as implicações para as diversas formulações equivalentes ao princípio da boa ordem e o axioma da escolha tratadas neste texto.

Proposição 2.3.6. *Se vale o axioma das múltiplas escolhas, vale que todo conjunto ordenado admite um conjunto maximal de elementos dois a dois incomparáveis.*

Demonstração. Seja X um conjunto ordenado. Pelo axioma das múltiplas escolhas, existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subset X$ não vazio, $f(A) \subset A$ é finito e não vazio. Defina $g : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ da seguinte forma, dado $A \subset X$:

$$g(A) = \begin{cases} \{a \in f(A) : a \text{ é minimal em } f(A)\} & \text{se } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que, trivialmente, se $A \neq \emptyset$, $g(A)$ é um suconjunto finito não vazio de elementos de A dois a dois incomparáveis.

Considere a seguinte construção recursiva sobre os ordinais:

- $A_0 = g(X)$
- $A_\alpha = g(\{x \in X : x \text{ é incomparável com cada } b \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\})$.

Basta usar o axioma da separação para tomar o subconjunto de X dos elementos para os quais existe um ordinal tal que...

Note que os elementos de X que pertencem a algum A_α formam um conjunto - vamos chamar tal conjunto de A. Vamos provar que tal A é um conjunto maximal de elementos incomparáveis. Suponha que $a, b \in A$ sejam comparáveis. Seja α tal que $a \in A_\alpha$ e $b \in A_\beta$. Se $\alpha = \beta$, temos uma contradição pois tanto a como b são minimais em A_α. Sem perda de generalidade, suponha $\alpha < \beta$. Então $b \notin A_\beta$ já que b é comparável com a, contradição.

Finalmente, vamos provar que A é maximal. Note que, em algum ordinal α, $A_\alpha = \emptyset$ (caso contrário, teríamos que os ordinais formariam um conjunto - já que haveria uma injeção dos ordinais em $\wp(X)$). Mas note que isso só é possivel se não “sobraram” elementos que possam estender A. $\square$

O próximo lema é útil na hora de encontrar boas ordens:

Uma função assim é chamada de uma **função escolha** para $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$.

Lema 2.3.7. *Seja X um conjunto não vazio. Se existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ onde $f(V) \in V$ para todo $V \in \wp(X)$ não vazio, então existe uma boa ordem sobre X.*

Demonstração. Defina a seguinte recursão sobre os ordinais (antes de começar, fixe um $Y \notin X$ qualquer). Tomamos $x_0 = f(X)$ e

$$x_\alpha = \begin{cases} f(X \smallsetminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}) & \text{se } \{x_\beta : \beta < \alpha\} \not\supset X \\ Y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que f precisa valer Y a partir de algum ordinal α, caso contrário teríamos que os ordinais formariam um conjunto pelo axioma da substituição. Note que assim $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ induz uma boa ordem sobre X. □

Em particular, esse lema nos dá o seguinte:

Corolário 2.3.8. *Se vale o axioma da escolha, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja f uma função escolha sobre $\wp(X)$. Pelo lema anterior, temos que existe uma boa ordem sobre X. □

Proposição 2.3.9. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos dois a dois não comparáveis, então todo conjunto totalmente ordenado admite uma boa ordem.*

Demonstração. Seja X totalmente ordenado por $\leq$. Se mostrarmos que existe uma função escolha para $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$, o resultado segue pelo lema anterior. Seja $\mathcal{Y}$ o conjunto de todos os pares da forma (Y, y), onde $y \in Y \subset X$. Defina sobre tal conjunto a ordem

$$(Y_1, y_1) \preceq (Y_2, y_2) \text{ se } Y_1 = Y_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

Seja $A \subset \mathcal{Y}$ maximal tal que seus elementos são dois a dois incomparáveis. Vamos mostrar que A é uma função escolha desejada.

Note que, dado $Y \subset X$ não vazio, existe algum par da forma $(Y, y) \in \mathcal{Y}$ pois, caso contrário, qualquer um desta forma seria incomparável com todos os elementos de A. Mais que isso, como a ordem sobre X é total, existe um único elemento com tal formato. Ou seja, pela segunda parte, temos que A é função e, pela primeira, que o domínio de A é todo $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$. □

Proposição 2.3.10. *Se todo conjunto totalmente ordenado pode ser bem ordenado, então dado um conjunto bem ordenado A, temos que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Identifique o $\wp(A)$ com 2^A (veja o Exercício 1.3.12). Coloque em 2^A a ordem lexicográfica (veja Exercício 2.1.32). Assim, $\wp(A)$ fica totalmente ordenado e, portanto, bem ordenável. □

Dos resultados anteriores, obtemos:

Corolário 2.3.11. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos incomparáveis, vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Note que nossa hipótese implica que todo conjunto totalmente ordenado é bem ordenável (Proposição 2.3.9). Já essa condição implica o que queremos pela Proposição 2.3.10. □

Para fechar todas as equivalências, resta provar o seguinte:

Proposição 2.3.12. *Se vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenado, então vale o princípio da boa ordem.*

Aqui não podemos simplesmente aplicar indução, porque precisamos dizer qual boa ordem pegamos para cada β, caso contrário não temos como garantir a existência da família sem o axioma da escolha.

Demonstração. Primeiramente, note que é suficiente mostrarmos que V_α é bem ordenado para todo α ordinal limite (já que todo X é suconjunto de algum V_α desta forma). Seja α ordinal limite. Se mostrarmos que existe uma família $(W_\beta)_{\beta<\alpha}$ onde cada W_β é uma boa ordem sobre V_β teremos o resultado (é fácil construir uma boa ordem a partir disso). Seja κ o menor ordinal[1] tal que não existe uma função injetora de κ em V_α. Por hipótese, $\wp(\kappa)$ admite uma boa ordem $\leq$. Vamos agora definir cada W_β usando esta boa ordem recursivamente:

- $W_0 = \emptyset$
- se β é limite, definimos W_β de maneira padrão usando cada W_ξ com $\xi < \beta$.
- se $\beta = \gamma + 1$, então $V_\beta = \wp(V_\gamma)$. Por hipótese, V_γ é bem ordenado por W_γ e, portanto, tem um isomorfismo de ordem com algum $\xi < \kappa$. Daí usando esse isomorfismo mais a boa ordem $\leq$ de $\wp(\kappa)$, obtemos uma boa ordem sobre V_β.

□

Com a sequência apresentada acima, mais os resultados anteriores, temos a equivalência entre princípio da boa ordem, lema de Zorn, axioma da escolha e todo espaço vetorial tem base (veja a Figura 2.1).

[1] Veja o Exercício 2.3.17.

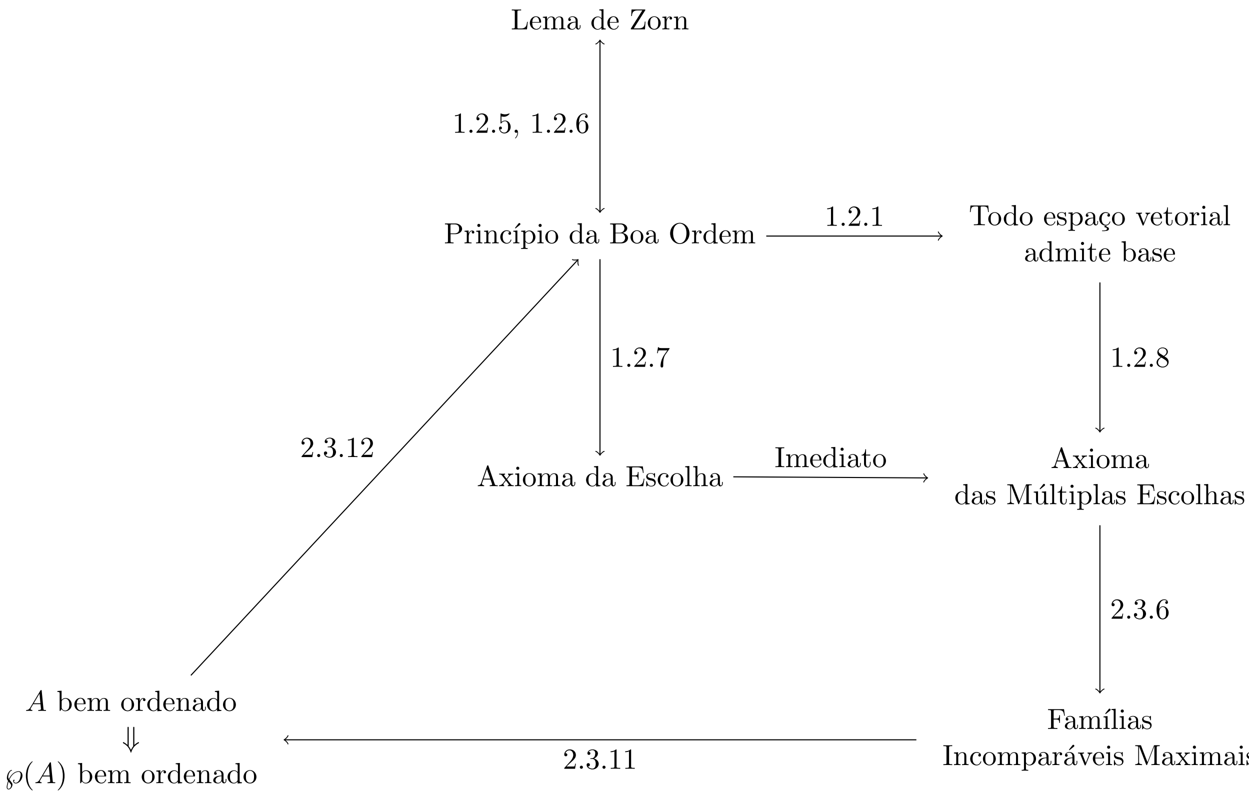

Figura 2.1: Equivalências do axioma da escolha

Alongamentos

Alongamento 2.3.13. Prove a tese da Proposição 2.3.6 supondo que vale o Lema de Zorn.

Exercícios

Exercício 2.3.14. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ é $\in$-crescente se $a_n \in a_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Dizemos que a mesma sequência é $\in$-decrescente se $a_{n+1} \in a_n$ para todo $n \in \omega$. Dê um exemplo de um destes tipos de sequências e prove que o outro tipo não existe.

Exercício 2.3.15. Seja α um ordinal. Determine $rank(\alpha)$.

Exercício 2.3.16. O **princípio maximal de Hausdorff** é a afirmação:

"Todo conjunto ordenado admite cadeia maximal (isto é, subconjunto totalmente ordenado maximal)"

(a) Considere a seguinte ordem sobre $\mathbb{R}^2$: $\langle x, y\rangle \leq \langle a, b\rangle$ se, e somente se, $x = a$ e $y \leq b$. Descreva as cadeias maximais.

(b) Mostre que o princípio maximal de Hausdorff é equivalente ao Lema de Zorn.

Exercício 2.3.17. No Proposição 2.3.12, consideramos κ o menor ordinal tal que não existe $f : \kappa \to X$ injetora, onde X é um conjunto fixado. Um argumento muito simples para a existência de tal κ seria considerar κ um ordinal isomorfo a uma boa ordem sobre $\wp(X)$. O problema é que isso nada mais é que o princípio da boa ordem e tal proposição está tentando provar uma equivalência de tal princípio. Abaixo vamos mostrar um roteiro de como contornar tal problema.

Fixe um conjunto X qualquer.

(a) Note que $\mathbb{P} = \{\leq : \leq$ é uma boa ordem sobre um subconjunto de $X\}$ é um conjunto.

(b) Lembre que dado um conjunto bem ordenado, existe um único ordinal isomorfo a ele. Conclua que $\mathbb{Q} = \{\alpha : \alpha$ é um ordinal isomorfo a um subconjunto de $X\}$ é um conjunto.

(c) Note que $\mathbb{Q}$ é um conjunto transitivo de ordinais e, portanto, um ordinal.

(d) Note que fazendo $\kappa = \mathbb{Q}$, temos o que queríamos.

(e) O ordinal κ obtido acima é conhecido como **número de Hartog** de X.

2.4 Cardinais

Do mesmo jeito que ordinais representam todas as boas ordens, cardinais representam todos os tamanhos de conjuntos:

Definição 2.4.1. Seja α um ordinal. Dizemos que α é um **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ tal que $|\alpha| = |\beta|$.

Note que, dado um conjunto X qualquer, ele tem bijeção com algum ordinal, via princípio da boa ordem. Se tomarmos o menor ordinal tal que existe uma bijeção com X, obtemos um cardinal. Além disso, pela definição de cardinais, tal cardinal é único. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.4.2. Seja X um conjunto. Denotamos por $|X|$ o único cardinal κ tal que existe uma bijeção entre X e κ.

Note que isso estende o uso anterior que fazíamos de $|\cdot|$, afinal, existe uma bijeção entre X e Y se, e somente se, $|X| = |Y|$ como acima.

Note também que, dado um cardinal qualquer, existe um ordinal maior que ele que não tem bijeção com ele (veja o Alongamento 2.4.19). Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.4.3. Seja κ um cardinal. Denotamos por κ^+ o menor cardinal que é maior que κ.

Não confundir κ^+ com $\kappa + 1$ (soma ordinal).

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.4.4. Denotamos por $\aleph_0 = \omega$. Se $\aleph_\beta$ está definido para todo $\beta < \alpha$ (α um ordinal), denotamos por $\aleph_\alpha = \kappa$ onde κ é o menor cardinal tal que $\aleph_\beta < \kappa$ para todo $\beta < \alpha$.

Desta forma, é fácil ver que $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$. Além disso, muitas vezes usaremos a notação ω_α no lugar de $\aleph_\alpha$ quando quisermos destacar que queremos trabalhar com a ordem de $\aleph_\alpha$.

Dizemos que um conjunto X é **finito** se existe $n \in \aleph_0$ tal que $|X| = n$. Dizemos que X é **infinito** caso contrário.

Uma ordem bacana sobre pares de ordinais

Vejamos agora como definir uma ordem sobre pares de ordinais. Isso vai nos facilitar na hora de calcular o tamanho de produtos. Mas antes, vamos definir uma notação que vai facilitar bastante:

Definição 2.4.5. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Dado $x \in X$, denotamos por $\downarrow x$ o conjunto $\{y \in X : y < x\}$.

Definição 2.4.6. Sejam (α, β) e (γ, δ) pares de ordinais. Vamos denotar por $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ se

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ e $\alpha < \gamma$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$, $\alpha = \gamma$ e $\beta < \delta$.

Ou seja, essa ordem começa assim:

$$(0,0) < (0,1) < (1,1) < (0,2) < (1,2) < (2,1) < (2,2) < \cdots < (0,\omega) < \cdots$$

Formalmente não é uma ordem, uma vez que pares de ordinais não é um conjunto. Mas deve dar para entender.

Não é difícil notar que $\leq$ é uma ordem e que qualquer conjunto não vazio de pares de ordinais admite mínimo com tal ordem (veja o Alongamento 2.4.20). Note também que, para qualquer ordinal α, temos (veja o Alongamento 2.4.21):

$$\alpha \times \alpha = \downarrow (0, \alpha)$$

Considere, para cada α, β ordinais, $o(\alpha, \beta)$ o único ordinal tal que $o(\alpha, \beta)$ é isomorfo a $\downarrow (\alpha, \beta)$.

Lema 2.4.7. $o(0, \omega) = \omega$.

Demonstração. Note que $\downarrow (0, \omega) = \omega \times \omega$. Como $\downarrow (0, \omega)$ é infinito, basta mostrarmos que, para cada elemento de $\downarrow (0, \omega)$ só existem finitos elementos menores que ele. De fato, dado $(a, b) \in \omega \times \omega$, temos que $(x, y) \leq (a, b)$ é tal que $x, y \leq \max\{a, b\}$. $\square$

Note que, como $o(0, \alpha) < o(0, \beta)$, se $\alpha < \beta$, temos que $\alpha \leq o(0, \alpha)$ para todo α. Vejamos a outra desigualdade para o caso de cardinais:

Proposição 2.4.8. *Para todo cardinal infinito κ, $o(0, \kappa) = \kappa$. Em particular, existe uma bijeção entre $\kappa \times \kappa$ e κ.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre κ. Note que, para $\kappa = \aleph_0$, já temos o resultado. Suponha então que o resultado é válido para todo $\eta < \kappa$ e vamos mostrar para κ. Suponha que não. Então $\kappa < o(0, \kappa)$. Logo, existe $(\gamma,\delta) < (0,\kappa)$ tal que $\kappa = o(\gamma,\delta)$. Note que, então, $\gamma,\delta < \kappa$. Seja η tal que

$$\gamma,\delta < \eta < \kappa.$$

Note que $(\gamma,\delta) < (0,\eta)$. Assim, $\kappa < o(0,\eta)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} |o(0,\eta)| &= |\eta \times \eta| \\ &= ||\eta| \times |\eta||. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, $||\eta| \times |\eta|| = o(0,|\eta|) = |\eta|$. Contradição já que $|\eta| < \kappa$. $\square$

Corolário 2.4.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa = |\kappa \times \kappa|$.*

Corolário 2.4.10. *Seja X um conjunto infinito. Então $|X| = |X \times X|$.*

Corolário 2.4.11. *Sejam X, Y conjuntos infinitos. Então $|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.*

Demonstração. Suponha $|X| \leq |Y|$. Então $|X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|$. Como $|Y| \leq |X \times Y|$, temos o resultado. $\square$

Corolário 2.4.12. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$ (κ é infinito) e cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| \leq \kappa$. Então $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demonstração. Vamos supor que cada $|F| = \kappa$ e mostrar a igualdade (note que isso é suficiente). Fixe $\{F_\xi : \xi < \kappa\} = \mathcal{F}$ e, para cada $\xi < \kappa$, seja $f_\xi : \kappa \longrightarrow F_\xi$ bijetora. Note que $\varphi : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ dada por

$$\varphi(\alpha,\beta) = f_\alpha(\beta)$$

é sobrejetora. Logo, $\kappa = |\kappa \times \kappa| \geq |\bigcup \mathcal{F}|$. Como a outra desigualdade é imediata, temos o resultado. $\square$

Um conceito que vai ser importante em vários contextos são subconjuntos de algum tamanho fixado:

Definição 2.4.13. Sejam X um conjunto e κ um cardinal. Denotamos por $[X]^\kappa$ o conjunto $\{A \subset X : |A| = \kappa\}$. Também usamos a notação $[X]^{<\kappa}$ para $\{Y \subset X : |X| < \kappa\}$.

Em particular, $[X]^{<\aleph_0}$ são todos os subconjuntos finitos de X:

Proposição 2.4.14. *Se X é infinito, então $|[X]^{<\aleph_0}| = |X|$.*

Demonstração. Note que $|[X]^n| = |X|$ para todo $n \in \aleph_0$, $n \neq 0$. Como $[X]^{<\aleph_0} = \bigcup_{n\in\omega}[X]^n$, temos o resultado. □

Terminamos essa seção com uma simples aplicação:

Teorema 2.4.15. *Seja V um espaço vetorial. Se A e B são bases para V, então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos apenas fazer o caso em que A e B são infinitas. Suponha que não vale o resultado e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $|A| < |B|$. Para cada $a \in A$, existe $B_a \subset B$ finito tal que $a \in [B_a]$. Seja $B' = \bigcup_{a\in A} B_a$. Note que $|B'| \leq |A|$. Por outro lado, note que $B' \subset B$ e $[B'] = V$, já que $[B'] \supset A$, contradição. □

Lembrando, $[X]$ denota o subespaço gerado por X.

Sequências convergem, mas e daí?

