Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

15 de setembro de 2016

[1] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversas funções. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma se fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto, trabalharemos mais com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos "normais" no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos "normais". Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N, que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma "definição" intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Vazio $\exists x\ \forall y\ y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x\ \forall y\ (x = y) \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Par $\forall x\ \forall y\ \exists z\ x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y, existe um conjunto z que os contém como elementos.

Veja o Alongamento 1.1.10.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ, temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U, mas não que só eles. U poderia conter "lixo" - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F}\ \exists U\ \forall x\ \forall y\ (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \to x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x, defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como "sucessor de x" - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S\ \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S\ s(x) \in S)$$

Partes $\forall x\ \exists y\ \forall z \subset x\ z \in y$. Isto é, dado um conjunto x, existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.17.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \in x\ \exists z' \in y\ \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D, conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D\ \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset\ \exists y \in x\ x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituido pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construido a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a $\leq$ entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X. A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivessemos trabalhando com a relação $\leq$ nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N}\ a + c = b\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar $\leq$, então isso ficaria meio circular.

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X. Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenas estão em X. Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y, uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.18

Note que, dados x, y, temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Definição 1.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que $\leq$ é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

(a) $x \leq x$;

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução finita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω, temos que $\omega \subset X$. $\square$

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função "sucessor" usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. □

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b. Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

□

Note que $\subset$ é uma ordem sobre ω, já que $\subset$ é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω, podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por $\subset$.*

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. □

Note que, assim, temos que a ordem $\leq$ usual dos naturais se traduz como $\subset$ aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como $\in$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações $\in$ e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando $\in$ e $=$:

(a) $x \subset y$

(b) $x \cap y$

(c) $x = \{a\}$ para algum a.

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y, de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre diretamente que os seguintes conjuntos são transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alongamento 1.1.15. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.16. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.17. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A, existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.18. Escreva a fórmula "x é um par ordenado".

Exercício 1.1.19. Uma função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.20. Seja $\leq$ uma ordem total sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\leq$ é uma boa ordem;

(ii) não existe $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.21. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

Exercício 1.1.22. Considere X o conjunto $\{0, 1\} \times \omega$ com a seguinte ordem:

$$(a, n) \preceq (b, m)$$

se $a < b$ ou se $a = b$ e $n \leq m$. Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Na verdade, para este texto, a maior importância da demonstração a seguir é que o princípio da boa ordem implica na existência de bases em espaços vetoriais - sem o uso do axioma da escolha.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre V. Defina B da seguinte maneira

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B.

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Vamos mostrar que B é uma base para V. Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, ..., b_n \in B$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Seja b_j o máximo de $\{b_1, ..., b_n\}$ (com relação a $\preceq$). Note que $b_j \in [\{b_1, ..., b_n\} \smallsetminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que $\preceq$ é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). $\square$

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

Um jeito de ler essa é hipótese é "se vale para todo mundo antes de x, vale para x".

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ, temos que vale $\varphi(x)$, contradição. $\square$

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n. Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar. Antes de provarmos tal resultado, é bom notar que, ao formarlizarmos o conceito de função em ZFC, tratamos cada função como um conjunto de pares ordenados

- essa formalização tem também a vantagem que podemos trabalhar com funções como se fossem conjuntos, podendo tomar uniões, intersecções etc. Veja o Alongamento 1.2.9 para ver essa formalização. Usaremos este fato implicitamente nesta demonstração e em muitas outras no decorrer deste texto.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(z, y)$ vale para algum z, y, então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.16.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X, isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g. Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em $\mathcal{F}$, elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.10), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X, terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \mathrm{dom}(f)\}$. Note que $f \restriction \{y \in X : y < x\}$ é um elemento de $\mathcal{F}$. Considere

$$g = (f \restriction \{y \in X : y < x\}) \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f. $\square$

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Ordem $\times$ escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se $\mathcal{C}$ é **totalmente ordenado** por $\leq$, isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a \leq b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq a$.

Formalmente, aqui estamos provando que o Princípio da Boa Ordem implica no Lema de Zorn

Proposição 1.2.5 (**Lema de Zorn**). *Seja $\leq$ uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a $\preceq$. Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existe A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a $\preceq$) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a $\preceq$, mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a $\leq$. Vamos fazer isso por indução sobre x. Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.12). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x. Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercicio 1.2.12, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a $\leq$. Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A. Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então $z \notin A$, já que x é o máximo de A. Note também que, pela definição de A_z, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y<z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. $\square$

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Cuidado que na próxima demonstração, trabalharemos com relações como se elas fosse conjuntos - da mesma maneira que fizemos com funções.