Já vimos que ω_1 não é compacto. Mas vamos ver nesta seção que ele tem certas propriedades "parecidas" com compactos:

Lema 2.4.16. *Seja $A \subset \omega_1$ enumerável. Então A é limitado.*

Demonstração. Suponha que não. Então $\omega_1 = \bigcup_{a\in A} \downarrow a$. Mas note que cada $\downarrow a$ é enumerável. Logo, ω_1 é enumerável, contradição. □

Lema 2.4.17. *Toda sequência $(x_n)_{n\in w}$ estritamente crescente de pontos de ω_1 é convergente.*

Demonstração. Como $A = \{x_n : n \in \omega\}$ é enumerável, temos que A admite supremo. Seja $\alpha \in \omega_1$ tal supremo. Note que, dado $]\beta, \alpha]$ aberto contendo α, temos que, existe $x_n > \beta$ (por α ser supremo) e todo x_k com $k > n$ é tal que $x_k \in]\beta, \alpha]$. □

Teorema 2.4.18. *Toda sequência (enumerável) de pontos de ω_1 admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ sequência de pontos de ω_1. Note que, pelo Exercício 2.4.25, temos um dos seguintes casos:

- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência constante. Neste caso, o resultado é trivial.

- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente decrescente. Note que esse caso é impossível, uma vez que ω_1 é bem ordenado.

- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente crescente. Note que neste caso temos o resultado pelo lema anterior.

$\square$

Alongamentos

Alongamento 2.4.19. Seja κ. Mostre que $\kappa < |\wp(\kappa)|$.

Alongamento 2.4.20. Mostre que $\leq$ definida sobre os pares de ordinais é de fato uma ordem e que todo conjunto de pares admite mínimo.

Alongamento 2.4.21. Mostre que, dado um ordinal α, $\downarrow (0, \alpha) = \alpha \times \alpha$.

Alongamento 2.4.22. Mostre que todo cardinal infinito é um ordinal limite.

Exercícios

Exercício 2.4.23. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : \omega \longrightarrow X$ injetora.

Exercício 2.4.24. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora tal que $Y \subsetneq X$.

Exercício 2.4.25. Este é um roteiro para mostrar que toda sequência num conjunto totalmente ordenado admite uma subsequência constante, ou admite uma subsequência estritamente crescente ou admite uma subsequência estritamente decrescente. Assim, seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência num conjunto X totalmente ordenado por $\leq$

Vamos provar esse resultado novamente adiante como uma aplicação do Teorema de Ramsey (Proposição 3.3.8.

(a) Note que podemos supor que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ (se não pudermos, é que já resolvemos).

(b) Dizemos que x_n é um pico se, para todo $k > n$, temos que $x_k < x_n$. Suponha que existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência decrescente infinita.

(c) Suponha que não existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência crescente.

(d) Conclua o resultado.

Exercício 2.4.26. Considere $\omega_1 + 1$ como espaço topológico. Mostre que $\omega_1 \in \overline{\omega_1}$ mas não existe uma sequência em ω_1 convergente para ω_1.

2.5 Mais um pouco sobre ordens

Cofinalidade é uma espécie de "atalho" até o final de um conjunto:

Definição 2.5.1. Seja X ordenado por $\leq$. Dizemos que $A \subset X$ é **cofinal** em X se, para todo $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a$.

Definição 2.5.2. Seja X conjunto ordenado. Denotamos por $cf(X)$ (a **cofinalidade** de X) o menor cardinal κ tal que existe $A \subset X$ tal que A é cofinal em X e $|A| = \kappa$.

Muitas vezes é mais cômodo trabalhar com uma notação de função:

Definição 2.5.3. Sejam X um conjunto ordenado e κ um cardinal. Dizemos que $f : \kappa \longrightarrow X$ é uma **função cofinal** se sua imagem é cofinal em X.

É imediato notar o seguinte:

Proposição 2.5.4. *Dado X um conjunto ordenado. Então $cf(X) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ cofinal.*

No caso de ordinais, podemos tomar a f crescente:

Proposição 2.5.5. *Seja α um ordinal. Então $cf(\alpha) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ função crescente e cofinal.*

Demonstração. Vamos mostrar que, se existe uma função cofinal, então existe uma cofinal e crescente com o mesmo domínio. Suponha $cf(\alpha) = \kappa$. Seja $g : \kappa \longrightarrow \alpha$ cofinal. Defina $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ da seguinte forma, para $\xi \in \kappa$:

$$f(\xi) = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Note que tal função é crescente. Note também que, se sua imagem estiver contida em α, ela será cofinal. Assim, resta apenas mostrar que, dado $\xi \in \kappa$, temos que $f(\xi) \in \alpha$. Pela definição de f, é imediato notar que $f(\xi) \leq \alpha$. Ou seja, só precisamos provar que $f(\xi) \neq \alpha$. Primeiramente, note que podemos supor α limite (veja o Alongamento 2.5.16). Suponha que $f(\xi) = \alpha$. Então

$$\alpha = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Veja o Alongamento 2.5.17

Ou seja, $g \restriction (\xi + 1)$ é cofinal em α. Mas isso é uma contradição com a definição de cofinalidade de α já que $|\xi + 1| < \kappa$ $\square$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.5.6.

- Se α é da forma $\beta + 1$, então $cf(\alpha) = 1$.
- Pelos resultados da seção anterior, temos que $cf(\aleph_1) = \aleph_1$.
- $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Para isso, basta notar que $f : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_\omega$ dada por $f(n) = \aleph_n$ é cofinal (note que $cf(\aleph_\omega) \geq \aleph_0$ pelo Exercício 2.5.21).

Vamos agora definir o produto generalizado:

Definição 2.5.7. Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ uma família de conjuntos. Denotamos por $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ o conjunto $\{(x_\xi)_{\xi<\kappa} : x_\xi \in X_\xi\}$. Chamamos cada x_ξ de **ξ-ésima** coordenada de $(x_\xi)_{\xi<\kappa}$.

Podemos ver $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ como o conjunto de todas as funções de κ em $\bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi$ tais que cada $f(\xi) \in X_\xi$.

Podemos agora fazer algumas aplicações em aritmética cardinal:

Teorema 2.5.8 (Teorema de König). *Seja κ cardinal e sejam $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(B_\xi)_{\xi<\kappa}$ famílias de conjuntos tais que $|A_\xi| < |B_\xi|$ para todo $\xi < \kappa$. Então $|\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi| < |\prod_{\xi<\kappa} B_\xi|$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe $f : \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ sobrejetora. Para cada $\xi < \kappa$, existe $b_\xi \in B_\xi$ tal que $b_\xi \notin \pi_\xi[f[A_\xi]]$ já que não existe uma função sobrejetora de A_ξ em B_ξ. Note que $(b_\xi)_{\xi<\kappa} \in \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ mas não está na imagem de f. De fato, suponha $(b_\xi)_{\xi<\kappa}$ na imagem de f. Seja a tal que $f(a) = (b_\xi)_{\xi<\kappa}$. Seja η tal que $a \in A_\eta$. Pela construção, temos que $b_\eta \notin \pi_\eta[f[A_\eta]]$, contradição. $\square$

π_ξ é a projeção na ξ-ésima coordenada.

Dados η e κ cardinais, denotamos por $\eta^\kappa = |\eta^\kappa|$ (veja o Alongamento 2.5.19 para verificar que essa notação é coerente com o caso em ω).

Corolário 2.5.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Demonstração. Seja $f : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ cofinal e crescente. Note que, para cada $\xi < cf(\kappa)$, temos que $|\downarrow f(\xi)| < \kappa$ (por κ se cardinal). Note também que $\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \downarrow f(\xi) = \kappa$. Finalmente, $\kappa^{cf(\kappa)} = |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa|$. Logo

$$|\kappa| = |\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} f(\xi)| < |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa| = \kappa^{cf(\kappa)}$$

$\square$

Pré-ordens

Existe uma pré-ordem sobre as funções de ω em ω natural e com bastante aplicações. Começaremos a trabalhar com ela nesta seção.

Ou seja, o que está faltando para virar ordem é $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar $a = b$.

Definição 2.5.10. Dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem** sobre um conjunto X se, para todo $a, b, c \in X$ temos:

(a) $a \leq a$

(b) se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Veja o Alongamento 2.5.20.

Definição 2.5.11. Denotamos por $\leq^*$ a seguinte pré-ordem sobre ω^ω: dados $f, g \in \omega^\omega$, dizemos que $f \leq^* g$ se

$$\{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ é finito.}$$

Vejamos alguns conceitos sobre famílias de funções de ω^ω:

O conceito de ilimitado é meio que o mesmo que para ordens e o conceito de dominante é o de cofinal para ordens.

Definição 2.5.12. Seja $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família ilimitada** se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família dominante** se, para todo $g \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$.

Note que a própria família $\mathcal{F} = \omega^\omega$ é ilimitada e dominante.

Proposição 2.5.13. *Toda família dominante é ilimitada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Suponha que ela não seja ilimitada. Ou seja, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Defina $h \in \omega^\omega$ como

$$h(n) = g(n) + 1$$

para todo $n \in \omega$. Note que não existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $h \leq^* f$ e, portanto, $\mathcal{F}$ não é dominante. $\square$

Proposição 2.5.14. *Não existe uma família ilimitada enumerável.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \omega}$ família enumerável de funções de ω^ω. Para cada $n \in \omega$, defina

$$g(n) = \max\{f_0(n), ..., f_n(n)\}$$

Note que $f_n \leq^* g$ para todo $n \in \omega$ e, portanto, $(f_n)_{n \in \omega}$ não é ilimitada. $\square$

Note que $\{k \in \omega : f_n(k) > g(k)\} \subset \{0, ..., n-1\}$.

Olhando por cima do muro

Chamamos de $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $|2^\omega|$. Note que $\mathfrak{c} = |\omega^\omega|$. De fato, é imediato notar que $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$. Por outro lado, temos que ω^ω pode ser identificado com $[\omega]^\omega$ (ver Exercício 2.5.30). Assim,

$$|\omega^\omega| = |[\omega]^\omega| \leq |\wp(\omega)| = |2^\omega|$$

Com isso, é fácil ver que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ (ver o Exercício 2.5.31).

Note que $\mathfrak{c}$ é não enumerável. Logo, temos que

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$$

Pelos resultados da seção anterior, como existe pelo menos uma família dominante, podemos definir $\mathfrak{d}$ como a menor cardinalidade possível para uma família dominante e $\mathfrak{b}$ como a menor cardinalidade possível para uma família ilimitada. Como toda família dominante é ilimitada, temos

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

Como a própria família ω^ω é dominante, temos que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Finalmente, como não existe uma família ilimitada enumerável, temos que $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$. Resumindo, temos a seguinte situação:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$$

O curioso é que, com os axiomas que temos até o momento, isso é meio que tudo que podemos dizer sobre as relações entre esses quatro cardinais.

A **hipótese do contínuo** (uma afirmação que é independente dos axiomas de ZFC), afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Note que, supondo essa afirmação, as desigualdades acima viram todas igualdades.

Por outro lado, meio que qualquer outra combinação que quisermos é possível também. Veremos um pouco mais disso adiante.

Uma **afirmação independente** de uma lista de axiomas nada mais é que uma afirmação que nem ela, nem sua negação, podem ser provadas a partir da lista de axiomas. É a mesma situação que ocorre, por exemplo, em teoria dos corpos: considere T os axiomas de teoria dos corpos. Quando se prova que $\mathbb{R}$ é um corpo, estamos provando que $\mathbb{R}$ satisfaz todos os axiomas de corpo - vamos usar a notação $\mathbb{R} \vDash T$. Pode-se provar que, se φ é uma consequência de T, então vale também que $\mathbb{R} \vDash \varphi$ (ou seja, todas as consequências de T também valem em $\mathbb{R}$). Podemos repetir este processo com

Para ver uma formalização deste argumento, recomendamos [10].

qualquer outro conjunto que satisfaça T. Isso nos permite fazer o seguinte argumento. Considere φ a afirmação

$$\exists x \; x \cdot x = 1 + 1$$

Intuitivamente, esta afirmação, completamente escrita na linguagem da teoria dos corpos, quer dizer que existe algum elemento cujo quadrado é dois. Note que essa afirmação não é uma consequência de T. Pois, se ela fosse, como $\mathbb{Q} \vDash T$, teríamos que $\mathbb{Q} \vDash \varphi$, o que não é verdade. Por outro lado, também temos que a negação de φ também não é consequência de T. Pois, se fosse, teríamos $\mathbb{R} \vDash \neg\varphi$, o que também não é verdade.

A argumentação acima não é possível com a teoria dos conjuntos (basicamente, por não existir um conjunto de todos os conjuntos). Mas ainda assim, podemos provar esse tipo de situação, usando outros métodos. Veremos alguns tópicos neste sentido mais adiante.

Alongamentos

Alongamento 2.5.15. Seja α um ordinal. Mostre que:

(a) $cf(\alpha) \leq \alpha$

(b) se $cf(\alpha)$ é finito, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Alongamento 2.5.16. Seja $\alpha = \beta + 1$ ordinal. Se $f : \kappa \to \alpha$ é cofinal, então existe $\xi < \kappa$ tal que $f(\xi) = \beta$.

Alongamento 2.5.17. Sejam α ordinal limite e $A \subset \alpha$. Mostre que A é cofinal se, e somente se, $\sup A = \alpha$.

Alongamento 2.5.18. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Alongamento 2.5.19. Considere $a, b \in \omega$. Mostre que $a^b = |\wp(a^b)|$ (onde o primeiro a^b é a exponenciação usual nos naturais e o segundo é o conjunto das funções de $\{0, ..., b-1\}$ em $\{0, ..., a-1\}$).

Alongamento 2.5.20. Mostre que $f \leq^* g$ se, e somente se, existe $n_0 \in \omega$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $f(n) \leq g(n)$.

Exercícios

Exercício 2.5.21. Seja α um ordinal.

(a) Mostre que se $cf(\alpha) = 1$, então $\alpha = \beta + 1$ para algum β.

(b) Mostre que se $cf(\alpha)$ é finita, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) Mostre que se κ é um cardinal infinito, então $cf(\kappa) \geq \aleph_0$.

Exercício 2.5.22. Sejam X, A, B conjuntos. Mostre que $|(X^A)^B| = |X^{A\times B}|$. Mostre que, em particular, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.5.23. Seja α ordinal limite. Mostre que $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Exercício 2.5.24. Seja α um ordinal de cofinalidade não enumerável. Mostre que $\{\beta < \alpha : cf(\beta) = \omega\}$ é ilimitado em α.

Exercício 2.5.25. Mostre que existem um cardinal κ e uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tais que $|\mathcal{F}| < \kappa$, cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| < \kappa$ e ainda assim $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$.

Exercício 2.5.26. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $g_f \in \omega^\omega$ por

$$g_f(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$. Mostre que $\mathcal{G} = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ é ilimitada mas não é dominante.

Exercício 2.5.27. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto. Mostre que $|\bigcup \mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}| \sup\{|F| : F \in \mathcal{F}\}$.

Exercício 2.5.28. Mostre que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.

Exercício 2.5.29. Mostre que existe α tal que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Exercício 2.5.30. Seja κ um cardinal. Seja X um conjunto tal que $\kappa \leq |X|$.

(a) Para cada $A \in [X]^\kappa$, fixe $f_A : \kappa \longrightarrow A$ bijetora. Mostre que $\varphi : [X]^\kappa \longrightarrow X^\kappa$ dada por $\varphi(A) = f_A$ é injetora.

(b) Observe que $X^\kappa \subset [\kappa \times X]^\kappa$.

(c) Mostre que $|X^\kappa| = |[X]^\kappa|$.

Exercício 2.5.31. Este é um roteiro para mostrar que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(a) Associe, para cada $x \in \mathbb{R}$, $s_x \in \mathbb{Q}^\omega$ de forma injetora.

(b) Seja $f \in 2^\omega$. Seja $\varphi(f) = \sum_{n \in \omega} f(n)10^{-n}$. Mostre que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

(c) Conclua que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.5.32. Seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável de subconjuntos infinitos de ω tais que, se $F \subset \mathcal{F}$ é finito, então $\bigcap F$ é infinito. Mostre que existe $A \subset \omega$ infinito tal que $A \subset^* B$ para todo $B \in \mathcal{F}$ ($X \subset^* Y$ se $X \smallsetminus Y$ é finito).

Exercício 2.5.33. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos infinitos de ω é **quase disjunta** se, para todo $F, G \in \mathcal{F}$ distintos, temos que $F \cap G$ é finito.

(a) Mostre que existe uma família quase disjunta maximal e infinita.

(b) Mostre que não existe uma família quase disjunta maximal infinita que seja enumerável.

(c) Mostre que existe uma família quase disjunta maximal de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

(d) Note que não existe uma família de suconjuntos de ω dois a dois disjuntos que seja não enumerável.

Ou seja, finito é bem diferente de vazio.

Exercício 2.5.34. Mostre que não existe $X \subset \mathbb{R}$ tal que, com a ordem usual, seja isomorfo a ω_1.

Capítulo 3

Algumas aplicações

Agora que finalmente terminamos a parte mais básica, vamos fazer um capítulo mais dedicado a aplicações.

3.1 Exemplos reais

Nesta seção, vamos nos concentrar em construções em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. No que se segue, vamos usar várias vezes o termo **enumeração** de um conjunto, para algo da forma $X = \{x_\xi : \xi < \kappa\}$. Isso apenas quer dizer que, se $\xi \neq \eta$, então $x_\xi \neq x_\eta$ (mas não quer dizer que κ é enumerável).

Talvez compense lembrar que já fizemos uma construção deste tipo (bem bacana) com circunferências na Proposição 1.3.7.

Estamos dando um número ordinal a cada elemento.

O primeiro exemplo é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde as fatias verticais são pequenas e as horizontais são grandes:

Proposição 3.1.1. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para toda reta da forma $v = \{(a, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ou da forma $h = \{(x, a) : x \in \mathbb{R}\}$ ($a \in \mathbb{R}$), temos que $v \cap A$ tem no máximo um ponto e $h \cap A$ tem projeção densa nos reais.*

Demonstração. Considere $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de todos os intervalos da forma $]a, b[$ com $a < b \in \mathbb{Q}$. Seja $\{a_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \omega$, seja $x_n^0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_n^0 \in I_n$. Seja $A_0 = \{(x_n^0, a_0) : n \in \omega\}$. Suponha definidos $\{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Para cada $k \in \omega$, seja $x_k^\alpha \in I_k \setminus \{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$. Defina $A_\alpha = \{(x_n^\alpha, a_\alpha) : n \in \omega\}$. Note que $A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$ é o conjunto procurado. □

Note que podemos tomar tal elemento já que $|I_k| = \mathfrak{c}$.

O próximo exemplo é "bem distribuído" nas retas de $\mathbb{R}^2$:

Proposição 3.1.2. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer reta r, $|r \cap A| = 2$.*

Demonstração. Seja $(r_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}$ uma enumeração de todas as retas de $\mathbb{R}^2$. Seja $A_0 = \{a, b\}$, onde $a, b \in r_0$ são dois pontos distintos quaisquer. Fixe $\alpha < \mathfrak{c}$. Suponha definidos A_ξ para todo $\xi < \alpha$ e suponha por hipótese que não existam 3 pontos em $B = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$ colineares. Se $|r_\alpha \cap B| = 2$, defina $A_\alpha = \emptyset$. Caso contrário, primeiramente note que $|[B]^2| < \mathfrak{c}$. Note também que cada par de pontos de B determina uma reta que, por sua vez, intercepta r_α no máximo em um ponto. Seja X o conjunto de tais pontos (isto é, os pontos de r_α contidos numa reta determinada por um par de pontos de B). Note que $|X| < |r_\alpha|$. Assim, se $r_\alpha \cap B = \emptyset$, defina $A_\alpha = \{a, b\}$ onde $a, b \in r_\alpha \smallsetminus X$ são dois pontos distintos. Se $|r \cap B| = 1$, defina $A_\alpha = \{a\}$ onde $a \in r_\alpha \smallsetminus X$ é um ponto qualquer. Note que $A = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} A_\xi$ é o conjunto desejado. $\square$

Vamos mostrar que cada fechado não enumerável de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade contínuo. Para isso, o seguinte lema vai ajudar:

Lema 3.1.3. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ não enumerável. Então existem I, J intervalos de extremos racionais tais que $I \cap F$ e $J \cap F$ são não enumeráveis e $\overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Considere os intervalos da forma

$$I_z^n =]z\frac{1}{n}, (z+1)\frac{1}{n}[$$

com $z \in \mathbb{Z}$. Note que, pelo menos um destes intervalos é tal que $I_z^n \cap F$ é não enumerável. Vamos mostrar que pelo menos dois intervalos dessa forma com um mesmo n tem tal propriedade. Se nessa primeira etapa já encontramos dois intervalos assim, terminamos. Caso contrário, repita o processo com $n + k$ com $k \in \mathbb{N}$. Se para algum k encontramos dois intervalos cuja intersecção com F é não enumerável, terminamos. Suponha que isso não aconteça. Então podemos construir uma sequência $(z_k)_{k\in\omega}$ tal que $I_{z_k}^{n+k} \cap F$ é não enumerável e z_k é o único com tal propriedade. Note que $\bigcap_{k\in\omega} I_{z_k}^{n+k}$ tem no máximo um ponto. Logo, F é enumerável, já que, a menos de no máximo um ponto, está contido $\bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{z\neq z_k} I_z^{n+k} \cap F$ (e todos esses conjuntos são enumeráveis).

Note que pelo mesmo argumento acima, podemos exigir também que os dois intervalos encontrados sejam não consecutivos (se sempre fossem consecutivos, o argumento final funcionaria novamente, tratando-os como um único intervalo). Note que dois intervalos assim satisfazem o que queremos. $\square$

O seguinte corolário é apenas uma reformulação do lema, apenas deixado-o de jeito mais próximo ao que vamos usar.

Corolário 3.1.4. *Dado $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, existem dois intervalos I_0, I_1 fechados disjuntos e limitados tais que $I_0 \cap F$ e $I_1 \cap F$ são não enumeráveis.*

Proposição 3.1.5. *Todo subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável é tal que $|F| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Sejam I_0 e I_1 como no corolário. Suponha definido I_s para $s \in \omega^{<\omega}$ de forma que $I_s \cap F$ seja não enumerável. Assim, podemos aplicar o corolário novamente e encontrar $I_{s^\frown 0}$ e $I_{s^\frown 1}$ intervalos fechados, limitados e disjuntos tais que $I_{s^\frown i} \cap F$ é não enumerável e $I_{s^\frown i} \subset I_s$.

Dada uma sequência s e um elemento n, denotamos por $s^\frown n$ a sequência s acrescida de n como último elemento.

Note que, dada $f : \omega \longrightarrow 2$, temos que existe $x_f \in \bigcap_{n\in\omega} I_{f\restriction n}$. Note também que $x_f \neq x_g$ se $f \neq g$ e, finalmente, que cada $x_f \in F$. $\square$

A quantidade total de fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$ também é $\mathfrak{c}$:

Proposição 3.1.6. *Existem exatamente $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para $\mathbb{R}$. Note que todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união enumerável dos elementos desta base. Assim, existem, no máximo, $|\mathcal{B}|^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ abertos em $\mathbb{R}$ e, portanto, a mesma quantidade de fechados.

Por outro lado, para cada $r \in \mathbb{R}$, o intervalo $[r, r+1]$ é um fechado não enumerável e, portanto, existem $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$. $\square$

Vamos terminar esta seção apresentando um tipo de conjunto que é grande o suficiente para interceptar cada fechado não enumerável e pequeno o suficiente que seu complementar também tenha essa propriedade.

Definição 3.1.7. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um **conjunto de Bernstein** se X é não enumerável e, para todo $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, temos que $F \cap X$ e $F \cap (\mathbb{R} \setminus X)$ são não vazios.

Proposição 3.1.8. *Existe um conjunto de Bernstein.*

Demonstração. Seja $(F_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}$ uma enumeração de todos os fechados não enumeráveis de $\mathbb{R}$. Sejam $x_0, y_0 \in F_0$ distintos. Suponha definidos $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ e $(y_\xi)_{\xi<\alpha}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Sejam dois pontos distintos

$$x_\alpha, y_\alpha \in F_\alpha \setminus (\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi : \xi < \alpha\}).$$

Note que podemos fazer isso já que $|F_\xi| = \mathfrak{c}$. Finalmente, note que $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $Y = \{y_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ são conjuntos de Bernstein. $\square$

Só note que os dois são disjuntos que tudo sai fácil.

Exercícios

Exercício 3.1.9. Adapte a demonstração da Proposição 3.1.1 e garanta que $v \cap A$ tenha exatamente um ponto. Note que assim podemos pedir que A seja gráfico de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 3.1.10. Mostre que $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ é uma união de retas disjuntas.

Exercício 3.1.11. Seja X um conjunto de Bernstein.

(a) Mostre que, para qualquer $K \subset X$ compacto, temos que K é enumerável.

(b) Mostre que, para qualquer A aberto tal que $X \subset A$, temos que $\mathbb{R} \setminus A$ é enumerável.

(c) Conclua que X não é mensurável.

A ideia aqui é só usar que os mensuráveis podem ser aproximados por baixo por compactos e por cima por abertos. Lembre também que conjuntos enumeráveis tem medida nula.

3.2 Algumas funções em ω_1

O primeiro resultado desta seção é um caso particular do resultado conhecido como **Lema do Pressing Down**:

Proposição 3.2.1. *Seja $\alpha \in \omega_1$. Seja $f : [\alpha, \omega_1[\longrightarrow \omega_1$ função tal que $f(\xi) < \xi$ para todo $\xi \in [\alpha, \omega_1[$. Então existe β tal que $f^{-1}(\beta)$ é ilimitado em ω_1 .*

Demonstração. Suponha que não. Então, para cada $\xi < \omega_1$, temos que

$$\sup\{\gamma < \omega_1 : f(\gamma) \leq \xi\} < \omega_1$$

já que a imagem inversa de cada ponto é enumerável e só existem enumeráveis pontos menores que ξ.

Desta forma, podemos construir a seguinte sequência: defina $\beta_0 = \alpha$ e suponha definidos $\beta_0, ..., \beta_n$. Defina

$$\beta_{n+1} = \sup\{\xi < \omega_1 : f(\xi) \leq \beta_n\} + 1.$$

Como cada $\beta_n < \omega_1$, podemos definir $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ (e $\beta < \omega_1$). Seja $\gamma = f(\beta)$. Note que $\gamma < \beta$ (pela propriedade da f). Logo, como β é supremo dos β_n's, existe $n \in \omega$ tal que $\gamma \leq \beta_n$. Assim, pela definição de β_{n+1}, temos que, para qualquer $\xi \geq \beta_{n+1}$, $f(\xi) > \beta_n$. Em particular, como $\beta > \beta_{n+1}$, temos que $f(\beta) > \beta_n$. Contradição com o fato que $f(\beta) = \gamma$ e $\gamma \leq \beta_n$. $\square$

Como uma aplicação de tal resultado, vamos apresentar o seguinte exemplo:

Proposição 3.2.2. *O espaço $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ não é normal.*

O interesse neste resultado está no fato de ω_1 e $\omega_1 + 1$ serem normais.

Demonstração. Note que $D = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ e $F = \{(\alpha, \omega_1) : \alpha < \omega_1\}$ são fechados disjuntos. Suponha que existam A e B abertos disjuntos tais que $D \subset A$ e $F \subset B$. Note que, para qualquer $\alpha < \omega_1$ com $\alpha \neq 0$, um aberto básico para (α, α) é da forma $]\beta, \alpha] \times]\beta, \alpha]$, com $\beta < \alpha$. Assim, para $\alpha \in \omega_1 \smallsetminus \{0\}$, podemos definir $f(\alpha) < \alpha$ tal que

$$(\alpha, \alpha) \in]f(\alpha), \alpha] \times]f(\alpha), \alpha] \subset A$$

Pelo resultado anterior, temos que existe β tal que $f(\alpha) = \beta$ para um conjunto ilimitado de α's. Isso implica que

$$]\beta, \omega_1[\times]\beta, \omega_1[\subset A.$$

Seja $\gamma < \omega_1$ tal que $\beta < \gamma$. Note que existem $\xi < \gamma$ e $\xi' < \omega_1$ tais que $(\gamma, \omega_1) \in]\xi, \gamma] \times]\xi', \omega_1] \subset B$ (note que podemos tomar $\xi' > \beta$). Assim, temos que $(\gamma, \xi' + 1) \in A \cap B$. $\square$

Vamos agora mostrar uma outra característica sobre funções em ω_1, relacionado com as funções continuas de ω_1 em $\mathbb{R}$. Tais funções precisam ser constantes a partir de um ponto:

Esse fato dá umas outras aplicações, veja o Exercício 3.2.7 por exemplo.

Proposição 3.2.3. *Seja $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \geq \alpha$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Vamos mostrar que existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que

$$|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{n}$$

para todo $\beta \geq \alpha_n$. Suponha que não. Então podemos construir sequências $(\gamma_k)_{k \in \omega}$ e $(\xi_k)_{k \in \omega}$ tais que

- $\gamma_0 < \xi_0 < \gamma_1 < \xi_1 ...$
- $|f(\gamma_k) - f(\xi_k)| \geq \frac{1}{n}$.

Seja $\delta = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\} = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$. Note que, como f é contínua, $f(\gamma_k) \longrightarrow f(\delta)$ e $f(\xi_k) \longrightarrow f(\delta)$. Mas isso contraria como cada γ_k e ξ_k foram escolhidos.

Seja $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Note que α satisfaz o que desejamos. $\square$

Definição 3.2.4. Dado X espaço topológico, denotamos por βX um conjunto compacto Hausdorff tal que:

(a) $X \subset \beta X$

(b) $\overline{X} = \beta X$

(c) se $f : X \longrightarrow [0, 1]$ é uma função contínua, então existe $\tilde{f} : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ extensão contínua de f.

Chamamos βX de **compactificação de Stone-Čech** de X.

Pode-se mostrar que um espaço X admite tal compactificação se, e somente se, ele for completamente regular. Também pode-se mostrar que tal compactificação é única a menos de homeomorfismos.

Em geral, βX é muito maior que X (veremos depois um pouco sobre $\beta\omega$). No caso de ω_1, $\beta\omega_1$ tem apenas um ponto a mais que ω_1:

Proposição 3.2.5. $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Demonstração. Note que já temos que $\omega_1 + 1$ é compacto e que $\overline{\omega_1} = \omega_1$. Resta mostrar a propriedade de extensão de funções contínuas. Seja $f : \omega_1 \longrightarrow [0, 1]$ função contínua. Seja $\alpha < \omega_1$ como na Proposição 3.2.3. Defina $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x < \omega_1$ e $\tilde{f}(\omega_1) = f(\alpha)$. Note que $\tilde{f}$ é a função desejada. □

Exercícios

Exercício 3.2.6. Dizemos que uma $\mathcal{C}$ cobertura aberta para um espaço X é minimal se, para todo $C \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ não é uma cobertura. Mostre que ω_1 admite uma cobertura por abertos que não admite subcobertura minimal.

Exercício 3.2.7. Mostre que toda $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua é limitada (apesar de ω_1 não ser compacto).

Exercício 3.2.8. Seja X tal que exista βX. Mostre que toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada pode ser estendida a βX.

Exercício 3.2.9. Considere $\beta\omega$ (vamos provar depois que tal conjunto existe). Considere $C(\beta\omega)$ o espaço de todas as funções contínuas de $\beta\omega$ em $\mathbb{R}$ com a norma do sup ($\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \beta\omega\}$). Mostre que tal espaço é isomorfo (como espaço de Banach) a ℓ_∞.

3.3 Colorações

Nesta seção, veremos um pouco sobre colorações. Os teoremas de Ramsey que apresentaremos de certa forma dizem quando que um conjunto é grande o suficiente para sempre garantirmos que certos padrões estarão presentes.

Definição 3.3.1. Chamamos de uma **coloração** sobre X uma função $\pi : X \longrightarrow r$, onde $r \in \omega$ ($0, 1, ..., r-1$ são as possíveis cores para os elementos de X).

Definição 3.3.2. Seja X um conjunto e $r \in \mathbb{N}_{>0}$. Dada uma coloração $\pi : X \longrightarrow r$, dizemos que $Y \subset X$ é **monocromático** se existe $c \in r$ tal que $\pi(y) = c$ para todo $y \in Y$.

Definição 3.3.3. Seja X um conjunto e $r, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dada uma coloração $\pi : [X]^n \longrightarrow r$, dizemos que $H \subset X$ é **homogêneo** se $[H]^n$ é monocromático.

Cuidado aqui: se garantimos que H é homogêneo, não temos apenas um conjunto monocromático de n-uplas de H - nós conseguimos que todas as n-uplas de H são de uma mesma cor.

Vamos apresentar dois teoremas (conhecidos como de Ramsey) que dão condições de quando podemos encontrar conjuntos homogêneos:

Teorema 3.3.4 (de Ramsey). *Sejam $n, r \in \mathbb{N}_{>0}$. Seja $\pi : [\omega]^n \longrightarrow r$ uma coloração. Dado $S \subset \omega$ infinito, existe $H \subset S$ infinito homogêneo.*

Demonstração. Por indução sobre n. Caso $n = 1$, é imediato pelo princípio da casa dos pombos. Seja $\pi : [\omega]^{n+1} \longrightarrow r$. Para cada $a \in \omega$, seja $\pi_a : [\omega \smallsetminus \{a\}]^n \longrightarrow r$ dada por

$$\pi_a(F) = \pi(F \cup \{a\})$$

Defina $a_0 = \min S$ e seja $H_0 \subset S \smallsetminus \{a_0\}$ homogêneo para π_{a_0}. Para cada $k \in \omega$, sejam:

Note que aqui já temos que conjuntos de $n+1$ elementos que contém a_0 têm a mesma cor. O problema são os que não tem a_0.

- $a_{k+1} = min\{a \in H_k : a > a_j \text{ para } j \leq k\}$.
- $H_{k+1} \subset H_k$ é homogêneo para $\pi_{a_{k+1}}$.

Note que, para cada $j \in \omega$, o conjunto $[\{a_k : k > j\}]^n$ é monocromático para π_{a_j}. Seja c_j tal cor. Como só existem r cores, existe uma cor c tal que $c_j = c$ para infinitos j's. Seja H o conjunto de tais a_j's. Sejam $b_0 < \cdots < b_n \in H$. Note que

$$\pi(\{b_0, ..., b_n\}) = \pi_{b_0}(\{b_1, ..., b_n\})$$

Mas, como $b_0 \in H$, temos que $\pi_{b_0}(\{b_1, ..., b_n\}) = c$. Ou seja, H é homogêneo para π. □

Como corolário de tal resultado, temos sua versão finita:

Basicamente, o que esse resultado diz é que, se queremos um conjunto homogêneo de tamanho m, sempre podemos encontrar um N tal que toda coloração sobre n-uplas dele vai conter um homogêneo do tamanho desejado.

Corolário 3.3.5 (**Teorema de Ramsey (versão finita)**). *Sejam $m, n, r \in \omega$, com $r \geq 1$ e $n \leq m$. Então existe $N \in \omega$, com $N \geq m$ tal que, para toda coloração $\pi : [N]^n \longrightarrow r$, existe $H \subset N$ homogêneo tal que $|H| = m$.*

Antes de provarmos tal resultado, convém apresentar uma definição e um resultado que serão úteis em outras situações:

Definição 3.3.6. Seja $(T, \leq)$ conjunto ordenado. Dizemos que T é uma **árvore** se, para qualquer $p \in T$, o conjunto $\{q \in T : q \leq p\}$ é bem ordenado por $\leq$. Dados $p < q \in T$, dizemos que q é um **sucessor** de p se não existe $r \in T$ tal que $p < r < q$. Dizemos que uma árvore **bifurca finitamente** se, para todo $p \in T$, o conjunto dos sucessores de T é finito e T só possui finitas raízes.

Um elemento de uma árvore é uma **raiz** se ele é minimal.

Um **ramo** numa árvore é uma cadeia maximal

Proposição 3.3.7 (**Lema de König**). *Seja $(T, \leq)$ uma árvore infinita que bifurca finitamente. Então T contém um ramo infinito.*

Demonstração. Seja R_0 o conjunto das raízes de T. Note que, para algum $r_0 \in R$, o conjunto $\{s \in T : r_0 \leq s\}$ é infinito. Como os sucessores de r_0 são finitos, existe r_1 sucessor de r_0 tal que $\{s \in T : r_1 \leq s\}$ é infinito. Procedendo desta maneira, podemos encontrar $(r_n)_{n\in\omega}$ todos ordenados que podem ser estendidos (se necessário) a um ramo. □

Demonstração. (do Teorema de Ramsey (versão finita)) Suponha por contradição que não vale o resultado. Ou seja, existem $m, n, r \in \omega$ como no enunciado de maneira que, para todo $N \geq m$, existe uma coloração $\pi_N : [N]^n \longrightarrow r$, tal que não existe $H \in [N]^m$ homogêneo.

Defina

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \;=\; & \{\pi_N : \pi_N \text{ é uma coloração sobre } [N]^m, \\ & N \geq m \text{ e não existe } H \in [N]^m \text{ homogêneo}\} \end{aligned}$$

Dadas $\pi_N, \pi_M \in \mathbb{P}$, dizemos que $\pi_N \leq \pi_M$ se, e somente se, $N \leq M$ e $\pi_N \subset \pi_M$. Note que $\mathbb{P}$ é uma árvore que bifurca finitamente. Além disso, por hipótese, tal árvore é infinita (existem infinitos N's) e cada π_N não admite um conjunto H com m elementos que seja homogêneo. Pelo Lema de König, existe um ramo infinito r em tal árvore. Note que $\pi = \bigcup_{\pi_N \in r} \pi_N$ é uma coloração definida sobre $[\omega]^m$. Note também que tal coloração não admite um subconjunto de tamanho m que seja homogêneo, contrariando o Teorema de Ramsey (que diz que existe um infinito). □

Como aplicação do Teorema de Ramsey, vamos apresentar uma nova demonstração para o seguinte fato:

Note que já tínhamos provado isso no Exercício 2.4.25)

Proposição 3.3.8. *Seja* $(X, \leq)$ *conjunto ordenado. Seja* $(x_n)_{n\in\omega}$ *uma sequência de pontos em* X*. Entao existe uma subsequência de* $(x_n)_{n\in\omega}$ *que é constante, ou existe uma que é crescente ou existe uma que é decrescente.*

Demonstração. Considere a seguinte coloração sobre pares de naturais (considere $n < m$):

$$\pi(\{n, m\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_n < x_m \\ 1 & \text{se } x_n = x_m \\ 2 & \text{se } x_n > x_m \end{cases}$$

Pelo Teorema de Ramsey, existe $A \subset \omega$ homogêneo para π. Note que os elementos de tal conjunto formam a sequência desejada. $\square$

Após o Teorema de Ramsey, uma pergunta natural seria se vale a generalização natural para conjuntos não enumeráveis. Isto é, se a afirmação "para toda coloração sobre um conjunto não enumerável, existe um subconjunto não enumerável homogêneo". Mas isso é falso, como mostra o seguinte exemplo:

Proposição 3.3.9 (Sierpiński)**.** *Existe* X *não enumerável e* $\pi : [X]^2 \to 2$ *tal que não existe* $H \subset X$ *não enumerável homogêno.*

Demonstração. Considere com $X = \mathbb{R}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}$ e $\leq$ a ordem usual sobre $\mathbb{R}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ distintos, defina $\pi(\{a, b\})$ como 0 se $\preceq$ e $\leq$ concordam em a, b e 1 caso contrário. Suponha que exista $H \subset \mathbb{R}$ homogêno não enumerável. Se a cor associada a H é 0, temos que $\mathbb{R}$ contém uma cópia isomorfa de w_1. Por outro lado, se a cor associada é 1, temos que $\mathbb{R}$ com a ordem usual reversa contém uma cópia isomorfa de ω_1. Note que ambos os casos são impossíveis (veja o Exercício 2.5.34). $\square$

Exercícios

Exercício 3.3.10. Considere $\equiv$ a seguinte relação entre subconjuntos de ω: $A \equiv B$ se $A \Delta B$ é finito.