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos pares $(A, \leq_A)$ onde $A \subset X$ e $\leq_A$ é uma boa ordem sobre A. Considere a seguinte relação sobre $\mathcal{O}$:

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B, isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \smallsetminus A$, $a \leq_B b$. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{O}$. Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} A$. Que $\leq$ é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a $\leq_A$). Note que, pela maneira como $\preceq$ é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S. Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e, além disso, $(Y, \leq)$ é um majorante para a cadeia $\mathcal{C}$ (exercício). Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe $(B, \leq_B)$ maximal em $\mathcal{O}$. Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \smallsetminus B$, basta estender a ordem $\leq_B$ para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de $\mathcal{O}$ estritamente maior que $(B, \leq_B)$. $\square$

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.13.)

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (Axioma da escolha). *Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe $\leq$ uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. $\square$

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial admite uma base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação "princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base". A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto - primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F. Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.15). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com "variáveis" em X. Isto é, os elementos de $k(X)$ são "frações de polinômios de várias variáveis", mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X.

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F-grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F-homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F-grau n e todos os monômios de p_1 tem F-grau $d + n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K. Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K-espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V. Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.11). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x}\sum_{b\in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. Mais que isso, f é F-homogêneo de grau -1. Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. $\square$

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Sejam X e Y conjuntos. Dizemos que f é uma **função** de X em Y (notação $f : X \to Y$ se $f \subset X \times Y$ tal que:

- Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$;
- Para todo $x \in X$, se $(x, a), (x, b) \in f$, então $a = b$.

Usualmente, em vez de denotarmos $(x, y) \in f$, usamos $f(x) = y$.

(a) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $\mathrm{dom}(f)$ (domínio de f).

(b) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $Im(f)$ (imagem de f). Cuidado aqui, não queremos o contradomínio de f.

(c) Dados $f : X \to Y$ e $Z \subset X$, determine o conjunto $f \restriction Z$, onde $f \restriction Z$ é a **função restrição** de f a Z.

Alongamento 1.2.10. Mostre que, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.11. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de $\mathcal{F}$ não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G-grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.12. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou seja, $\mathcal{C}$ é uma cadeia com relação a $\subset$). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por $\leq$. Mostre que $\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por $\leq$.

Informalmente, lemos este exercício como "cadeia de cadeias é cadeia".

Exercício 1.2.13. Escreva a ordem usual de $\mathbb{Z}$ como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.14. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.15. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.16. Seja $\leq$ boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

"($x \in X$ e existe uma função f com domínio $\{y \in X : y \leq x\}$ tal que $f(z) = b$ onde $\varphi(\{z' : z' < z\}, b)$ e $f(x) = a$ onde $\varphi(\{z' : z < x\}, a)$) ou $a = \emptyset$"

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ.

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2 (de Cantor-Bernstein-Schroeder). *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado supondo que $A \cap B = \emptyset$. Para ver como obter o caso geral a partir desse, veja o Alongamento 1.3.10. Seja $x \in A \cup B$. Defina

- $s_0^x = x$

- $s^x_{n+1} = \begin{cases} f(s^x_n) & \text{se } s^x_n \in A \\ g(s^x_n) & \text{se } s^x_n \in B. \end{cases}$

- $s^x_{-(n+1)} = \begin{cases} f^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } B \\ g^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } A \end{cases}$

Note que s^x_z pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s^x_z \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s^x_z \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s^y_z = s^x_k$. Note que, então $s^y_{z+m} = s^x_{k+m}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $S^y = S^x$.

Com isso, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s^x_z está definido para todo z, f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.

- Se $s^x_z \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

- Se $s^x_z \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

□

Uma aplicação simples do próximo resultado é que sempre podemos aumentar os tamanhos:

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \longrightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \longrightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A, temos que $x \notin f(x) = A$.

- Se $x \notin A$, então, pela definição de A, temos que $x \in f(x) = A$.

□

Uma aplicação com circunferências

Essa aplicação foi tirada de [2].

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que tivermos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem $\leq$ sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem qualquer sobre X. Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X. Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). □

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0. Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1. Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n, contradição. □

A situação muda bem quando passamos para o $\mathbb{R}^3$. Comecemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi$ é um plano tal que $x \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de $\mathcal{C}$ em P (basicamente, porque

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Considere

$$S = \{p \in \pi : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}.$$

Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$. Seja $p \in \pi \smallsetminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p. A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de $\mathbb{R}$. Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. $\square$

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X. Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere $\leq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}^3$ com a propriedade apresentada na Proposição 1.3.4. Seja x o menor ponto de $\mathbb{R}^3$ segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x. Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

(i) se $y < z$, então $y \in C_y$.

(ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

(i) $z \in C_z$.

(ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguimos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.
- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X e seja $f : X \longrightarrow Y$ bijeção. Mostre que $\preceq$ dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y.

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \longrightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Este é um um roteiro para mostrar que, se vale o Teorema de Cantor-Bernstein-Schoroeder para conjuntos disjuntos, então vale para o caso geral. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injetoras.

(a) Considere os conjuntos $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$ e $B' = \{(b, 1) : b \in B\}$. Note que tais conjuntos são disjuntos.

(b) Mostre que $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$.

(c) Conclua o resultado.

Alongamento 1.3.11. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.12. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \longrightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Na sequência, vamos apresentar alguns resultados envolvendo reticulados. Entre eles, vamos apresentar um teorema de Tarski ([4]) e, como aplicação de tal teorema, uma nova demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.3.2).

Exercício 1.3.13. Dizemos que uma ordem $(A, \leq)$ é um **reticulado** se, para $a, b \in A$, existe o supremo do conjunto $\{a, b\}$ (normalmente denotado por $a \vee b$) e e também o ínfimo (denotado por $a \wedge b$). Dizemos que $(A, \leq)$ é um **reticulado completo** se, para todo $B \subset A$, existe o supremo e o ínfimo de B (denotados por $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ respectivamente).

(a) Mostre que toda ordem total é um reticulado.

(b) Mostre que $[a, b]$ com a ordem usual de $\mathbb{R}$ é um reticulado completo.

(c) Dados $a, b \in A$, denotamos por $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ e } x \leq b\}$. Mostre que, se $a \leq b$, então $[a, b]$ é um reticulado completo.

Exercício 1.3.14. Seja $(A, \leq)$ um reticulado completo. Seja $f : A \to A$ monótona não decrescente, isto é, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Este é um roteiro para mostrar que o conjunto $F = \{a \in A : f(a) = a\}$ dos pontos fixos de f é um reticulado completo.

(a) Considere $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Note que $B \neq \emptyset$.

(b) Mostre que, para todo $b \in B$, $f(b) \in B$.

(c) Seja $s = \bigvee B$. Mostre que $s \in B$.

(d) Note que s é um ponto fixo.

(e) Note que não existe um ponto fixo maior que s.

(f) Encontre i o menor ponto fixo.

(g) Considere $1 = \bigvee A$. Seja $C \subset F$. Seja $c = \bigvee C$. Note que $f[[c, 1]] \subset [c, 1]$.

(h) Note que, assim, existe um supremo para os pontos fixos de f restrita a $[c, 1]$. Note que tal supremo é o próprio c.

(i) Conclua que F é completa.

Exercício 1.3.15. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras.

(a) Note que $(\wp(X), \subset)$ é um reticulado completo.

(b) Mostre que $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ dada por $\varphi(A) = X \smallsetminus (g[Y \smallsetminus f[A]])$ é uma função monótona não decrescente.

(c) Seja $F \subset X$ ponto fixo de φ. Mostre que $i : X \to Y$ dada por

$$i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \smallsetminus F \end{cases}$$

é uma bijeção entre X e Y.

Exercício 1.3.16. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ função monótona não decrescente. Mostre que, além de f ter pontos fixos, o conjunto de tais pontos admite máximo e mínimo.

Note que nem precisamos de f contínua.

Capítulo 2

Ordinais, cardinais e outros

2.1 Ordinais

Já vimos que boa ordem é algo bastante importante neste texto. Agora, vamos apresentar certos conjuntos que, de alguma forma, são representantes canônicos de todas as boas ordens possíveis:

Definição 2.1.1. Dizemos que α é um **ordinal** se ele é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Cuidado aqui, dizemos que $\in$ é uma boa ordem no sentido de ordem estrita. Para ficarmos com a definição formal, precisamos trabalhar com "$\in$ ou igual".

Note que, pelo que provamos anteriormente, cada $n \in \omega$ é um ordinal. Mais que isso, o próprio conjunto ω também é um ordinal. E, não é muito difícil de ver, $\omega \cup \{\omega\}$ também é um ordinal.

Note que, como cada ordinal é transitivo, então todo elemento seu também é bem ordenado por $\in$. Assim, podemos provar:

Proposição 2.1.2. *Seja α um ordinal. Se $x \in \alpha$, então x é um ordinal.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que x é transitivo. Sejam a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$. Como α é transitivo, temos que $b \in \alpha$. E, pelo mesmo motivo, $a \in \alpha$. Como $\in$ é uma ordem sobre α, temos que esta é uma relação transitiva e, portanto, $a \in x$. □

Proposição 2.1.3. *Seja X um conjunto não vazio de ordinais. Então $\bigcap X$ é um ordinal.*

Demonstração. Basta notar que intersecção de conjuntos transitivos é transitivo e que, dado $\alpha \in X$, temos que $\bigcap X \subset \alpha$ e, portanto, como $\in$ bem ordena α, $\in$ bem ordena $\bigcap X$. □

Na sequência, vamos provar alguns resultados técnicos para ordinais. Um dos objetivos é formalizar indução e boa ordem sobre ordinais. Comecemos com a ideia de sucessor de um ordinal.