(a) Note que $\equiv$ é uma relação de equivalência.

(b) Fixe para cada classe de equivalência $[X]$ um representante $f([X])$. Note que $X \Delta f([X])$ é finito.

(c) Mostre que existe uma coloração $\pi : [\omega]^\omega \longrightarrow 2$ tal que para todo conjunto infinito $X \subset \omega$, existem $A, B \subset X$ infinitos tais que $\pi(A) \neq \pi(B)$.

(d) Compare com o Teorema de Ramsey (versão finita).

Exercício 3.3.11. Considere $\omega^{<\omega}$ com a ordem dada por $\subset$.

(a) Mostre que tal conjunto é uma árvore.

(b) Seja R um ramo em $\omega^{<\omega}$. Determine o que é $\bigcup R$.

Exercício 3.3.12. Um **grafo** é um par (G, A) onde G é um conjunto de pontos (denominados vértices) e A é um conjunto de pares de pontos (denominados arestas). . Um grafo completo é um grafo que contém todas as arestas $\{a, b\}$ onde a, b são vértices distintos. Uma coloração sobre um grafo é uma função $\pi : A \to r$ (ou seja, colorimos as arestas). Um grafo é dito monocromático se todas as suas arestas tem uma única cor.

Pense numa aresta como uma linha ligando dois vértices

(a) Mostre que dado $n \in \mathbb{N}_>0$, existe M tal que, para toda coloração de duas cores sobre um grafo completo de M vértices, existe um subgrafo completo monocromático de n vértices.

(b) Chamamos de $R(n)$ o menor M como acima. Prove que $R(3) = 6$.

(c) Determine o menor número de pessoas numa festa para que se tenha certeza que existem (pelo menos) 3 pessoas nela que não se conhecem ou pelo menos 3 pessoas nela que se conhecem.

Aqui precisamos supor que se A conhece B, então B conhece A.

3.4 Um pouco de árvores

Aproveitando os resultados da última seção, vamos apresentar um resultado sobre árvores que na sua demonstração faz uso do Teorema de Ramsey.

Esse resultado pode ser encontrado em [2].

Definição 3.4.1. Seja T uma árvore. Dizemos que $A \subset T$ é uma **anticadeia** em T se seus elementos são dois a dois incomparáveis.

Cuidado aqui, essa não é a definição de anticadeia para ordens parciais - apesar de T ser parcialmente ordenado.

Ao longo desta seção, vamos supor que T é uma árvore infinita e que tem um elemento mínimo (chamado de **raiz** de T). Dados $s, t \in T$, vamos denotar por

$$s \wedge t = \max\{\downarrow s \cap \downarrow t\}$$

se s e t são incomparáveis ou $s \wedge t = \min\{s, t\}$ se eles são comparáveis. Vamos agora apresentar dois tipos de anticadeias:

Definição 3.4.2. Seja $s = \langle t_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de elementos de T. Dizemos que s é um **pente** se s é uma anticadeia e, para todo $k < l < m \in \omega$:

$$t_k \wedge t_l = t_k \wedge t_m \text{ e } t_k \wedge t_l < t_l \wedge t_m$$

Definição 3.4.3. Seja $s = \langle t_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de elementos de T. Dizemos que s é uma **estrela** se

$$t_k \wedge t_l = t_{k'} \wedge t_{l'}$$

para todo $k, l, k', l' \in \omega$, com $k \neq l$ e $k' \neq l'$.

Proposição 3.4.4. *Dado $A \subset T$ infinito, existe $s \subset A$ infinito tal que s é uma cadeia ou s é uma anticadeia.*

Demonstração. Considere $\pi : [s]^2 \to 2$ dada por

$$\pi(\{a, b\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \text{ e } b \text{ são comparáveis} \\ 1 & \text{se } a \text{ e } b \text{ são incomparáveis} \end{cases}$$

Seja $H \subset s$ homogêneo infinito (pelo Teorema de Ramsey). Se a cor associada for 0, temos uma cadeia. Já se a cor associada for 1, temos uma anticadeia. $\square$

Lema 3.4.5. *Seja $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ uma anticadeia em T. Então existe $H \subset \omega$ infinito tal que $a_k \wedge a_l = a_k \wedge a_m$ para todo $k < l < m \in H$.*

Demonstração. Considere $\pi : [\omega]^3 \to 3$ dada por

$$\pi(\{k, l, m\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \wedge a_l < a_k \wedge a_m \\ 1 & \text{se } a_k \wedge a_l = a_k \wedge a_m \\ 2 & \text{se } a_k \wedge a_l > a_k \wedge a_m \end{cases}$$

onde $k < l < m$.

Pelo Teorema de Ramsey, temos que existe H homogêneo infinito. Vamos provar que a cor associada a ele precisa ser necessariamente 1 - vamos fazer isso mostrando que é impossível ser 0 e 2.

Suponha que a cor seja 0. Fixe $k = \min H$. Note que $\langle a_k \wedge a_l : l \in H_{\neq k} \rangle$ forma uma cadeia infinita decrescente, o que é impossível por T ser uma árvore.

Suponha que a cor seja 2. Fixe $k_0 < k_1 < k_2 < k_3 \in H$. Então, para $i = 2, 3$, temos

A última igualdade sai pela cor do trio envolvido.

$$a_{k_0} \wedge a_{k_1} \wedge a_{k_i} = (a_{k_0} \wedge a_{k_1}) \wedge (a_{k_0} \wedge a_{k_i}) = a_{k_0} \wedge a_{k_1}$$

A última passagem se dá ao fato dos dois termos estarem abaixo de a_{k_i} e, portanto, serem comparáveis.

Por outro lado,

$$a_{k_0} \wedge a_{k_1} \wedge a_{k_i} = (a_{k_0} \wedge a_{k_i}) \wedge (a_{k_1} \wedge a_{k_i}) \in \{a_{k_0} \wedge a_{k_i}, a_{k_1} \wedge a_{k_i}\}$$

para $i = 2, 3$..

Juntando as duas informações, temos que $a_{k_0} \wedge a_{k_1} \in \{a_{k_0} \wedge a_{k_i}, a_{k_1} \wedge a_{k_i}\}$ para $i = 2, 3$. Mas note que $a_{k_0} \wedge a_{k_1} = a_{k_0} \wedge a_{k_i}$ é impossível, pois isso contraria a cor de $\{k_0, k_1, k_i\}$. Assim, deveríamos ter que $a_{k_1} \wedge a_{k_2} = a_{k_1} \wedge a_{k_3}$, já que ambos são iguais a $a_{k_0} \wedge a_{k_1}$. Mas isso contraria a cor de $\{k_1, k_2, k_3\}$. □

Proposição 3.4.6. *Seja $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ uma anticadeia em T. Então ela contém um pente infinito ou uma estrela infinita.*

Demonstração. Pelo lema anterior, podemos supor que $a_k \wedge a_l = a_k \wedge a_m$ para todo $k < l < m \in \omega$.

Para todo $k \in \omega$, seja $b_k = a_k \wedge a_l$ para $l > k$ (note que não importa qual l tomamos). Note que, dados $k, l \in \omega$, b_k e b_l são comparáveis. Assim, $\langle b_k : k \in \omega \rangle$ admite uma subsequência infinita constante, uma subsequência infinita estritamente decrescente ou uma subsequência infinita estritamente crescente. Claramente, não é possível uma sequência infinita estritamente decrescente (por T ser árvore). Assim, só sobram os outros dois casos. Note que o caso da sequência constante nos dá uma estrela e o caso da sequência estritamente crescente nos dá um pente.

Corolário 3.4.7. *Dado $A \subset T$ infinito, A contém uma cadeia infinita, uma estrela infinita ou um pente infinito.*

□

Alongamento

Alongamento 3.4.8. Note que $s \wedge t \notin \{s, t\}$ se, e somente se, s e t são incomparáveis.

Capítulo 4

Filtros

Filtro é um conceito que aparece em diversas áreas matemáticas e, portanto, tem diversos tipos de aplicações. Veremos algumas neste capítulo (e outras mais tarde).

Se você já viu um ideal, você já viu um filtro disfarçado. Não vamos usar isso aqui, mas é só para deixar você mais tranquilo.

4.1 Conceitos básicos

Nesta seção vamos apresentar o conceito de filtro sobre pré-ordens. Muitas vezes, o conceito de filtro é apresentado no contexto de subconjuntos de um conjunto X. O conceito aqui é o mesmo, tomando-se os conjuntos não vazios de X com a ordem da inclusão (veja o Exemplo 4.1.3). Mas vamos já apresentar na generalidade de pré-ordens para o uso futuro que faremos com o axioma de Martin.

Definição 4.1.1. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ é um **filtro** se

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(b) se $p, q \in \mathcal{F}$, existe $r \in \mathcal{F}$ tal que $r \leq p, q$.

(c) se $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathbb{P}$ são tais que $p \leq q$, então $q \in \mathcal{F}$.

Definição 4.1.2. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ é uma **família centrada** se, para todo $a_1, ..., a_n \in \mathcal{F}$, existe $b \in \mathbb{P}$ tal que $b \leq a_i$ para todo $i = 1, ..., n$. No caso em que b pode ser tomado em $\mathcal{F}$, dizemos que $\mathcal{F}$ é centrada em si mesma.

Exemplo 4.1.3. Considere X um conjunto não vazio. Considere $\wp^*(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos não vazios de X. Considere sobre $\wp^*(X)$

a ordem da inclusão. Note que uma família $\mathcal{F}$ em $\wp^*(X)$ é centrada se, e somente se, $\mathcal{F}$ tem a propriedade da intersecção finita (veja o Exercício 4.1.12).

Proposição 4.1.4. *Seja* $(\mathbb{P}, \leq)$ *uma pré-ordem. Dada* $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ *centrada em si mesma, existe um filtro* $F \supset \mathcal{F}$.

Demonstração. Basta tomar $F = \{b \in \mathbb{P} : \text{existe } a \in \mathcal{F} \text{ tal que } a \leq b\}$. □

Corolário 4.1.5. *Se* $\mathcal{F}$ *é uma família centrada em* $\wp^*(X)$ *(com* $X \neq \emptyset$*), então existe* F *filtro tal que* $F \supset \mathcal{F}'$.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}'$ a união de $\mathcal{F}$ com todas intetersecções finitas de seus elementos. Note que tal família é centrada em si mesma e, portanto, basta aplicar o resultado anterior. □

Definição 4.1.6. Dizemos que um filtro F é um **ultrafiltro** se F é maximal (com relação à inclusão).

Exemplo 4.1.7. Seja $x \in X$. Então $u_x = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro em $\wp^*(X)$. Para ver que é filtro fica como exercício. Para a maximalidade, suponha que exista $F \supsetneq u_x$ filtro. Seja $A \in F \smallsetminus u_x$. Então, por definição de u_x, $x \notin F$. Mas note que $\{x\} \in u_x$ e, portanto, $\{x\} \in F$. Mas $A \cap \{x\} = \emptyset$, contradição.

O próximo resultado é uma generalização do exemplo anterior - e a demonstração é bem análoga:

Proposição 4.1.8. *Se* $a \in \mathbb{P}$ *é um elemento minimal, então* $u_a = \{b \in \mathbb{P} : a \leq b\}$ *é um ultrafiltro. Chamamos tal ultrafiltro de* **ultrafiltro principal**.

Proposição 4.1.9. *Todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.*

Demonstração. Basta notar que união de cadeias de filtros é um filtro e aplicar o Lema de Zorn. □

Proposição 4.1.10. *Se* X *é infinito, existe um ultrafiltro não principal em* $\wp^*(X)$.

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{A \subset X : X \smallsetminus A \text{ é finito}\}$. Note que tal família é centrada (veja o Exercício 4.1.14). Seja u ultrafiltro contendo $\mathcal{F}$. Note que para qualquer $x \in X$, temos que $X \smallsetminus \{x\} \in \mathcal{F}$ e, portanto, $X \smallsetminus \{x\} \in u$. Logo, $\{x\} \notin u$. □

Proposição 4.1.11. *Seja X um conjunto não vazio. Seja u um filtro sobre $\wp^*(X)$. São equivalentes:*

(i) u é um ultrafiltro.

(ii) se $A \subset X$, então $A \in u$ ou $(X \smallsetminus A) \in u$.

(iii) se $A \cup B \in u$, então $A \in u$ ou $B \in u$.

Demonstração. $(i \Rightarrow ii)$: Suponha que exista $B \in u$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Neste caso, $B \subset (X \smallsetminus A)$ e, portanto, $(X \smallsetminus A) \in u$. Então suponha que não exista $B \in u$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Note que então $u \cup \{A\}$ é centrada. Logo, existe $u' \supset u$ ultrafiltro contendo A (veja o Exercício 4.1.13). Mas, como u é maximal, $u' = u$ e, portanto, $A \in u$.

$(ii \Rightarrow iii)$: Sejam $A, B \subset X$ tais que $A \cup B \in u$. Suponha que $A, B \notin u$. Então $X \smallsetminus A, X \smallsetminus B \in u$. Note que

$$(X \smallsetminus A) \cap (X \smallsetminus B) = X \smallsetminus (A \cup B)$$

Mas isso contraria o fato que $A \cup B \in u$.

$(iii \Rightarrow i)$: Seja u um filtro satisfazendo (iii). Seja $u' \supset u$ filtro. Suponha que exista $A \in u' \smallsetminus u$. Note que

$$A \cup (X \smallsetminus A) = X \in u$$

Logo, $A \in u$ ou $(X \smallsetminus A) \in u$. Note que $(X \smallsetminus A) \notin u$, pois, caso contrário, teríamos $(X \smallsetminus A) \in u'$ o que contraria $A \in u'$. Logo, $A \in u$. □

Exercícios

Exercício 4.1.12. Seja $\mathcal{F} \subset \wp^*(X)$. Mostre que $\mathcal{F}$ é centrada se, e somente se, qualquer intersecção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é não vazia.

Exercício 4.1.13. Seja X não vazio. Seja $\mathcal{F} \subset \wp^*(X)$. Seja $[\mathcal{F}]$ o conjunto de todas as intersecções finitas de $\mathcal{F}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ é centrada se, e somente se, $[\mathcal{F}]$ é centrada em si mesma.

(b) Mostre que se $\mathcal{F}$ é centrada, então existe $u \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercício 4.1.14. Seja X infinito. Mostre que $\mathcal{F} = \{A \subset X : X \smallsetminus A$ é finito$\}$ é uma família centrada em $\wp^*(X)$.

Exercício 4.1.15. Seja X um conjunto e seja u um ultrafiltro em $\wp^*(X)$. Mostre que u é principal se, e somente se, existe $F \in u$ finito.

Exercício 4.1.16. Seja X um conjunto. Então $\wp^*(X)$ admite um ultrafiltro não principal se, e somente se, X é infinito.

Exercício 4.1.17. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Seja $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} : \exists V \text{ aberto tal que } x \in V \subset F\}$ é um filtro em $\wp^*(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que $\mathcal{F}$ não é um ultrafiltro.

Exercício 4.1.18. Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Considere $\tau^* = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ é aberto não vazio}\}$ com a ordem da inclusão. Seja $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F} = \{V \in \tau^* : x \in V\}$ é um filtro em τ^*.

(b) Mostre que $\mathcal{F}$ não é um ultrafiltro em τ^*.

Uma topologia sobre ultrafiltros

Sobre o conjunto de ultrafiltros existe uma topologia natural:

Definição 4.1.19. Seja X um conjunto não vazio. Vamos denotar por $Ult(X)$ o conjunto de todos os ultrafiltros sobre $\wp^*(X)$. Considere sobre $Ult(X)$ a topologia gerada pelos conjuntos da forma $a^* = \{u \in Ult(X) : a \in u\}$ para $a \subset X$.

Veja o 4.1.21 para notar que tal conjunto de fato é uma base.

Essa topologia tem algumas propriedades interessantes:

Proposição 4.1.20. *Sejam X não vazio e $a \in \wp^*(X)$. Temos:*

(a) a^* é aberto e fechado.

(b) $Ult(X)$ é de Hausdorff.

(c) $Ult(X)$ é compacto.

Demonstração. (a) Basta notar que $Ult(X) \smallsetminus a^* = (X \smallsetminus a)^*$.

(b) Sejam $u, v \in Ult(X)$ distintos. Seja $a \in u \smallsetminus v$. Note que, como $a \notin v$, $X \smallsetminus a \in v$. Assim, $u \in a^*$ e $v \in (X \smallsetminus a)^*$.

(c) Suponha que não. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura para $Ult(X)$ por abertos básicos sem subcobertura finita. Isto é, $\mathcal{A} = \{a^* : a \in \mathcal{A}'\}$ para algum $\mathcal{A}' \subset \wp(X)$. Seja $\mathcal{B} = \{X \smallsetminus a : a \in \mathcal{A}'\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é centrado. Sejam $X \smallsetminus a_1, ..., X \smallsetminus a_n \in \mathcal{B}$. Note que, como $a_1^* \cup \cdots \cup a_n^*$ não cobre $Ult(X)$, temos que existe $u \notin a_i^*$ para todo $i = 1, ..., n$. Ou seja, $X \smallsetminus a_i \in u$ para todo $i = 1, ..., n$. Como u é filtro, $(X \smallsetminus a_1) \cap \cdots \cap (X \smallsetminus a_n) \neq \emptyset$. Ou seja, a família $\mathcal{B}$ é centrada. Logo, existe $v \in Ult(X)$ tal que $v \supset \mathcal{B}$. Note que $v \notin \bigcup A$, contradição.

□

Exercícios

Exercício 4.1.21. Seja X não vazio. Mostre que $a^* \cap b^* = (a \cap b)^*$.

Exercício 4.1.22. Mostre que o conjunto do ultrafiltros principais é discreto e denso em $Ult(X)$.

4.2 Um pouco de $\beta\omega$

Nesta seção, vamos provar que $\mathcal{U}$, o espaço dos ultrafiltros sobre $\wp^*(\omega)$, é o $\beta\omega$ e aproveitar para mostrar alguns resultados sobre $\beta\omega$.

Proposição 4.2.1. *$\mathcal{U}$ é homeomorfo a $\beta\omega$.*

Demonstração. Lembrando, só precisamos mostrar que $\overline{\omega} = \mathcal{U}$ e que $\mathcal{U}$ tem a propriedade da extensão de funções contínuas como na Definição 3.2.4. Tecnicamente, $\omega \not\subset \mathcal{U}$. Mas note que $N = \{u_n : n \in \omega\}$ onde u_n é o ultrafiltro principal contendo $\{n\}$ é homeomorfo a ω (veja o Exercício 4.2.8). Seja a^* um aberto básico de $\mathcal{U}$. Seja $n \in a$. Note que, então $a \in u_n$, isto é, $u_n \in a^*$ e, portanto, $\overline{N} = \mathcal{U}$ como queríamos.

Seja $f : \omega \longrightarrow [0,1]$. Seja $u \in \mathcal{U}$. Para cada $a \in u$, seja

Note que qualquer função $f : \omega \longrightarrow [0,1]$ é contínua.

$$F_a = \overline{\{f(n) : n \in a\}}$$

Note que, como u é centrado, F_a também é. Como $[0,1]$ é compacto e cada F_a é fechado, temos que $\bigcap_{a \in u} F_a \neq \emptyset$. Vejamos que tal conjunto é unitário. Suponha que não. Sejam $x, y \in \bigcap_{a \in u} F_a$ distintos. Sejam A, B abertos disjuntos de $[0,1]$ tais que $x \in A$ e $y \in B$. Note que, então, para cada $a \in u$, temos que $A \cap \{f(n) : n \in a\} \neq \emptyset$. Isto é, $f^{-1}[A] \cap a \neq \emptyset$. Como u é ultrafiltro, isso implica que $f^{-1}[A] \in u$. Mas um argumento análogo prova que $f^{-1}[B] \in u$, o que é uma contradição. Desta forma, podemos definir $\tilde{f}(u) = x$, onde $\{x\} = \bigcap_{a \in u} F_a$. Note que $\tilde{f}$ é uma extensão contínua de f (veja Exercício 4.2.9). □

Note que esta demonstração serve para mostrar que qualquer função $f : \omega \longrightarrow K$, onde K é compacto Hausdorff, pode ser estendida. Esse é um resultado geral sobre βX.

Antes de mostrarmos o próximo resultado sobre $\beta\omega$, vamos provar alguns resultados sobre espaços separáveis:

Proposição 4.2.2. *O espaço ω^I onde $|I| \leq \mathfrak{c}$ é separável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $I \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{]p, q[\cap I : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Considere $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}_1$ com exatamente n elementos e que tais elementos sejam disjuntos. Note que cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável. Para cada $\{I_1, ..., I_n\} \in \mathcal{B}_n$ e cada $a_1, ..., a_n \in \omega$, seja $f_{I_1,...,I_n}^{a_1,...,a_n} : I \longrightarrow \omega$ dada por

$$f_{I_1,...,I_n}^{a_1,...,a_n}(x) = \begin{cases} a_i & \text{se } x \in I_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de tais funções. Note que $\mathcal{F}$ é enumerável e é denso em ω^I. □

Veremos que $\mathfrak{c}$ é o melhor que se pode pedir na Proposição 7.2.4.

Proposição 4.2.3. *Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$, com $\kappa \leq \mathfrak{c}$, família de espaços separáveis. Então $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é separável.*

Demonstração. Para cada $\xi < \kappa$, seja $D_\xi \subset X_\xi$ denso enumerável. Note que $\prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ é denso em $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$. Note também que existe $f : \prod_{\xi<\kappa} \omega \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ contínua e sobrejetora. Como $\prod_{\xi<\kappa} \omega$ é separável, então $\prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ é separável e, portanto, $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é separável. □

Com o resultado anterior, podemos calcular o tamanho de $\beta\omega$:

Proposição 4.2.4. $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demonstração. Cada $u \in \mathcal{U}$ é tal que $u \subset \wp^*(\omega)$. Logo, temos que $\mathcal{U} \subset \wp^*(\wp^*(\omega))$ e, portanto, já temos que $|\beta\omega| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Note que $|\mathcal{C}| = |[0,1]^\omega| = (2^\omega)^\omega = 2^\omega$.

Por outro lado, considere $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções de ω em $[0, 1]$. Note que $[0, 1]^{\mathcal{C}}$ é separável pelo resultado anterior e é compacto. Assim, seja $D \subset [0, 1]^{\mathcal{C}}$ denso enumerável e seja $f : \omega \longrightarrow D$ bijeção. Pelo comentário acima, existe $\tilde{f} : \beta\omega \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}}$ extensão contínua. Como a imagem de $\tilde{f}$ é fechada e contém D, temos que $\tilde{f}$ é sobrejetora. Logo, $2^{\mathfrak{c}} = |[0, 1]^{\mathcal{C}}| \leq |\beta\omega|$ com queríamos. □

Proposição 4.2.5. *Seja $F \subset \beta\omega$ fechado infinito. Então F contém um subespaço homeomorfo a $\beta\omega$.*

Veja exercício 4.2.10.

Demonstração. Note que podemos construir famílias $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ onde

- $a_n \in V_n \cap F$ para todo $n \in \omega$.

- V_n é aberto.
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note que $A = \{a_n : n \in \omega\}$ é homeomorfo a ω (já que é discreto). Seja $g : A \longrightarrow [0,1]$. Considere $G : \omega \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$G(n) = \begin{cases} g(a_k) & \text{se } n \in V_k \cap \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\tilde{G} : \beta\omega \longrightarrow [0,1]$ extensão contínua de G. Dado $a_k \in A$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}(a_k) & \in & \tilde{G}[V_k] \\ & \subset & \tilde{G}[\overline{V_k}] \\ & = & \tilde{G}[\overline{V_k \cap \omega}] \\ & = & \overline{\tilde{G}[V_k \cap w]} \\ & = & \{g(a_k)\} \end{array}$$

Logo, $\tilde{G}$ é uma extensão contínua para g para $\beta\omega$ todo e, em particular, para $\overline{A}$. Logo, como $\overline{A}$ é compacto, temos que $\overline{A}$ é homeorfo a $\beta\omega$. Como $\overline{A} \subset F$, temos o resultado. $\square$

Corolário 4.2.6. *Seja $F \subset \beta\omega$ fechado infinito. Então $|F| = |\beta\omega|$.*

O corolário acima nos dá facilmente a seguinte aplicação:

Corolário 4.2.7. *$\beta\omega$ é um compacto onde nenhuma sequência não trivial é convergente.*

Demonstração. Uma sequência convergente não trivial seria um subconjunto fechado, infinito e enumerável. $\square$

Exercícios

Exercício 4.2.8. Mostre que $N = \{u_n : n \in \omega\}$ onde cada u_n é o ultrafiltro principal contendo n é homeomorfo a ω.

Exercício 4.2.9. Seja $\tilde{f}$ definida em 4.2.1. Mostre que $\tilde{f}$ é contínua e que, para cada $n \in \omega$, $\tilde{f}(u_n) = f(n)$.

Exercício 4.2.10. Seja F compacto infinito e de Hausdorff.

(a) Note que existe $x \in F$ ponto de acumulação de F.

(b) Existe $y \in F$ distinto de x e existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

(c) Mostre que existem $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ onde cada $a_n \in V_n$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ são abertos dois a dois disjuntos.

Exercício 4.2.11. Mostre que se X é um compacto separável de Hausdorff, então $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

4.3 Algumas aplicações coloridas

Nesta seção, vamos considerar sempre a ordem $\mathcal{U}$ como o conjunto dos ultrafiltros sobre $\wp^*(\mathbb{N}_{>0})$.

É, essa definição não é das mais agradáveis. Mas não se preocupe, vamos usar bem poucas vezes ela diretamente.

Definição 4.3.1. Considere $\oplus$ definida sobre $\mathcal{U}$ por

$$u \oplus v = \{A \subset \mathbb{N}_{>0} : \{k \in \mathbb{N}_{>0} : A - k \in u\} \in v\}$$

onde $A - k = \{a - k : a \in A\} \cap \mathbb{N}_{>0}$. Note que $u \oplus v \in \mathcal{U}$ se $u, v \in \mathcal{U}$ (Exercício 4.3.7).

Definição 4.3.2. $u \in \mathcal{U}$ é dito **idempotente** se $u \oplus u = u$.

Note que, pelo Exercício 4.3.8, nenhum ultrafiltro principal de $\mathcal{U}$ é idempotente.

Proposição 4.3.3. *Existe $u \in \mathcal{U}$ idempotente.*

Por $A \oplus A$ denotamos o conjunto $\{u \oplus v : u, v \in A\}$.

Use o Lema de Zorn com a ordem reversa.

Por $u \oplus B$ denotamos o conjunto $\{u \oplus b : b \in B\}$.

Demonstração. Considere $\mathcal{A} = \{A \subset \mathcal{U} : A \neq \emptyset$, A é fechado e $A \oplus A \subset A\}$. Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ já que $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Note também que, como cada elemento de $\mathcal{A}$ é fechado e $\mathcal{U}$ é compacto, temos que toda cadeia decrescente de elementos de $\mathcal{A}$ tem intersecção não vazia e, portanto, também pertence a $\mathcal{A}$. Logo, pelo Lema de Zorn, existe um elemento minimal $B \in \mathcal{A}$. Vamos provar que todo elemento de B é idempotente. Como $B \neq \emptyset$, isso implica o resultado.

Seja $u \in B$. Note que $u \oplus B \subset B$ e que $u \oplus B$ é fechado (já que é imagem contínua de um compacto - veja o Exercício 4.3.9). Pela minimalidade, temos que $u \oplus B = B$. Como u pertence aos conjuntos dos dois lados da equação, temos que existe $v \in B$ tal que $u \oplus v = u$. Seja

$$B_u = \{v \in B : u \oplus v = u\}$$

Note que, dados $v, w \in B_u$, temos que $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus w = u$.

Note que $B_u \neq \emptyset$, B_u é fechado (por continuidade, veja o Exercício 4.3.9) e, finalmente, que $B_u \oplus B_u \subset B_u$. Logo, $B_u \in \mathcal{A}$. Como $B_u \subset B$ e B é minimal, obtemos que $B_u = B$. Ou seja, $u \in B_u$ e, portanto, $u \oplus u = u$. $\square$

Corolário 4.3.4 (Teorema de Hindman). *Seja $\pi : \mathbb{N}_{>0} \longrightarrow r$ uma coloração ($r \in \omega$). Então existe $X \subset \mathbb{N}_{>0}$ infinito tal que $\sum_X = \{\sum_{i=1}^n x_i : x_1, ..., x_n \in X, x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$ é monocromático.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{U}$ idempotente. Para cada $A \in u$, seja

$$A^* = \{k \in \mathbb{N}_{>0} : A - k \in u\}$$

Note que, como $A \in u$, temos que $A \in u \oplus u$. Pela definição de $u \oplus u$, temos que $A^* \in u$. Assim, temos que $A \cap A^* \in u$ e, portanto, $A \cap A^*$ é infinito (já que u é não principal - veja o Exercício 4.3.10).

Seja $A \in u$. Vamos provar que existe X infinito tal que $\sum_X \subset A$. Sejam $A_0 = A$ e $k_0 \in A_0 \cap A_0^*$. Defina $A_1 = (A_0 - k_0) \cap A_0$. Por construção, $A_0 - k_0 \in u$ e, portanto, $A_1 \in u$. Logo, podemos escolher $k_1 \in A_1 \cap A_1^*$ e podemos ainda tomar $k_1 > k_0$. Ou seja, procedemos fazendo:

- $A_{n+1} = (A_n - k_n) \cap A_n$;
- $k_{n+1} \in A_{n+1} \cap A_{n+1}^*$ com $k_{n+1} > k_n$.

Seja $X = \{k_n : n \in \omega\}$. Note que X é infinito. Note que, dados $k_{j_1} < ... < k_{j_n}$, temos que $\sum_{i=1}^n k_{j_i} \in A_{j_1} \subset A$.

Por exemplo, suponha que tomamos k_1 e k_3. Então, como $A_3 \subset A_2$ e $A_2 = A_1 - k_1$, temos que $k_3 \in A_1 - k_1$. Ou seja, $k_1 + k_3 \in A_1$.

Ou seja, qualquer elemento de u contém um conjunto da forma $\sum_X$ para algum X infinito. Assim, para terminarmos o resultado, basta encontrarmos um elemento de u que seja monocromático. Note que $\mathbb{N}_{>0} = \pi^{-1}(0) \cup \cdots \cup \pi^{-1}(r-1)$ e que tal união é disjunta. Logo, pelo menos um destes conjuntos pertence a u (veja Exercício 4.3.11). Claramente, tal conjunto é monocromático. $\square$

Por outro lado, note que existe uma coloração tal que não existe um subconjunto infinito monocromático que seja fechado para a soma (ver o Exercício 4.3.13).

Vejamos mais uma relação entre colorações e ultrafiltros:

Proposição 4.3.5. *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{G} \subset \wp^*(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Para toda coloração finita sobre X, existe $G \in \mathcal{G}$ monocromático.

(b) Existe um ultrafiltro u sobre $\wp^*(X)$ tal que, para todo $F \in u$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subset F$.

Demonstração. $a \Rightarrow b$) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \cap G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{G}\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é centrada. Sejam $F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$. Para cada $S \subset \{1, ..., n\}$, defina

$$C_S = \bigcap_{i \in S} F_i \cap \bigcap_{i \notin S} (X \smallsetminus F_i)$$

Note que $(C_S)_{S \subset \{1,...,n\}}$ forma uma partição sobre X (alguns dos elementos podem ser vazios, mas isso não é problema). Considere a seguinte coloração $\pi : X \longrightarrow \wp(\{1, ..., n\})$ dada por $\pi(x) = S$ se $x \in C_S$. Por (a), existe $G \in \mathcal{G}$ monocromático. Isto é, existe $S \subset \{1, ..., n\}$ tal que $G \subset C_S$. Ou seja,

Outro abuso aqui. Formalmente, seria uma coloração com 2^n cores.

$$G \subset \bigcap_{i \in S} F_i \cap \bigcap_{i \notin S} (X \smallsetminus F_i).$$

Mas, como $G \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, temos que obrigatoriamente $S = \{1, ..., n\}$. Ou seja, $G \subset \bigcap_{i=1}^n F_i$ e, em particular, $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

Seja u ultrafiltro tal que $u \supset [\mathcal{F}]$. Seja $F \in u$. Como $(X \smallsetminus F) \notin u$, temos que $(X \smallsetminus F) \notin \mathcal{F}$. Logo, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \cap (X \smallsetminus F) = \emptyset$. Ou seja, $G \subset F$ como queríamos.

$b \Rightarrow a$) Seja u ultrafiltro como em b. Seja π uma coloração finita sobre X. Então existe um subconjunto monocromático $F \in u$ (ver Exercício 4.3.11). Logo, qualquer $G \in \mathcal{G}$ com $G \subset F$ (dado por (b)) é monocromático.

□

Exercícios

Exercício 4.3.6. Mostre que $\oplus$ é associativa.

Exercício 4.3.7. Mostre que, de fato, $u \oplus v \in \mathcal{U}$ se $u, v \in \mathcal{U}$.

Exercício 4.3.8. Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, considere $u_n = \{A \subset \mathbb{N}_{>0} : n \in A\}$. Mostre que $u_a \oplus u_b = u_{a+b}$ para todo $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$.

Exercício 4.3.9. Seja $u \in \mathcal{U}$. Mostre que $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ dada por $f(v) = u \oplus v$ é contínua.

Exercício 4.3.10. Seja X um conjunto e seja u ultrafiltro sobre $\wp^*(X)$. Mostre que u é principal se, e somente se, u contém algum conjunto finito.

Exercício 4.3.11. Sejam X um conjunto e u ultrafiltro sobre $\wp^*(X)$. Se $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então existe i tal que $A_i \in u$.

Exercício 4.3.12. Este é um roteiro para mostrar que a definição de $\oplus$ é natural em algum sentido. Considere $\mathbb{N}_{>0}$ sempre com a topologia discreta. Note que, então, $\mathbb{N}_{>0}$ e ω são homeomorfos e, portanto, $\beta(\mathbb{N}_{>0})$ pode ser visto como o conjunto de ultrafiltros sobre $\mathbb{N}_{>0}$.

(a) Fixe $a \in \mathbb{N}_{>0}$. Note que a função $f_a(b) = a + b$ é contínua. Logo, existe $\tilde{f}_a : \beta(\mathbb{N}_{>0}) \to \beta(\mathbb{N}_{>0})$ extensão contínua de f_a.

(b) Fixado $a \in \mathbb{N}_{>0}$, note que $a \oplus v = \{A + a : A \in v\}$. Aqui estamos identificando a com o ultrafiltro principal que contém $\{a\}$.

(c) Mostre que $a \oplus v : \beta(\mathbb{N}_{>0}) \to \beta(\mathbb{N}_{>0})$ é contínua para a fixado.

(d) Dado $a \in \mathbb{N}_{>0}$, conclua que $f_a(v) = a \oplus v$ para todo $v \in \beta(\mathbb{N}_{>0})$.

(e) Fixado $v \in \beta(\mathbb{N}_{>0})$, note que $g_v : \mathbb{N}_{>0} \to \beta(\mathbb{N}_{>0})$ dada por $g_v(a) = f_a(v)$ é contínua. Logo existe $\tilde{g}_v : \beta(\mathbb{N}_{>0}) \to \beta(\mathbb{N}_{>0})$ extensão contínua.

(f) Como $u \oplus v$ é contínua para v fixado, conclua que $u \oplus v = \tilde{g}_v(u)$.

Exercício 4.3.13. Mostre que existe uma r-coloração sobre ω tal que não existe subconjunto infinito monocromático que seja fechado para a soma.

Parte II

Além de ZFC

Capítulo 5

A hipótese do contínuo

Como comentamos anteriormente, a hipótese do contínuo (que denotaremos por CH)

$$2^\omega = \omega_1$$

é uma afirmação independente dos axiomas de ZFC. Isso quer dizer que, se supomos CH (ou sua negação), só vamos nos deparar com uma contradição se já existia uma contradição antes de supor CH (ou sua negação). Com isso, temos um tipo de técnica de prova de consistência que vamos usar nas próximas sessões. Vamos explicar tal técnica com o exemplo específico de CH, mas isso vale para qualquer outra afirmação independente. Suponha que provamos uma afirmação P usando CH. Isso automaticamente nos dá que a negação de P não pode ser provada em ZFC . De fato, se ZFC prova $\neg P$, então ZFC + CH também prova $\neg P$. Logo, ZFC + CH prova tanto P quanto $\neg P$ - ou seja, ao supor CH obtemos uma contradição.

Veremos adiante outras formas.

Aqui estamos supondo tacitamente que ZFC não prova contradições.

Vamos agora a algumas aplicações de CH. Vamos começar com uma aparente contradição com o Teorema de Fubini:

Para mais sobre CH, veja [12].

Proposição 5.0.1. *(CH) Existe $X \subset [0,1] \times [0,1]$ tal que, se h é uma reta paralela ao eixo x, então $h \cap X$ é enumerável e, se v é uma reta paralela ao eixo y, então $v \smallsetminus X$ é enumerável.*

Demonstração. Por CH, podemos escrever $[0,1] = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$. Defina

$$X = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha \leq \beta\}.$$

Seja $h = \{(x, x_\beta) : x \in [0,1]\}$ como no enunciado. Note que

$$h \cap X = \{(x_\xi, x_\beta) : \xi \leq \beta\}.$$

Ou seja, tal conjunto é enumerável pois $\beta < \omega_1$. Seja $v = \{(x_\alpha, y) : y \in [0,1]\}$ como no enunciado. Note que

$$v \cap X = \{(x_\alpha, x_\xi) : \xi > \alpha\}.$$

Note que tal conjunto tem complementar enumerável na reta. □

Corolário 5.0.2. *(CH) Existe $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ tal que*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 0 \ \ e \ \ \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = 1.$$

Demonstração. Considere $f = \chi_X$ onde X é o conjunto do resultado anterior. Note que, fixando um y_0, temos que $f(x, y_0)$ só não é 0 num conjunto enumerável e, portanto, tem integral 0. Por outro lado, fixando x_0, temos que $f(x_0, y)$ só não é 1 num conjunto enumerável e, portanto, tem integral igual a 1. □

Note que o Teorema de Fubini atesta que, se as duas iterações existem e a integral dupla também, então os 3 valores são iguais. Mas é consistente com ZFC que, se as duas iterações existem, então o valor de ambas é igual (ver [5]).