Proposição 2.1.4. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \in \alpha$. Suponha que $\gamma \in \alpha$ seja tal que γ é o menor tal que $\beta \in \gamma$. Então $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$.*

Demonstração. Como γ é um ordinal, temos que $\beta \subset \gamma$ e, portanto, $\beta \cup \{\beta\} \subset \gamma$. Por outro lado, dado $\xi \in \gamma$, temos pela minimalidade de γ que $\beta \notin \xi$. Ou seja, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos $\xi \in \beta$ ou $\xi = \beta$. Desta forma, temos que $\gamma \subset \beta \cup \{\beta\}$. □

Note que pela transitividade dos ordinais, temos que todos os elementos aqui pertencem a α.

Proposição 2.1.5. *Seja α um ordinal. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ para algum β ou, para todo $\beta \in \alpha$, temos $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$. Suponha que exista $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$. Podemos supor que γ seja o menor com tal propriedade. Note que $\beta \in \gamma$ (de fato, como $\gamma, \beta \in \alpha$, se $\beta \notin \gamma$, como $\in$ é uma ordem total sobre α, teríamos que $\beta = \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Mas ambos esses casos contrariam o fato que $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$). Então, pelo resultado anterior, temos que $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ contrariando o fato que $\gamma \in \alpha$ e $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. □

Os resultados anteriores nos motivam a denotar $\alpha \cup \{\alpha\}$ como $s(\alpha)$ (se α é um ordinal). Ainda mais, costumamos denotar por $\alpha + 1$ tal conjunto. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.6. Seja α um ordinal. Se $\alpha = \beta + 1$ para algum β ordinal, dizemos que α é um **ordinal sucessor**. Caso contrário, dizemos que α é um **ordinal limite**.

Note que todo $n \in \omega$ não vazio é um ordinal sucessor. Note também que ω é um ordinal limite (veja o Alongamento 2.1.22).

Lema 2.1.7. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$ e existe $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Então $\beta \subset \gamma$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \beta$. Vamos provar que $\xi \in \gamma$. Suponha que não. Note que $\xi, \gamma \in \alpha$. Logo, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos dois casos:

- $\xi = \gamma$. Mas isso é um contradição pois neste caso temos $\gamma \in \beta$, contrariando a definição de γ.

- $\gamma \in \xi$. Mas isso é uma contradição, pois isso também implica que $\gamma \in \beta$.

$\square$

Da mesma forma que ocorre com os elementos de ω, temos a suguinte tradução:

Lema 2.1.8. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$. Então $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.*

Demonstração. Suponha $\beta \neq \alpha$. Seja $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Podemos supor γ o menor com tal propriedade. Vamos mostrar que $\gamma = \beta$ (note que isso implica que $\beta \in \alpha$ como queremos). Suponha que não. Pelo lema anterior, temos que $\beta \subset \gamma$. Então existe $\gamma' \in \gamma \smallsetminus \beta$. Logo, temos que $\gamma' \in \alpha \smallsetminus \beta$, contrariando o fato que γ era o menor com tal propriedade. $\square$

Teorema 2.1.9 (Indução para ordinais). *Seja φ uma fórmula tal que, se para todo α ordinal, temos que $\varphi(\beta)$ para $\beta \in \alpha$, então $\varphi(\alpha)$. Então, para todo α ordinal, temos que $\varphi(\alpha)$.*

Demonstração. Seja α um ordinal qualquer. Defina

$$B = \{\xi \in \alpha : \varphi(\xi)\}.$$

Se $B = \alpha$ então, por hipótese, temos que vale $\varphi(\alpha)$. Caso contrário, seja $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus B)$. Note que, como $\gamma \subset \alpha$, temos que, para todo $\xi \in \gamma$, vale $\varphi(\xi)$. Logo, por hipótese, vale $\varphi(\gamma)$, contrariando o fato que $\gamma \notin B$. $\square$

Estamos usando aqui o mínimo com relação ao $\in$.