Esta afrmação é conhecida como **Axioma de simetria de Freiling**.

Proposição 5.0.3. *A afirmação "Para toda $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leq\omega}$, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$" é equivalente à negação da hipótese do contínuo.*

Demonstração. Suponha que vale CH. Seja $\mathbb{R} = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$. Considere

$$f(x_\alpha) = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}.$$

Vamos provar que tal f contraria a afirmação do enunciado. Suponha que existam x_ξ e x_η como no enunciado. Então, como $x_\xi \notin f(x_\eta)$, temos que $\eta > \xi$. Por outro lado, como $x_\eta \notin f(x_\xi)$, temos que $\xi > \eta$, contradição.

Agora suponha que não vale CH. Seja f como no enunciado. Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que $|X| = \omega_1$. Seja

$$Y = \bigcup_{x \in X} f(x).$$

Note que $|Y| = \omega_1$. Assim, existe $y \in \mathbb{R} \setminus Y$. Como $f(y)$ é enumerável, existe $x \in X \setminus f(y)$. Como $x \in X$, temos que $y \notin f(x)$ e, portanto, temos o resultado. □

Definição 5.0.4. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é **nunca denso** se o interior de seu fecho é vazio. Dizemos que X é **magro** se X é união enumerável de conjuntos nunca densos.

Um nome comum para esses conjuntos é **raro**.

O teorema de Baire garante que a reta real não é magra (talvez ajude notar um conjunto é nunca denso se, e somente se, seu complementar contém um aberto denso).

Definição 5.0.5. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um **conjunto de Luzin** se X é não enumerável e $X \cap N$ é enumerável para todo N nunca denso.

Proposição 5.0.6. *(CH) Existe um conjunto de Luzin.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} : F$ é um fechado de interior vazio$\}$. Como $\mathbb{R}$ tem base enumerável, temos que exitem 2^ω abertos e, portanto, 2^ω fechados em $\mathbb{R}$. Assim, por CH, podemos escrever $\mathcal{F} = \{F_\xi : \xi < \omega_1\}$.

Para cada $\alpha < \omega_1$, considere

$$x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \bigcup_{\beta \leq \alpha} F_\beta).$$

Note que podemos tomar tal x_α já que $\mathbb{R}$ é de Baire. Vamos provar que $L = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é o conjunto desejado. Seja N conjunto nunca denso. Note que $\overline{N}$ também é nunca denso. Assim, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\overline{N} = F_\alpha$. Assim,

$$N \cap L \subset \overline{N} \cap L \subset \{x_\beta : \beta < \alpha\}$$

e, portanto, tal intersecção é enumerável. □

Claramente L é não enumerável, já que os x_α's são todos distintos.

Vamos terminar essa seção apresentando mais uma equivalência de CH, desta vez em termos de famílias de funções analíticas.

Essa equivalência foi apresentada em [4].

Definição 5.0.7. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções analíticas. Dizemos que $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade P_0 se, para cada $z \in \mathbb{C}$, o conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ é enumerável.

Lema 5.0.8. *Se não vale CH, então toda família $\mathcal{F}$ satisfazendo P_0 é enumerável.*

Demonstração. Suponha que não e seja $\mathcal{F}$ não enumerável satisfazendo P_0. Seja $\mathcal{G} = \{f_\xi : \xi < \omega_1\} \subset \mathcal{F}$. Vamos encontrar $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\{f_\xi(z_0) : \xi < \omega_1\}$ seja não enumerável. Para cada $\alpha, \beta \in \omega_1$, considere

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}.$$

Note que cada $S(\alpha,\beta)$ é enumerável: caso contrário, $S(\alpha,\beta)$ teria um ponto de acumulação e, portanto, $f_\alpha = f_\beta$. Seja $S = \bigcup_{\alpha,\beta<\omega_1} S(\alpha,\beta)$. Note que $|S| \leq \omega_1$. Assim, existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$. Para cada $\alpha, \beta \in \omega_1$, temos que $f_\alpha(z_0) \neq f_\beta(z_0)$. Assim, $\{f_\xi(z_0) : \xi < \omega_1\}$ é não enumerável como queríamos. □

Duas funções analíticas distintas só são iguais num conjunto discreto fechado.

Lema 5.0.9. *Se vale CH, então existe uma família não enumerável satisfazendo P_0.*

Demonstração. Por CH, podemos escrever $\mathbb{C} = \{z_\xi : \xi < \omega_1\}$. Seja $D \subset \mathbb{C}$ denso enumerável. Vamos construir indutivamente uma família $(f_\xi)_{\xi<\omega_1}$ de funções analíticas de forma que

$$f_\beta(z_\alpha) \in D$$

se $\alpha < \beta$. Suponha já construídas $(f_\beta)_{\beta<\gamma}$ para $\gamma < \omega_1$. Sejam $(g_n)_{n\in\omega}$ e $(w_n)_{n\in\omega}$ re-enumerações para $(f_\beta)_{\beta<\gamma}$ e $(z_\beta)_{\beta<\gamma}$ respectivamente. Vamos definir f_γ de forma que, para todo $n \in \omega$:

$$f_\gamma(w_n) \in D \text{ e } f_\gamma(w_n) \neq g_n(\omega_n)$$

Escreva

$$f_\gamma(z) = \varepsilon_0 + \sum_{n\in\omega} \varepsilon_n \prod_{i=1}^{n} (z - w_i)$$

Note que podemos escolher $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ de forma que a condição acima seja satisfeita.

Vejamos que $(f_\gamma)_{\gamma<\omega_1}$ satisfaz o que queremos. Primeiramente, note que elas são todas distintas. Vejamos que tal família satisfaz P_0. De fato, seja $z = z_\alpha$. Se $\beta > \alpha$, temos que $f_\beta(z_\alpha) \in D$, que é enumerável. Como só existem enumeráveis $\beta \leq \alpha$, temos o resultado. □

Com os dois últimos lemas, obtemos:

Teorema 5.0.10 (Erdös)**.** *A negação de CH é equivalente a "todas família satisfazendo P_0 é enumerável".*

Exercícios

Exercício 5.0.11. Mostre que sob CH, existe uma cadeia de conjuntos de medida nula cuja união é a reta real.

Capítulo 6

Axioma de Martin

6.1 Definição e resultados básicos

Nesta seção, vamos apresentar mais uma afirmação independente de ZFC. Para isso, precisamos de algumas definições:

Definição 6.1.1. Dada $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem, temos que $p, q \in \mathbb{P}$ são **incompatíveis** se não existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$ (notação, $p \perp q$).

Quando trabalhamos neste contexto, muitas vezes lê-se $p \leq q$ como p estende q ou p é mais forte que q. Isso deve ficar mais claro com os exemplos.

Definição 6.1.2. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $A \subset \mathbb{P}$ é uma **anticadeia** se para todos $p, q \in A$ distintos, temos que $p \perp q$. Dizemos que $\mathbb{P}$ satisfaz **ccc** (*countable chain condition*) se não existe $A \subset \mathbb{P}$ anticadeia não enumerável.

Sim, fica assim meio estranho por motivos históricos.

Definição 6.1.3. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é **denso** se, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.

Definição 6.1.4. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ uma família de densos de $\mathbb{P}$. Dizemos que um filtro F sobre $\mathbb{P}$ é **$\mathcal{D}$-genérico** se, para todo $D \in \mathcal{D}$, temos $F \cap D \neq \emptyset$.

Definição 6.1.5. Seja κ cardinal infinito. Denotamos por MA_κ a afirmação "para toda ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ ccc e toda família $\mathcal{D}$ de densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe G filtro sobre $\mathbb{P}$ $\mathcal{D}$-genérico.

Se $\mathcal{D}$ é uma família enumerável de densos, existe G $\mathcal{D}$-genérico (Exercicio 6.1.11). Desta forma, MA_ω vale trivialmente (nem precisamos da hipótese ccc.).

Definição 6.1.6. Chamamos de **axioma de Martin** (MA) a afirmação: "para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$ vale MA_κ".

Ou seja, trivialmente, temos:

Proposição 6.1.7. *$CH \Rightarrow MA$.*

Note que a nomenclatura de ser incompatível aqui fica bem natural.

Definição 6.1.8. Sejam X e Y conjuntos. Chamamos de $Fn(X, Y)$ o conjunto das funções finitas cujo domínio está contido em X e imagem em Y. Vamos denotar $f \leq g$ quando $f \supset g$.

Lema 6.1.9. *Sejam X, Y conjuntos com X infinito e $|Y| \geq 2$. Sejam $x \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ função. Então os conjuntos*

$$D_x = \{p \in Fn(X, Y) : x \in dom(p)\}$$

$$E_f = \{p \in Fn(X, Y) : \exists a \in dom(p)\ p(a) \neq f(a)\}$$

são densos em $Fn(X, Y)$.

Demonstração. Seja $p \in Fn(X, Y)$. Seja $x \in X$. Se $x \in \mathrm{dom}(p)$, temos que $p \in D_x$. Caso contrário, $q = p \cup \{(x, y)\}$ onde $y \in Y$ é tal que $q \in D_x$ e $q \leq p$.

Seja $f \in Y^X$. Seja $x \in X \smallsetminus \mathrm{dom}(p)$. Seja $y \in Y$ com $y \neq f(x)$. Note que $q = p \cup \{(x, y)\}$ é tal que $q \in E_f$ e $q \leq p$. $\square$

Proposição 6.1.10. *Não vale $MA_{2^{\aleph_0}}$.*

Demonstração. Note que $Fn(\omega, 2)$ é ccc, já que é enumerável. Suponha que vale $MA_{2^{\aleph_0}}$. Então existe G filtro sobre $Fn(\omega, 2)$ filtro $\mathcal{D}$-genérico, onde, seguindo a notação do resultado anterior,

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in 2^\omega\}.$$

Seja $g = \bigcup G$. Note que g é uma função (veja Exercício 6.1.12). Seja $n \in \omega$. Como $G \cap D_n \neq \emptyset$, temos que $n \in \mathrm{dom}(g)$. Assim, $g \in 2^\omega$. Mas, dada $f \in 2^\omega$, como $G \cap E_g \neq \emptyset$, temos que $g \neq f$, contradição. $\square$

Exercícios

Exercício 6.1.11. Seja $(P, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ família enumerável de densos. Então existe G $\mathcal{D}$-genérico.

Exercício 6.1.12. Seja F filtro sobre $Fn(X, Y)$. Mostre que $\bigcup F$ é uma função.

6.2 Uma aplicação lúdica

Nesta seção, vamos trabalhar com o seguinte jogo topológico:

Definição 6.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Chamamos de **jogo de Rothberger** o seguinte jogo entre os jogadores ALICE e BETO. A cada rodada $n \in \omega$, ALICE escolhe $\mathcal{C}_n$ cobertura aberta para X. Depois, BETO escolhe $C_n \in \mathcal{C}_n$. No final, BETO é declarado o vencedor se $\bigcup_{n\in\omega} C_n$ é uma cobertura para X.

Definição 6.2.2. Dizemos que um espaço X é um **espaço de Rothberger** se ALICE não tem uma estratégia vencedora para o jogo de Rothberger.

A definição clássica desta propriedade não é esta, mas essa formulação é equivalente - num resultado bastante não trivial devido a Pawlikowski [11].

Note que todo espaço enumerável é de Rothberger e que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf (veja o Exercício 6.2.6).

Proposição 6.2.3. *O espaço 2^ω é um compacto que não é de Rothberger.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe uma estratégia vencedora para ALICE. A cada rodada n, considere a cobertura $\mathcal{C}_n = \{C_n^0, C_n^1\}$, onde

$$C_n^i = \{f \in 2^\omega : f(n) = i\}$$

Note que, de fato, cada C_n^i é um aberto e que $\mathcal{C}_n$ é uma cobertura. Considere uma partida em que ALICE jogou sempre $\mathcal{C}_n$ em cada rodada n. Seja $f \in 2^\omega$ tal que, a cada rodada n, a escolha de BETO foi $C_n^{f(n)}$. Defina $g \in 2^\omega$ tal que $g(n) = 0$ se $f(n) = 1$ e $g(n) = 1$ se $f(n) = 0$. Note que $g \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n^{f(n)}$ e, portanto, ALICE venceu a partida. □

Proposição 6.2.4. *(MA) Se X é de Lindelöf e $|X| < 2^{\aleph_0}$, então X é de Rothberger.*

Indicamos por (MA) que tal resultado vale na presença do axioma de Martin.

Demonstração. Seja σ uma estratégia para ALICE. Note que, como o espaço é de Lindelöf, podemos supor que toda cobertura dada por σ é enumerável. Assim, considere $\{C_n : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ na rodada 0. Dado $k \in \omega$, considere $\{C_{k^\frown n} : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ caso BETO escolha C_k. De forma geral, dado $s \in \omega^{<\omega}$, $\{C_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ é a cobertura dada por σ se ALICE escolheu C_s na rodada anterior.

Considere $\mathbb{P} = \{C_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ com a seguinte ordem: $C_s \leq C_t$ se $t \subset s$. Note que $\mathbb{P}$ é enumerável e, portanto, ccc. Seja $x \in X$. Considere

$$D_x = \{C_s : x \in C_s\}$$

Note que, uma vez que $\{C_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ é uma cobertura para todo $s \in \omega^{<\omega}$, D_x é denso. Como $|X| < 2^{\aleph_0}$, temos que existe F filtro $(D_x)_{x \in X}$-genérico. Note que os elementos de tal filtro formam uma partida em que Beto vence o jogo de Rothberger e Alice segue σ. Ou seja, σ não é uma estratégia vencedora. □

Com os dois últimos resultados, obtemos o seguinte resultado de independência:

CH nos dá que 2^ω é um contraexemplo e MA_{ω_1} implica que o resultado é verdadeiro.

Corolário 6.2.5. *A afirmação "Todo espaço de Lindelöf com cardinalidade $\aleph_1$ é de Rothberger" é independente de ZFC.*

Exercícios

Exercício 6.2.6. Mostre que todo espaço enumerável é de Rothberger. Mostre que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf.

Exercício 6.2.7. Mostre que $\mathbb{R}$ não é de Rothberger.

Exercício 6.2.8. Considere o seguinte jogo entre os Alice e Beto. A cada rodada $n \in \omega$, Alice escolhe D_n um denso sobre X. Então, Beto escolhe $d_n \in D_n$. Ao final, Beto é o vencedor se $\{d_n : n \in \omega\}$ é denso.

(a) Mostre que se X tem base enumerável, então Beto tem estratégia vencedora.

Um espaço é dito **hereditariamente separável** se todo subespaço seu é separável.

(b) (MA) Mostre que se X é hereditariamente separável e X tem uma base $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}| < 2^{\aleph_0}$, então Alice não tem estratégia vencedora.

6.3 A volta dos pequenos cardinais

A intuição aqui é a seguinte: s tenta aproximar uma função de ω em ω, enquanto F "promete" que determinadas funções da família fixada ficarão por baixo da função sendo construída.

Nesta seção vamos trabalhar com a seguinte ordem $(\mathbb{P}, \leq)$: $\mathbb{P} = \omega^{<\omega} \times [\lambda]^{<\omega}$, onde $\lambda < 2^{\aleph_0}$. Diremos que $(s, F) \leq (t, G)$ se

$$s \supset t,\ F \supset G \text{ e } \forall \alpha \in G\ \forall n \in \operatorname{dom}(s) \setminus \operatorname{dom}(t)\ s(n) > f_\alpha(n)$$

onde $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ é uma família de funções fixada, com cada $f_\alpha \in \omega^\omega$. Note que, para cada $\alpha \in \lambda$ e cada $n \in \omega$,

$$D_\alpha = \{(s, F) : \alpha \in F\}$$

$$E_n = \{(s, F) : n \in \operatorname{dom}(s)\}$$

são densos em $\mathbb{P}$. Denote por $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \lambda\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$.

Exemplo 6.3.1. Considere $s = \{(0,0),(1,0),(2,4),(3,7)\}$, $t = \{(0,0),(1,0),(2,4)\}$ e $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \lambda$. Note que $(s,F),(t,F) \in \mathbb{P}$ e temos que $(s,F) \leq (t,F)$ se, e somente se, $7 > f_{\alpha_i}(3)$ para $i = 1, ..., n$.

Proposição 6.3.2. *$(\mathbb{P}, \leq)$ é ccc.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}$ não enumerável. Como $\omega^{<\omega}$ é enumerável, existem $(s,F),(s,G) \in \mathcal{A}$ para alguma $s \in \omega^{<\omega}$. Note que $(s, F \cup G) \leq (s,F),(s,G)$ e, portanto, $\mathcal{A}$ não é uma anticadeia. $\square$

Proposição 6.3.3. *Se $\mathcal{F}$ é um filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$, então $\bigcup_{(s,F)\in\mathcal{F}} s$ é uma função $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $f_\alpha \leq^* f$ para todo $\alpha < \lambda$.*

Lembrando que $f \leq^* g$ se $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ é finito.

Demonstração. Como $\mathcal{F}$ intercepta todo E_n, temos que $f : \omega \longrightarrow \omega$. Seja $\alpha \in \lambda$ e seja $(s,F) \in \mathcal{F} \cap D_\alpha$. Vamos provar que

$$\{n \in \omega : f(n) \leq f_\alpha(n)\} \subset \mathrm{dom}(s).$$

Suponha que não. Seja $n \in \omega \smallsetminus \mathrm{dom}(s)$ tal que $f(n) \leq f_\alpha(n)$. Seja $(t,G) \in \mathcal{F} \cap E_n$. Note que $(n, f(n)) \in t$. Por compatibilidade de $\mathcal{F}$, existe $(r,H) \leq (s,F),(t,G)$. Como $(r,H) \leq (t,G)$, temos que $n \in \mathrm{dom}(r)$. Assim $n \in \mathrm{dom}(r) \smallsetminus \mathrm{dom}(s)$. Como $(r,H) \leq (s,F)$ temos que $f(n) = r(n) > f_\alpha(n)$, contradição. $\square$

Corolário 6.3.4. *Dado $\kappa < 2^{\aleph_0}$, se vale MA_κ, então $\mathfrak{b} > \kappa$.*

Demonstração. Se tomamos $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ com $\lambda \leq \kappa$, por MA_κ, podemos construir f tal que $f_\alpha \leq^* f$ para todo $\alpha < \lambda$. $\square$

Corolário 6.3.5. *O axioma de Martin implica que $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ (e, portanto, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$).*

Alongamentos

Alongamento 6.3.6. Mostre que, de fato, D_α e E_n são densos para todo $\alpha < \lambda$ e $n \in \omega$.

Alongamento 6.3.7. Note que a afirmação $\mathfrak{b} = \aleph_1$ é independente de ZFC.

Capítulo 7

A hipótese de Suslin

7.1 Uma caracterização para os reais

Nesta seção vamos apresentar uma caracterização dos reais em termos de sua ordem. Vamos começar com uma definição e depois uma caracterização auxiliar para $\mathbb{Q}$:

Definição 7.1.1. Uma ordem $\leq$ é dita uma **ordem densa** se, para todo $a < b$ existe c tal que $a < c < b$.

Sim, o termo denso se refere a muitas coisas aqui. Paciência.

Lema 7.1.2. *Seja $\{a_0, ..., a_{n+1}\}$ conjunto totalmente ordenado e seja Y um conjunto totalmente ordenado com ordem densa e sem maior nem menor elemento. Dada $f : \{a_0, ..., a_n\} \longrightarrow Y$ função injetora que preserva ordem, existe $\tilde{f} : \{a_0, ..., a_{n+1}\} \longrightarrow Y$ extensão de f que é injetora e que preserva a ordem.*

Demonstração. Note que só precisamos definir $\tilde{f}(a_{n+1})$ de forma a preservar a ordem. Temos três casos. Caso 1, $a_{n+1} < a_k$ para todo $k \leq n$; caso 2, $a_{n+1} > a_k$ para todo $k \leq n$; caso 3, existem $i, j \leq n$ tais que $a_i < a_{n+1}$ e $a_{n+1} < a_j$. Vamos resolver o caso 3, os outros são análogos. Seja $E = \max\{a_i : a_i < a_{n+1}, i \leq n\}$ e $D = \min\{a_j : a_{n+1} < a_j, j \leq n\}$. Note que, como a ordem de Y é densa, existe $y \in]f(E), f(D)[$. Defina $\tilde{f}(a_{n+1}) = y$. $\square$

Note que no caso 3 usamos que Y tem ordem densa. Faça um rascunho para perceber que a não existência de máximo e mínimo são usados nos outros dois casos.

Teorema 7.1.3. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado com uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado e $\{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração para X. Seja, também, $\{q_n : n \in \omega\}$ uma enumeração para $\mathbb{Q}$. Vamos definir indutivamente $f : X \to \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem. Primeiramente, definimos $f(x_0) = q_0$.

Agora aplique o lema anterior para os conjuntos $\{x_0, x_1\}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus \{q_0\}$. Desta forma, agora temos definidos $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Agora invertemos um pouco o papel e estendemos f^{-1} da seguinte forma: aplicamos o lema para $Im(f) \cup \{q_k\}$ e $X \smallsetminus dom(f)$ onde $k = \min\{n : q_n \notin Im(f)\}$. Daí estendemos f^{-1} para q_k. No passo seguinte, invertemos novamente e aplicamos o lema para $dom(f) \cup \{x_k\}$ e $\mathbb{Q} \smallsetminus Im(f)$, onde $k = \min\{n : x_n \notin dom(f)\}$ e estendemos f para x_k. Continuamos esse processo, sempre alternando a extensão (entre f e f^{-1}).

Note que, no final, temos que a f obtida preserva ordem e é injetora. Note que ela está definida para todo x_n, já que sempre tomamos o menor índice na hora de estender f e, da mesma forma, temos que f é sobrejetora pois sempre tomamos q_n de menor índice na hora de estender f^{-1}. □

Finalmente, a caracterização para os reais:

Teorema 7.1.4. *Todo espaço totalmente ordenado, com ordem densa, sem maior nem menor elementos, completo e separável é homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $(X, \leq)$ como no enunciado. Seja $D \subset X$ denso e enumerável. Vamos mostrar que D satisfaz as hipóteses do teorema anterior (Teorema 7.1.3).

Suponha por contradição que D possua maior elemento m. Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $m < x_1 < x_2$ (tais elementos existem pois X não possui maior elemento). Note que $]m, x_2[\neq \emptyset$ e $]m, x_2[\cap D = \emptyset$. Mas isso é uma contradição pois D é denso em X. Analogamente, D não tem menor elemento.

Suponha que a ordem de D não seja densa. Então, existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $d_1 < d_2$ e $]d_1, d_2[\cap D = \emptyset$. Mas, como a ordem em X é densa, $]d_1, d_2[\neq \emptyset$, o que é, novamente, uma contradição com o fato de D ser denso em X.

Desta forma, podemos tomar $f : D \to \mathbb{Q}$ o isomorfismo dado pelo teorema anterior. Vamos estender f para X da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D, d \leq x\}$$

Note que, pela densidade de D, $\tilde{f}$ preserva a ordem. Pela completude de X, temos que $\tilde{f}$ é bijetora (veja o Exercício 7.1.11). □

Definição 7.1.5. Dizemos que um espaço topológico é **ccc** se não não existe uma família não enumerável de abertos dois a dois disjuntos.

Basicamente, estamos dizendo que $\tau \smallsetminus \{\emptyset\}$ é ccc com a ordem da inclusão.

Note que todo espaço separável é ccc:

Proposição 7.1.6. *Seja X espaço topológico. Se X é separável, X é ccc.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ família de abertos dois a dois disjuntos. Seja D denso enumerável. Defina $f : \mathcal{A} \to D$ de forma que $f(A) \in A \cap D$. Note que tal função é injetora e, portanto, $\mathcal{A}$ é enumerável. □

Definição 7.1.7. Chamamos de **hipótese de Suslin** a afirmação: todo espaço ccc, totalmente ordenado por uma ordem densa e completa, sem maior nem menor elementos é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

A hipótese de Suslin é mais uma afirmação independente de ZFC.

Definição 7.1.8. Chamamos de uma **reta de Suslin** um espaço ccc, totalmente ordenado por uma ordem densa e completa sem maior nem menor elemento e que não seja homeomorfo a $\mathbb{R}$ (ou, equivalentemente, que não seja separável).

Ou seja, a hipótese de Suslin é equivalente a não existência de uma reta de Suslin.

Proposição 7.1.9. *Se X é uma reta de Suslin, então X^2 não é ccc.*

Demonstração. Sejam $a_0, b_0, c_0 \in X$ tais que $a_0 < b_0 < c_0$. Suponha definidos $(a_\xi)_{\xi<\kappa}, (b_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(c_\xi)_{\xi<\kappa}$ para $\kappa < \omega_1$ satisfazendo, para todo $\xi < \kappa$:

- $a_\xi < b_\xi < c_\xi$;
- $]a_\xi, c_\xi[\cap \{b_\eta : \eta < \xi\} = \emptyset$.

Vamos definir a_κ, b_κ e c_κ satisfazendo as mesmas condições. Como X não é separável, $\{b_\xi : \xi < \kappa\}$ não é denso. Logo, existem a_κ e c_κ tais que

$$]a_\kappa, c_\kappa[\cap \{b_\xi : \xi < \kappa\} = \emptyset.$$

Seja $b_\kappa \in]a_\kappa, c_\kappa[$ (que existe já que a ordem é densa). Considere $V_\xi =]a_\xi, b_\xi[\times]b_\xi, c_\xi[$ para cada $\xi < \omega_1$. Note que, se $\xi \neq \eta$, temos que $V_\xi \cap V_\eta = \emptyset$ e, portanto, X^2 não é ccc. □

Veremos adiante que o produto de espaços ccc também nos dá afirmações independentes.

Exercícios

Exercício 7.1.10. Mostre que D na demonstração de 7.1.4 tem as propriedades desejadas.

Exercício 7.1.11. Mostre que $\tilde{f}$ definida em 7.1.4 é um isomorfismo de ordem.

Exercício 7.1.12. Joãozinho acha que encontrou um contraexemplo para a afirmação "se dois espaços com a topologia da ordem são isomorfos (por ordem), então eles são homeomorfos". O raciocínio de Joãozinho foi o seguinte:

- Considere $[0,1[\cup[2,3[$ e $[0,2[$ com suas ordens usuais;
- Note que tais espaços são isomorfos;
- Note que tais espaços não são homeomorfos.

Mostre que Joãozinho está errado.

Martin e Baire

Vamos aqui apresentar um resultado simples envolvendo o axioma de Martin e espaços ccc:

Na verdade, esse enunciado é equivalente ao axioma de Martin. Uma maneira de se mostrar a volta é, a partir de uma ordem parcial, construir um espaço de ultrafiltros.

Proposição 7.1.13. *(MA) Seja (X, τ) espaço topológico de Hausdorff, compacto e ccc Se $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ é uma família de abertos densos com $\kappa < 2^{\aleph_0}$, então $\bigcap_{\xi<\kappa} A_\xi$ é denso em X.*

Demonstração. Seja W aberto não vazio em X. Por regularidade, podemos tomar V aberto não vazio tal que $\overline{V} \subset W$. Note que $\overline{V}$ é ccc (ver o Exercício 7.1.14). Vamos mostrar que $\overline{V} \cap \bigcap_{\xi<\kappa} A_\xi \neq \emptyset$ (note que isso é suficiente). Considere
$$\mathbb{P} = \{A \cap \overline{V} : A \in \tau,\ A \neq \emptyset\}$$
com a ordem dada por $A \leq B$ se $\overline{A} \subset B$. Para cada $\xi < \kappa$, note que
$$D_\xi = \{B \in \mathbb{P} : \overline{B} \subset A_\xi\}$$
é denso em $\mathbb{P}$ (ver o Exercício 7.1.15). Note que, como $\mathbb{P}$ é ccc (Exercício 7.1.16), pelo axioma Axioma de Martin, existe $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ filtro $(D_\xi)_{\xi<\kappa}$-genérico. Considere $\mathcal{F}' = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Note que, como $\mathcal{F}$ é centrada, $\mathcal{F}'$ também é centrada. Logo, $\bigcap \mathcal{F}'$ é não vazio (família centrada de compactos). Seja $x \in \bigcap \mathcal{F}'$. Dado $\xi < \kappa$, seja $F_\xi \in \mathcal{F} \cap D_\xi$. Então $\overline{F}_\xi \subset A_\xi$ e $\overline{F}_\xi \subset \overline{V}$ (pois $F_\xi \in \mathbb{P}$). Assim, $x \in A_\xi \cap \overline{V}$ para qualquer $\xi < \kappa$. $\square$

Exercícios

Exercício 7.1.14. Mostre que se X é ccc e V é um aberto de X, então $\overline{V}$ é ccc.

Exercício 7.1.15. Mostre que D_ξ definido em 7.1.13 é denso.

Exercício 7.1.16. Mostre que $I\!P$ definido em 7.1.13 é ccc.

Exercício 7.1.17. Mostre que não se pode melhorar o resultado da Proposição 7.1.13 para uma família de tamanho $\mathfrak{c}$ abertos densos.

7.2 Produto de espaços ccc

Nesta seção vamos nos concentrar com o que pode ser mostrado em ZFC sobre produtos de espaços ccc. Na próxima seção, vamos apresentar mais alguns resultados, mas supondo também o Axioma de Martin.

Definição 7.2.1. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos forma um **Δ-sistema** de raiz Δ se, para todo $F, G \in \mathcal{F}$ distintos, temos que $F \cap G = \Delta$.

Sim, uma família disjunta é um Δ-sistema de raiz $\emptyset$.

Proposição 7.2.2 (**Lema do Δ-sistema**). *Seja $\mathcal{F}$ uma família não enumerável de conjuntos finitos. Então existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ não enumerável que forma um Δ-sistema.*

Demonstração. Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $n \in \omega$ tal que $|F| = n$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Se $n = 1$, note que $F \cap G = \emptyset$ se $F \neq G$ e, portanto, temos o resultado. Agora suponha o resultado para n e vamos provar para $n + 1$. Vamos considerar dois casos:

- Existe a tal que $\mathcal{F}_a = \{F \in \mathcal{F} : a \in F\}$ é não enumerável. Então, por hipótese de indução, $\mathcal{F}'_a = \{F \smallsetminus \{a\} : F \in \mathcal{F}_a\}$ contém um Δ-sistema não enumerável $\mathcal{G}$ de raiz Δ. Logo, $\mathcal{F}' = \{G \cup \{a\} : G \in \mathcal{G}\}$ forma um Δ-sistema de raiz $\Delta \cup \{a\}$.

- Não existe a tal que $\{F \in \mathcal{F} : a \in \mathcal{F}\}$ seja não enumerável. Sem perda de generalidade, escreva $\mathcal{F} = \{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ (talvez seja necessário jogar alguns elementos fora). Dado $a \in F_0$, note que existe $\xi < \omega_1$ tal que $a \notin F_\eta$ para todo $\eta \geq \xi$. Repetindo esse processo, como F_0 é finito, existe $\xi_0 < \omega_1$ tal que $F_0 \cap F_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_0$. Com argumento análogo, existe ξ_1 tal que $F_{\xi_1} \cap F_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_1$. De forma geral, se $\alpha < \omega_1$ é limite e já temos definidos ξ_β para todo $\beta < \alpha$, definimos $\xi_\alpha = \sup\{\xi_\beta : \beta < \alpha\} < \omega_1$. Se $\alpha + 1 < \omega_1$, basta definir $\xi_{\alpha+1}$ de maneira análoga ao que fizemos antes. Desta maneira $\{F_{\xi_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ é um Δ-sistema de raiz $\emptyset$.

Pois a quantidade de elementos que contém a é enumerável por hipótese.

$\square$

Proposição 7.2.3. *Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ família de espaços ccc tais que, para todo $F \subset \kappa$ finito, temos que $\prod_{\xi \in F} X_\xi$ é ccc. Então $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é ccc.*

Se $V = \prod_{\xi<\kappa} V_\xi$ é um aberto do produto, chamamos de **suporte** de V o conjunto $\{\xi < \kappa : V_\xi \neq X_\xi\}$.

Demonstração. Suponha que não. Seja $(A_\xi)_{\xi<\omega_1}$ uma família de abertos dois a dois disjuntos em $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$. Podemos supor cada A_ξ um aberto básico do produto. Para cada $\xi < \kappa$, seja a_ξ o suporte de A_ξ. Vamos mostrar o caso em que $(a_\xi)_{\xi<\omega_1}$ são todos distintos, o caso em que isso não ocorre é análogo (ver Exercício 7.2.9). Como cada a_ξ é finito, podemos supor que $(a_\xi)_{\xi<\omega_1}$ forma um Δ-sistema de raiz Δ. Seja $\pi : \prod_{\xi<\kappa} X_\xi \longrightarrow \prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$ a projeção usual. Note que, como $A_\xi \cap A_\eta = \emptyset$ para $\xi \neq \eta$, temos que $\pi(A_\xi) \cap \pi(A_\eta) = \emptyset$. Ou seja, temos que $(\pi(A_\xi))_{\xi<\omega_1}$ é uma família de abertos dois a dois disjuntos em $\prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$, contrariando o fato que $\prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$ é ccc já que Δ é finito. □

Compare com a Proposição 4.2.3.

Proposição 7.2.4. *Seja $\kappa > \mathfrak{c}$. Então 2^κ é ccc mas não é separável.*

Demonstração. Como 2^F é finito para cada F finito, temos pelo resultado anterior que 2^κ é ccc.

Suponha 2^κ separável e seja $D \subset 2^\kappa$ denso enumerável. Para cada $\xi < \kappa$, considere

$$D_\xi = \{f \in 2^\kappa : f(\xi) = 0\} \cap D$$

Note que cada D_ξ é não vazio já que $\{f \in 2^\kappa : f(\xi) = 0\}$ é um aberto não vazio. Vamos provar que, se $\alpha \neq \beta$, então $D_\alpha \neq D_\beta$. Considere

$$U_\alpha = \{f \in 2^\kappa : f(\alpha) = 1\}$$

$$Z_\beta = \{f \in 2^\kappa : f(\beta) = 0\}.$$

Note que cada um destes conjunto é um aberto não vazio. Note também que $U_\alpha \cap Z_\beta \neq \emptyset$. Desta forma, podemos tomar $f \in U_\alpha \cap Z_\beta \cap D$. Pela construção, $f \in D_\beta$ mas $f \notin D_\alpha$.

Desta forma, temos uma função injetora de κ em $\wp(D)$. Como $|\wp(D)| = \mathfrak{c}$, temos que $\kappa \leq \mathfrak{c}$. □

Martin e o produto de espaços ccc

Basicamente, só precisamos que valha MA_{ω_1}.

Vamos ver nessa seção que o axioma de Martin mais a negação da hipótese do contínuo implicam que o produto de espaços ccc é ccc. Para mostrar isso, pelos resultados vistos na última seção, é suficiente mostrarmos que o produto finito (e, portanto, de dois) de espaços ccc é ccc. Vamos começar com um resultado auxiliar:

Proposição 7.2.5. *($MA + \neg CH$) Seja X espaço ccc e seja $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ uma família de abertos não vazios. Então $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ contém uma família centrada não enumerável.*

Na verdade, esse enunciado é equivalente a $MA_{\aleph_1}$, veja [14].

Demonstração. Para cada $\xi < \omega_1$, defina

$$V_\xi = \bigcup_{\eta>\xi} U_\eta$$

Note que, assim, $V_\xi \supset V_\eta$ se $\xi < \eta$. Vamos mostrar que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\overline{V}_\xi = \overline{V}_\alpha$ para todo $\xi > \alpha$. Suponha que não. Então podemos construir uma sequência $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ tal que

$$\overline{V_{\alpha_\xi}} \supsetneq \overline{V_{\alpha_\eta}}$$

se $\xi < \eta$. Mas então $(V_{\alpha_{\xi+1}} \setminus \overline{V_{\alpha_\xi}})_{\xi<\omega_1}$ é uma família de abertos não vazios dois a dois disjuntos, contrariando o fato que X é ccc.

Seja $\alpha < \omega_1$ como acima. Considere

$$\mathbb{P} = \{A \subset V_\alpha : A \text{ é aberto não vazio}\}$$

Note que $\mathbb{P}$ com a ordem da inclusão é ccc. Para cada $\beta < \omega_1$, considere

$$D_\beta = \{A \in \mathbb{P} : \exists \gamma \geq \beta \ A \subset U_\gamma\}$$

Vamos mostrar que D_β é denso em $\mathbb{P}$. Sejam $A \in \mathbb{P}$ e $\xi \in \omega_1$ tais que $\alpha, \beta < \xi$. Temos que $A \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} = \overline{V_\xi}$. Assim, $A \cap V_\xi \neq \emptyset$ e, portanto, $A \cap U_\gamma \neq \emptyset$ para algum $\gamma > \xi$. Ou seja, $A \cap U_\gamma \in D_\beta$ e $A \cap U_\gamma \subset A$.

Assim, por MA, podemos tomar G filtro $(D_\beta)_{\beta<\omega_1}$-genérico. Note que, então

$$I = \{\xi < \omega_1 : \exists A \in G \ A \subset U_\xi\}$$

é ilimitado em ω_1. Logo, $(U_\xi)_{\xi\in I}$ é uma família centrada e não enumerável. □

Proposição 7.2.6. *($MA + \neg CH$) Produto de espaços ccc é ccc.*

Demonstração. Basta mostrarmos que, se X e Y são ccc, então $X \times Y$ é ccc. Seja $(U_\xi \times V_\xi)_{\xi<\omega_1}$ família de abertos básicos não vazios em $X \times Y$. Pelo resultado anterior, podemos supor $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ centrada. Assim, se $(U_\xi \times V_\xi) \cap (U_\eta \times V_\eta) = \emptyset$, $V_\xi \cap V_\eta = \emptyset$. Logo, como Y é ccc, temos que $(U_\xi \times V_\xi)_{\xi<\omega_1}$ não são dois a dois disjuntos. □

Como a existência de uma reta de Suslin implica num espaço ccc. cujo quadrado não é ccc, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 7.2.7. *Se vale $MA + \neg CH$, vale a hipótese de Suslin.*

Exercícios

Exercício 7.2.8. Mostre que não vale o análogo do Lema do Δ-sistema para o caso em que $\mathcal{F}$ é enumerável e cada $F \in \mathcal{F}$ é finito e nem para o caso em que $\mathcal{F}$ é não enumerável e cada $F \in \mathcal{F}$ é enumerável.

Exercício 7.2.9. Mostre que se uma quantidade não enumerável de abertos na demonstração de 7.2.3 tem o mesmo suporte, também temos o resultado.