Com isso, podemos provar que quaisquer dois ordinais são comparáveis com relação a $\subset$:

Proposição 2.1.10. *Sejam α, β ordinais. Então vale $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$.*

Demonstração. Vamos provar a afirmação por indução sobre α. Ou seja, fixe β ordinal e suponha que, para todo $\xi \in \alpha$, temos que vale

$$\xi \subset \beta \text{ ou } \beta \subset \xi$$

Suponha que exista $\xi \in \alpha$ tal que $\beta \subset \xi$. Então, pela transitividade, temos que que $\xi \subset \alpha$ e, assim, $\beta \subset \alpha$.

Suponha que o caso anterior não ocorra. Então, para todo $\xi \in \alpha$, temos que $\xi \subset \beta$. Pelo Lema 2.1.8, temos dois casos:

- $\xi = \beta$. Neste caso, pela transitividade, temos que $\beta \subset \alpha$.

- $\xi \in \beta$. Note que isso vale para todo $\xi \in \alpha$. Logo, $\alpha \subset \beta$.

□

Mais do que funcionar como uma ordem total para os ordinais, a inclusão funciona como uma boa ordem:

A ideia é que se certa propriedade vale para algum ordinal, então existe o menor ordinal que a satisfaz. Tomamos o sucessor para garantir que tal conjunto seja não vazio.

Teorema 2.1.11 (**Boa ordem para ordinais**). *Seja φ uma fórmula sobre ordinais tal que pelo menos um ordinal a satisfaça. Então existe um ordinal α tal que vale $\varphi(\alpha)$ e, se β é um ordinal tal que $\varphi(\beta)$, então $\alpha \subset \beta$.*

Demonstração. Seja ξ ordinal tal que vale $\varphi(\xi)$. Seja

$$\alpha = \min\{\eta \in s(\xi) : \varphi(\eta)\}.$$

Seja β um ordinal tal que vale $\varphi(\beta)$. Precisamos mostrar que $\alpha \subset \beta$. Suponha que não. Então, pela Proposicao 2.1.10, temos que $\beta \subset \alpha$. Note que, assim, temos que $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$. Mas ambos implicam em contradição. □

Com isso, podemos provar que "$\in \vee =$" funciona como uma boa ordem sobre os ordinais. Desta forma, muitas vezes vamos denotar por $<$ quando queremos dizer $\in$ com relação a ordinais. Também utilizaremos a notação min como se $\in$ fosse uma ordem comum. Uma observação importante a ser feita é que não podemos dizer que $\in$ é de fato uma boa ordem sobre os ordinais basicamente por que os ordinais não formam um conjunto:

Proposição 2.1.12. *A coleção de todos os ordinais não forma um conjunto.*

Demonstração. Suponha que A seja o conjunto de todos os ordinais. Note que A é também um ordinal. Logo, $A \in A$, o que é uma contradição. □

Aqui você poderia dizer que $A \in A$ contraria o axioma da fundação. Mas note que nem precisamos disso, basta lembrar que $\in$ é uma ordem estrita dentro de ordinais.

Formalmente, dada um fórmula φ sobre conjuntos, chamamos a coleção de todos os conjuntos que a satisfazem de uma **classe**. Claramente, todo conjunto é uma classe. Assim, para indicarmos que uma classe não é um conjunto, diremos que ela é uma **classe própria**.

Também é possível fazer recursão sobre ordinais:

Aqui pode parecer que estamos quantificando sobre fórmulas (o que não é permitido). A formalização é: para cada fórmula φ, provamos que a fórmula ψ apresentada satisfaz o enunciado - ou seja, temos infinitos teoremas.

Teorema 2.1.13 (**Recursão para ordinais**). *Seja φ uma fórmula do tipo função. Então existe uma fórmula ψ também do tipo função tal que, para todo ordinal α, vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, vale $\varphi((a_\xi)_{\xi<\alpha}, b)$, onde cada a_ξ é tal que vale $\psi(\alpha, a_\alpha)$. Além disso, se ψ' é outra fórmula satisfazendo tal enunciado, temos que, para todo ordinal α e todo conjunto b, temos que vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, $\psi'(\alpha, b)$.*

Demonstração. A parte da unicidade segue facilmente da "boa ordem" sobre os ordinais (exercício). Vamos então mostrar que existe alguma ψ.

Considere $\psi(\alpha, b)$ a afirmação:

Existe uma sequência $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ tal que vale $\varphi((a_\xi)_{\xi\in\alpha}, b)$ e, para todo $\xi \in \alpha$, vale $\varphi((a_\eta)_{\eta\in\xi}, a_\xi)$.

Por indução, pode-se mostrar que ψ está bem definida e que é do tipo função como gostaríamos. $\square$

Vamos terminar esta seção mostrando que os ordinais representam (de forma única) cada boa ordem:

Definição 2.1.14. Sejam X e Y conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \leq b$.

Proposição 2.1.15. *Sejam α e β ordinais. Se existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Vamos fazer por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, então claramente $\beta = \emptyset$. Agora suponha que o resultado vale para todo $\xi < \alpha$. Suponha que exista $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem. Seja $\xi < \alpha$. Note que $f \restriction \xi : \xi \longrightarrow A$ é um isomorfismo de ordem, onde $A \subset \beta$. Note que A é um segmento inicial de β e, portanto, $A = \gamma$ para algum $\gamma \in \beta$. Pela hipótese de indução, temos que $\xi = \gamma$. Ou seja, temos que $\alpha \subset \beta$. Trabalhando com a inversa, obtemos que $\beta \subset \alpha$. $\square$

Teorema 2.1.16. *Seja X um conjunto bem ordenado. Então existe um, e apenas um, ordinal α tal que existe $f : X \longrightarrow \alpha$ isomorfismo de ordem.*

Demonstração. A unicidade segue do resultado anterior. Para a existência, basta definir f recursivamente como $f(x) = \min\{\beta : \forall y < x\ f(y) < \beta\}$. $\square$

Ordinais compactos

Fixado um ordinal α, há uma topologia bastante natural sobre ele, a topologia da ordem:

Definição 2.1.17. Dado um ordinal α, chamamos de **topologia da ordem** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $]\xi, \eta[$ e $[0, \xi[$ para todo $\xi, \eta \in \alpha$.

Os intervalos de ordinais são definidos de forma análoga aos intervalos de reais.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos um ordinal como um espaço topológico, estaremos adotando a topologia da ordem.

Proposição 2.1.18. *Seja α um ordinal. Se $A \subset \alpha$ é* **limitado***, isto é, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \leq \beta$ para todo $a \in A$, admite supremo. Lembrando, o* **supremo** *é o menor dos majorantes de um conjunto.*

Demonstração. Como A é limitado, ele possui pelo menos um majorante. Logo, o conjunto dos majorantes de A admite mínimo. □

O seguinte resultado usaremos implicitamente diversas vezes ao longo do texto:

Proposição 2.1.19. *Seja α ordinal limite. Se $\beta \in \alpha$, então $\beta + 1 \in \alpha$.*

Demonstração. Temos que $\beta + 1 \subset \alpha$ ou que $\alpha \subset \beta + 1$. Como $\beta + 1 \neq \alpha$ (pois α é não é sucessor), temos que

$$\beta + 1 \in \alpha \text{ ou } \alpha \in \beta + 1$$

Note que, se $\alpha \in \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, temos, novamente por $\alpha \neq \beta$, que $\alpha \in \beta$ - mas isso contraria o fato que $\beta \in \alpha$. Logo, obtemos o desejado. □

Proposição 2.1.20. *Se α é um ordinal limite diferente de 0, então α não é compacto.*

Demonstração. Basta notar que $\{[0, \beta + 1[: \beta \in \alpha\}$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita. □

Proposição 2.1.21. *Se α é um ordinal sucessor, então α é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Seja β tal que $\alpha = \beta+1$. Se β for sucessor, terminamos (afinal, α será um compacto adicionado de um ponto). Suponha que β não seja sucessor. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos para α. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $\beta \in C$. Note que existe ξ tal que $]\xi, \beta] \subset C$. E, como β é limite, $\xi + 1 < \beta$. Por hipótese de indução, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $\xi + 1 = [0, \xi] \subset \bigcup \mathcal{C}'$. Note, então, $\mathcal{C}' \cup \{C\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \beta] = \alpha$. □

Alongamentos

Alongamento 2.1.22. Mostre que todo $n \in \omega$ não nulo é um ordinal sucessor. Mostre que ω é um ordinal limite.

Alongamento 2.1.23. Mostre que, para todo α ordinal, temos que $[0, \alpha] = [0, \alpha + 1[$.

Alongamento 2.1.24. Mostre que no Teorema 2.1.16 o isomorfismo também é único.

Alongamento 2.1.25. Considere ω com a seguinte ordem: se $a, b \neq 0$, então $a \preceq b$ se, e somente se, $a \leq b$ ($\leq$ é a ordem usual) e $a \leq 0$ para todo $a \in \omega$.

(a) Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

(b) Mostre que ω com esta ordem é isomorfo a $\omega + 1$.

Exercícios

Exercício 2.1.26. Mostre que, se X é um conjunto, não existe uma função com domínio X e sobrejetora nos ordinais.

Exercício 2.1.27. Mostre que não existe um conjunto ilimitado nos ordinais.