Capítulo 8

Forcing

8.1 Álgebras de Boole

Definição 8.1.1. Chamamos de uma **álgebra de Boole** um conjunto A munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma unária $-$ com dois elementos denotados por $0, 1 \in A$ tais que, para todo $a, b, c \in A$:

Normalmente denotamos por ab em vez de $a \cdot b$.

- $a \cdot b = b \cdot a$ e $a + b = b + a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ e $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- $a \cdot (a + b) = a + (a \cdot b) = a$
- $a \cdot (-a) = 0$ e $a + (-a) = 1$

Exemplo 8.1.2. Seja X um conjunto. Então $\wp(X)$ com as operações de $\cup$ e $\cap$ forma uma álgebra de Boole.

Exemplo 8.1.3. O conjunto $\{0, 1\}$ interpretado como 0 sendo falso e 1 sendo verdade, mas as operações $\vee$ (ou), $\wedge$ (e) e $\neg$ (negação), forma uma álgebra de Boole.

Algumas propriedade básicas (e de fácil demonstração) são:

Proposição 8.1.4. *Seja A uma álgebra de Boole. Então, para todo $a, b \in A$, temos:*

- $a + a = aa = a$
- $a0 = 0$ *e* $a + 1 = 1$

- $a1 = a$ e $a + 0 = a$
- $-0 = 1$ e $-1 = 0$

Note que, para o caso de $\wp(X)$, $a \leq b$ assim definido simplesmente significa $a \subset b$.

Definição 8.1.5. Seja A uma álgebra de Boole. Para $a, b \in A$, definimos $a \leq b$ se $ab = a$. Essa é a ordem usual numa álgebra de Boole (ver Exercício 8.1.8).

Definição 8.1.6. Dizemos que uma álgebra de Boole é **completa** se todo $X \subset A$ admite supremo.

Exercícios

Exercício 8.1.7. Mostre que existe uma única álgebra de Boole com dois elementos.

Exercício 8.1.8. Mostre que $\leq$ definida acima é de fato uma ordem.

Exercício 8.1.9. Seja A uma álgebra de Boole. Mostre que, dados $a, a', b, b' \in A$, se $a \leq b$ e $a' \leq b'$, então $aa' \leq bb'$.

Exercício 8.1.10. Mostre que para todo $a \in A$, $0 \leq a \leq 1$.

Exercício 8.1.11. Mostre que $a \leq b$ se, e somente se, $a + b = b$.

Exercício 8.1.12. Seja A uma álgebra de Boole. Sejam $a, b \in A$. Denotamos por $a - b = a \cdot (-b)$. Mostre que $a \not\leq b$ se, e somente se, $a - b \neq 0$.

8.2 Dando valores às fórmulas

Nesta seção, trabalharemos sempre com uma álgebra de Boole completa A fixada. Também vamos usar a notação $a \Rightarrow b$ para $-a + b$. Vamos usar diversas vezes a seguinte equivalência, para quaisquer $a, b \in A$:

$$a \leq b \text{ se, e somente, } a \Rightarrow b = 1$$

Atenção, isso é uma definição recursiva.

Definição 8.2.1. Vamos chamar um conjunto τ de um **nome** se τ é uma função tal que todo elemento de seu domínio é um nome e todo elemento da imagem é um elemento de A.

Exemplo 8.2.2. Por vacuidade, $\emptyset$ é um nome. Assim, $\sigma = \{(\emptyset, a)\}$ também é um nome se $a \in A$. Dados $b, c \in A$, temos que $\{(\emptyset, b), (\sigma, c)\}$ é um nome.

A ideia aqui é que dado um par $(\sigma, a) \in \tau$, a "mede" quanto é a chance σ pertencer a τ. Agora, vamos usar essa ideia para atribuir valores booleanos para todas as fórmulas. Para isso, vamos sempre substituir as variáveis por nomes. Começamos com as fórmulas mais simples:

Uma fórmula assim é chamada de **atômica**

Definição 8.2.3. Dados dois nomes σ, τ, definimos

$$[\![\sigma \in \tau]\!] = \sup_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} [\![\sigma = t]\!]\tau(t)$$

$$[\![\sigma \subset \tau]\!] = \inf_{t \in dom(\sigma)} (\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \tau]\!])$$

$$[\![\sigma = \tau]\!] = [\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau \subset \sigma]\!]$$

Formalmente, essa definição é recursiva. A ideia na primeira definição é mais ou menos a seguinte: $\sigma \in \tau$ tem valor mais alto conforme algum $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ tiver $[\![\sigma = t]\!]$ alto e, ao mesmo tempo, o valor de $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ for alto. De certa forma, $\tau(t)$ mede o quanto vale t pertencer a τ e $[\![\sigma = t]\!]$ mede o quanto vale σ ser igual a t.

Um jeito de pensar é que as fórmulas não tem um valor "verdadeiro" ou "falso", mas um "nível de força", que varia dentro de A.

Como essa definição é recursiva, podemos usar o *rank* como definimos anteriormente para ajudar a trabalhar com ela. Por exemplo, a primeira parte diz que podemos definir $[\![\sigma \in \tau]\!]$ se já sabemos a definição de $[\![\sigma = t]\!]$ onde $rank(t) < rank(\sigma)$. Vamos mostrar o seguinte resultado, que usa bem essa ideia:

Proposição 8.2.4. *Seja σ nome qualquer. Então $[\![\sigma = \sigma]\!] = 1$.*

A ideia disso é que a chance de $\sigma = \sigma$ é 1, ou seja, é a máxima possível.

Demonstração. Vamos provar isso por indução sobre o $rank(\sigma)$. Por definição, temos que mostrar que $[\![\sigma \subset \sigma]\!] = 1$. Para isso, temos que mostrar que $\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \sigma]\!] = 1$ para todo $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Ou seja, precisamos mostrar que $\sigma(t) \leq [\![t \in \sigma]\!]$ para todo $t \in \mathrm{dom}(t)$. Seja $t \in \mathrm{dom}(t)$. Temos:

$$[\![t \in \sigma]\!] = \sup_{s \in \mathrm{dom}(\sigma)} [\![s = t]\!]\sigma(t)$$

Assim, por hipótese de indução, $[\![t = t]\!] = 1$ e, portanto, o supremo da expressão acima é maior ou igual a $[\![t = t]\!]\sigma(t) = \sigma(t)$. □

Exemplo 8.2.5. Com o resultado anterior, temos como provar a ideia intuitiva que tínhamos antes: considere $\sigma = \{(\emptyset, a)\}$ para algum $a \in A$. Lembrando, esse nome tem a possibilidade de um único elemento ($\emptyset$) e a "força" deste elemento estar em σ é dada por a. De fato, podemos calcular:

$$\begin{array}{rcl} [\![\emptyset \in \sigma]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)} [\![\emptyset = t]\!]\sigma(t) \\ & = & [\![\emptyset = \emptyset]\!]\sigma(\emptyset) \\ & = & 1\sigma(\emptyset) \\ & = & a \end{array}$$

Proposição 8.2.6. *Dados σ, τ e ρ nomes, temos:*

(a) $[\![\sigma = \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma = \rho]\!]$

(b) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\sigma = \rho]\!] \leq [\![\rho \in \tau]\!]$

(c) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \in \rho]\!]$

Demonstração. Isso precisa ser provado por indução sobre o *rank* de σ, τ e ρ. E fazemos isso supondo as 3 condições ao mesmo tempo para nomes de *rank* menor. Vamos apresentar a demonstração da condição (a), deixando as outras como exercício:

Note que é suficiente provarmos que

$$[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \subset \rho]\!]$$

Assim, pela definição de $[\![\subset]\!]$, temos:

$$\begin{array}{rcl} [\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] & = & \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\ & = & \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(-\sigma(t) + [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\ & = & \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(([\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t)) + [\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!]) \end{array}$$

Note que, para qualquer $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$,

$$[\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t) \leq -\sigma(t)$$

e que, por hipótese de indução,

$$[\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![t \in \rho]\!]$$

Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} [\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] & \leq & \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(-\sigma(t) + [\![t \in \rho]\!]) \\ & = & \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \rho]\!]) \\ & = & [\![\sigma \subset \rho]\!] \end{array}$$

□

O próximo lema nos indica que, de fato, $x(y)$ mede a força de $y \in x$. Mas aqui há um pequeno ajuste. Suponha que exista um outro possível elemento de x - vamos chamá-lo de z. Então z tem força $x(z)$ de estar em x. Mas poderia ocorrer que $[\![z = y]\!]$ tivesse valor alto. Desta forma, seria natural esperamos que $[\![y \in x]\!]$ tivesse valor ainda maior que $x(y)$ (já que deveríamos levar em conta também o valor de $x(z)$).

Lema 8.2.7. *Sejam x, y nomes. Se $y \in dom(x)$, então $x(y) \leq [\![y \in x]\!]$.*

Demonstração. Suponha $y \in \mathrm{dom}(x)$. Então

$$[\![y \in x]\!] = \sup_{t \in dom(x)} [\![y = t]\!] x(t) \geq [\![y = y]\!] x(y) = x(y)$$

□

Definição 8.2.8. Dada uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, onde x_i's indicam suas variáveis livres, e dados $\tau_1, ..., \tau_n$ nomes, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$ por recursão sobre a complexidade de φ da seguinte maneira:

- Se $\varphi(x_1, x_2)$ é da forma "$x_1 \in x_2$" ou "$x_1 = x_2$", fazemos como anteriormente.

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\neg\psi(x_1, ..., x_n)$, definimos

$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = -[\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \wedge \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos

$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!][\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \vee \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos

$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] + [\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\exists y\ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos

$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \sup_{\sigma} [\![\psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)]\!],$$

  onde $\sup_\sigma$ indica o supremo com relação a todos os σ nomes.

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\forall y\ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos

$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \inf_{\sigma} [\![\psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)]\!],$$

  onde $\inf_\sigma$ indica o ínfimo com relação a todos os σ nomes.

Note que, apesar da coleção de todos os nomes não formar um conjunto, tomar o supremo de valores booleanos com relação a todos os nomes como acima não é um problema, uma vez que os valores variam dentro da álgebra de Boole fixada.

Lema 8.2.9. *Sejam φ, ψ fórmulas. Então $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$ se, e somente se, $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$.*

Demonstração. Note que $[\![\varphi \to \psi]\!] = -[\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]$. Note que $-a + b = 1$ se, e somente se, $a \leq b$ para qualquer a, b na álgebra de Boole. ☐

Proposição 8.2.10. *Considere φ o axioma da extensionalidade. Isto é,*

$$\forall x\ \forall y\ x = y \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \to z \in y) \wedge (z \in y \to z \in x))$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Note que, para isso, só precisamos mostrar que, dados a, b nomes, temos que $[\![a = b]\!] = [\![a \subset b]\!][\![b \subset a]\!]$. Mas isso segue diretamente das definições. ☐

Proposição 8.2.11. *Considere φ o axioma do par. Isto é*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ x \in z \wedge y \in z$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Fixe a, b nomes. Considere o nome $c : \{a, b\} \longrightarrow A$ tal que $c(a) = 1$ e $c(b) = 1$. Basta mostrar que $[\![a \in c]\!][\![b \in c]\!] = 1$. Mas isso segue diretamente do fato que $c(a) \leq [\![a \in c]\!]$ e que $c(b) \leq [\![b \in c]\!]$. ☐

De maneira parecida podemos provar que todos os axiomas de ZFC tem valor 1.

Aumentando o universo

A ideia nesta seção é pensarmos que a fórmulas falam sobre nomes como se fossem conjuntos. Dentre os nomes, teremos alguns que se comportam de maneira muito parecida com os conjuntos "normais" e outros que não são dessa forma. Pense nos da segunda forma como se fossem conjuntos novos e os da primeira forma como se fossem os originais.

A seguinte definição indica os conjuntos originais:

Definição 8.2.12. Seja x um conjunto. Definimos o nome $\check{x}$ de maneira recursiva da seguinte maneira: $\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$.

Note que $\check{\emptyset} = \emptyset$.

Proposição 8.2.13. *Sejam x, y conjuntos. Então*

(a) se $x \in y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 1$.

(b) se $x \notin y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 0$.

(c) se $x \subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 1$.

(d) se $x \not\subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 0$.

Olhe para essa proposição da seguinte forma: se vale uma relação entre x e y, a mesma relação vale com suas respectivas cópias com força total. Se tal relação não vale, então sua negação vale com força total nas cópias.

Demonstração. Vamos mostrar todas as condições por indução sobre o *rank* de x e y ao mesmo tempo:

(a) Suponha $x \in y$. Então

$$\begin{array}{rcl} [\![\check{x} \in \check{y}]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(y)} [\![t = \check{x}]\!]\check{y}(t) \\ & \geq & [\![\check{x} = \check{x}]\!]\check{y}(\check{x}) \\ & = & 1 \end{array}$$

(b) Suponha $x \notin y$. Por hipótese de indução, para todo $t \in y$, temos que $[\![\check{x} = \check{t}]\!] = 0$ (pois $x \neq t$). Assim, $[\![x \in y]\!] = 0$.

(c) Suponha $x \subset y$. Seja $t \in dom(x)$. Então $x(t) = 1$. Além disso, por hipótese de indução, $[\![t \in y]\!] = 1$ já que $t \in y$. Logo,

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{t \in \mathrm{dom}(x)} (\check{x}(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]) = 1$$

(d) Suponha $x \not\subset y$. Então existe $t \in x$ tal que $t \notin y$. Logo, por hipótese de indução, $[\![t \in \check{y}]\!] = 0$. Assim

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{s \in \mathrm{dom}(x)} (\check{x}(s) \Rightarrow [\![s \in y]\!]) \leq (\check{x}(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]) = 0$$

$\square$

Mas nem todos os elementos nesta extensão são da forma $\check{x}$ para algum x:

Definição 8.2.14. Chamamos de $\dot{G}$ o nome $\dot{G} : \{\check{a} : a \in A\} \longrightarrow A$ dado por $\dot{G}(\check{a}) = a$.

Lema 8.2.15. *Seja $a \in A$. Então $[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = a$.*

Demonstração. Note que, dado $\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G})$, temos $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 1$ se $a = t$ ou $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 0$ se $t \neq a$. Assim

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = \sup_{\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G}} [\![\check{t} = a]\!] \dot{G}(\check{a}) = \dot{G}(\check{a}) = a$$

□

Em particular, $[\![1 \in \dot{G}(\check{1})]\!] = 1$ e $[\![0 \in \dot{G}(\check{0})]\!] = 0$.

Antes de continuarmos, um pequeno comentário sobre notação: vamos usar alguns valores da forma $[\![x \leq y]\!]$. Formalmente, precisamos lembrar que $\leq$ é dado por um conjunto de pares (para facilitar, vamos chamar tal conjunto de pares de R). Então a fórmula acima na verdade é $[\![(x, y) \in \check{R}]\!]$. Como aparece o par ordenado, precisaríamos ainda trocar o termo (x, y) por sua definição formal - não vamos fazer isso (mas esperamos que o leitor pelo menos faça o exercício mental de ver que isso seria possível). Finalmente, se $a, b \in A$, não é muito difícil de ver $[\![(\check{a}, \check{b}) = (\check{a, b})]\!] = 1$. Finalmente, se $a, b \in A$, temos pelos comentários acima e pela Proposição 8.2.13, temos que $[\![\check{a} \leq \check{b}]\!] = 1$ se $a \leq b$ e que $[\![\check{a} \leq b]\!] = 0$ se não vale $a \leq b$.

Proposição 8.2.16. $[\![\dot{G}$ *é filtro sobre* $\check{A}]\!] = 1$.

Demonstração. Note que $[\![\check{1} \in \dot{G}]\!] = 1$. Sejam $a, b \in A$. Vamos mostrar que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \leq [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!]$$

$$\begin{array}{rcl} [\![\check{a} \in G]\!][\![\check{b} \in G]\!] & = & ab \\ & = & [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!] \\ & = & [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!][\![\check{ab} \leq \check{a}, \check{b}]\!] \\ & \leq & [\![\exists \tau\ \tau \in \dot{G} \wedge \tau \leq \check{a}, \check{b}]\!] \end{array}$$

Ou seja, provamos que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!] = 1$$

Tomando-se os ínfimos para a e b, obtemos

$$[\![\forall a \in \dot{G} \forall b \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq a, b]\!] = 1$$

A terceira condição sobre filtros é análoga. □

Proposição 8.2.17. *Se D é denso em A, então* $[\![\dot{G} \cap \check{F} \neq \emptyset]\!] = 1$.

Demonstração. Vamos provar que

$$a = [\![\exists x \; x \in \check{D} \wedge x \in \dot{G}]\!] = 1$$

Suponha que não. Então $1 - a > 0$. Seja $b \in D$ tal que $b \leq 1 - a$. Note que

$$b = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!] = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \check{D}]\!]$$

Assim, $b \leq a$, contrariando o fato que $b \leq 1 - a$. $\square$

Isso em particular nos dá a ideia que o conjunto representado por $\dot{G}$ é um conjunto novo: em geral, não existe um G filtro que intercepte todos os densos D. Mas note que não temos uma contradição aqui. $\dot{G}$ intercepta todos os densos "velhos" (os da forma $\check{D}$). Ou seja, com certeza existe um denso "novo" tal que $\dot{G}$ não o intercepta.

Exercícios

Exercício 8.2.18. Sejam x um conjunto e τ um nome qualquer. Mostre que, se $[\![\tau \in \check{x}]\!] \neq 0$, então existe $y \in x$ tal que $[\![\tau \in \check{x}]\!] \leq [\![\check{y} = \tau]\!]$.

Dicas de alguns exercícios

1.1.17 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

1.2.14 Considere o conjunto das "funções escolhas parciais".

2.1.25

b Note que $A \neq \alpha$ por ser segmento inicial.

2.5.28 Corolário do König.

2.5.29 Função normal.

2.5.33

c Considere sequências de racionais convergindo para irracionais em $\mathbb{R}$.

2.5.34 Entre dois reais tem um racional.

3.3.11

a Note que para baixo de um elemento só tem finitos elementos.

b Pense numa função.

4.2.11 Compare com $\beta\omega$.

8.2.18 Escreva a definição de $[\![\tau \in \check{x}]\!]$ e lembre os elementos de $\mathrm{dom}(\check{x})$ são todos da forma $\check{t}$ para algum t.

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[2] C. Brech, J. Lopez-Abad, and S. B. Todorčević. Homogeneous families on trees and subsymmetric basic sequences. *arXiv*, pages 1–50, 2016.

[3] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[4] P. Erdös. An interpolation problem associated with the continuum hypothesis. *The Michigan Mathematical Journal*, 11(1):9–10, 1964.

[5] H. Friedman. A Consistent Fubini-Tonelli Theorem for Nonmeasurable functions. *Illinois Journal of Mathematics*, 24(3):390–395, 1980.

[6] R. L. Goodstein. On the restricted ordinal theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 9(2):33–41, 1944.

[7] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. 1973.

[8] W. Just and M. Weese. *Discovering Modern Set Theory. I.*

[9] L. Kirby and J. Paris. Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14(4):285–293, 1982.

[10] K. Kunen. *Set Theory (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)*. 2011.

[11] J. Pawlikowski. Undetermined sets of point-open games. *Fund. Math.*, 144(3):279–285, 1994.

[12] J. Steprāns. History of the continuum in the 20th century. *Sets and Extensions in the Twentieth Century*, pages 1–57, 2012.

[13] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.

[14] S. Todorcevic and B. Velickovic. Martin's axiom and partitions. *Compositio Mathematica*, 63(3):391–408, 1987.

Notação

Índice Remissivo