Exercício 2.1.28. Mostre que a coleção dos ordinais sucessores é uma classe própria.

Exercício 2.1.29. Mostre que num ordinal α, os únicos pontos isolados são os sucessores e o 0.

x é dito um **ponto isolado** se $\{x\}$ é aberto.

Exercício 2.1.30. Mostre que todo ordinal é um **espaço de Hausdorff**, isto é, dados dois pontos x, y distintos, existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Exercício 2.1.31. Mostre que se $\alpha = \sup A$, então $\alpha \in \overline{A}$.

Exercício 2.1.32. Sejam X bem ordenado e Y totalmente ordenado. Chamamos de **ordem lexicográfica** a seguinte ordem sobre Y^X: $f < g$ se $f(x) < g(x)$ onde $x = \min\{z \in X : f(z) \neq g(z)\}$. Mostre que isso é de fato uma ordem e mostre também que tal ordem é total. Mostre que se, além disso, Y é bem ordenado, então tal ordem é uma boa ordem.

Exercício 2.1.33. Sejam α e β ordinais. Defina $\alpha + \beta$ como o único ordinal que é isomorfo a $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ com a ordem lexicográfica. Verifique se é verdadeira a afirmação "$\omega + 1 = 1 + \omega$".

Exercício 2.1.34. Dizemos que uma função de ordinais em ordinais é uma **função normal** se $f(\alpha) < f(\beta)$ se $\alpha < \beta$ e $(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$ se α é limite e diferente de $\emptyset$. Seja f uma função normal. Mostre que:

(a) $f(\sup A) = \sup\{f(a) : a \in A\}$ para todo A conjunto de ordinais.

(b) $f(\alpha) \geq \alpha$ para todo α.

(c) dado β ordinal, existe $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

2.2 Medindo a complexidade dos conjuntos

Nesta seção, vamos mostrar uma maneira de medir o quão complicado é montar um determinado conjunto. A intuição é mais ou menos assim: $\emptyset$ é o mais simples, $\{\emptyset\}$ é um pouco mais complicado, enquanto $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ é um pouco mais ainda.

Comecemos com um resultado simples:

Chamamos $tr(X)$ de **fecho transitivo** de X.

Proposição 2.2.1. *Seja X um conjunto qualquer. Então existe um conjunto transitivo $tr(X)$ onde $X \subset tr(X)$ e, dado qualquer conjunto Y transitivo tal que $X \subset Y$, temos que $tr(X) \subset Y$.*

Cuidado aqui, $\bigcup T_n = \{x : \exists y \in T_n \; x \in y\}$.

Demonstração. Defina $T_0 = X$ e $T_{n+1} = \bigcup T_n$ para $n \in \omega$. Defina $tr(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Claramente, $X \subset tr(X)$ e $tr(X)$ é transitivo. Note também que, se $x \in T_n$ para algum $n \in \omega$, $x \in Y$ para qualquer Y transitivo tal que $X \subset Y$. $\square$

Proposição 2.2.2. *Toda classe não vazia de conjuntos admite um elemento $\in$-minimal - isto é, um elemento a tal que não existe um elemento b na classe tal que $b \in a$.*

Demonstração. Lembre que uma classe é a coleção de conjuntos que satisfazem uma determinada fórmula. Assim, seja φ uma fórmula tal que exista X tal que vale $\varphi(X)$. Considere

$$A = \{a \in tr(X) : \varphi(a)\}$$

Note que A é um conjunto pelo axioma da separação. Assim, pelo axioma da fundação, existe $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$. Note que tal a é minimal: se $b \in a$ é tal que vale $\varphi(b)$, teríamos que $b \in A$ e, portanto, $b \in A \cap a$, contrariando a definição de a. $\square$

Esse resultado nos dá que podemos definir algo recursivamente sobre os próprios elementos. Para ficar mais claro, vejamos isso em ação, justamente no exemplo que nos será importante agora:

Definição 2.2.3. Seja X um conjunto. Definimos $rank(\emptyset) = \emptyset$ e denotamos por $rank(X)$= $\sup\{rank(y) + 1 : y \in X\}$.

Note que isso está bem definido. De fato, suponha que não. Considere todos os conjuntos X de forma que não foi possível definir o $rank$. Seja X o $\in$ minimal sem $rank$. Mas note que, então, todo elemento de X tem rank e, portanto, X também tem.

Formalmente, deveríamos trabalhar como na demonstração do teorema de recursão.

Além do $rank$ dar uma medida sobre a complexidade do conjunto, também nos dá uma ideia sobre sobre sua construção. Considere a seguinte construção recursiva:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$

Vamos provar que todo conjunto pertence a algum dos V_α's. Para isso, vamos provar o seguinte resultado:

Lema 2.2.4. *Sejam α, β ordinais. Temos:*

(a) V_α é transitivo.

(b) $V_\alpha \subset V_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

(c) se $X \subset V_\alpha$ e $\alpha < \beta$, então $X \in V_\beta$.

(d) se $X \in V_\alpha$, então $X \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

Demonstração. (a) Por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, é imediato. Se α é limite, o resultado é imediato uma vez que V_α é união de conjuntos transitivos. Finalmente, se $\alpha = \beta+1$, temos que, dado $X \in V_\alpha$, $X \subset V_\beta$. Logo, se $Y \in X$, temos que $Y \in V_\beta$. Mas, como V_β é transitivo, $Y \subset V_\beta$ e, portanto, $Y \in V_{\beta+1}$ como queríamos.

(b) Por indução sobre β. Se $\beta = \gamma+1$. Assim, se $\alpha \leq \gamma$, temos, por hipótese, que $V_\alpha \subset V_\gamma$. Logo, $V_\alpha \in V_{\gamma+1}$. Como $V_{\gamma+1}$ é transitivo, temos o que queríamos. Agora suponha que β é limite. Neste caso, é imediato que $V_\alpha \subset V_\beta$ pela definição de V_β.

(c) Basta notar que $X \in V_{\alpha+1} \subset V_\beta$.

(d) Por indução sobre V_α. Se $\alpha = \beta + 1$, o resultado é imediato ($\xi = \beta$). Se α é limite, então $X \in V_\beta$ para algum $\beta < \alpha$ e portanto o resultado segue por indução e pelo fato que $V_\beta \subset V_\alpha$.

□

Ou seja, todo conjunto é formado apenas por $\emptyset$ e pares de { e }. Se denotarmos $\emptyset$ por {}, então todo conjunto nada mais é que uma coleção de { e }. Parece um pouco triste.

Proposição 2.2.5. *Seja X um conjunto. Então $rank(X) = \alpha$ se, e somente se, $X \subset V_\alpha$ e $X \not\subset V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Suponha o resultado para todo $\xi < \alpha$. Seja X conjunto tal que $rank(X) = \alpha$. Assim, todo $Y \in X$ é tal que $rank(Y) < \alpha$ e, portanto, $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Logo, $Y \in V_\alpha$ pelo lema anterior. Ou seja, $X \subset V_\alpha$. Note também que $X \not\subset V_\xi$ para todo $\xi < \alpha$ por hipótese de indução.

Por outro lado, seja $X \subset V_\alpha \smallsetminus \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$. Dado $Y \in X$, temos, pelo lema anterior, que $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Portanto, $rank(Y) \leq \xi$. Assim, já temos que $rank(X) \leq \alpha$. Por outro lado, dado qualquer $\xi < \alpha$, existe $Y \in X$ tal que $rank(Y) \geq \xi$. Caso contrário, todo $Y \in X$ seria tal que $Y \in V_\xi$ e, portanto, $X \subset V_\xi$, uma contradição. □

Acabando com as escolhas

Esta seção foi bastante baseada no livro [3].

Nesta seção, vamos fechar as implicações para as diversas formulações equivalentes ao princípio da boa ordem e o axioma da escolha.

Proposição 2.2.6. *Se vale o axioma das múltiplas escolhas, vale que todo conjunto ordenado admite um conjunto maximal de elementos dois a dois incomparáveis.*

Demonstração. Seja X um conjunto ordenado. Pelo axioma das múltiplas escolhas, existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subset X$ não vazio, $f(A) \subset A$ é finito e não vazio. Defina $g : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ da seguinte forma, dado $A \subset X$:

$$g(A) = \{a \in f(A) : a \text{ é minimal em } f(A)\}$$

Note que, trivialmente, cada $g(A)$ é um suconjunto finito de A de elementos dois a dois incomparáveis.

Considere a seguinte construção recursiva sobre os ordinais:

- $A_0 = g(X)$
- $A_\alpha = g(\{x \in X : x \text{ é incomparável com cada } b \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\})$.

Note que os elementos de X que pertencem a algum A_α formam um conjunto - vamos chamar tal conjunto de A. Vamos provar que tal A é um subconjunto maximal de elementos incomparáveis. Suponha que $a, b \in A$ sejam comparáveis. Seja α tal que $a \in A_\alpha$ e $b \in A_\beta$. Se $\alpha = \beta$, temos uma contradição pois tanto a como b são minimais em A_α. Sem perda de generalidade, suponha $\alpha < \beta$. Então $b \notin A_\beta$ já que b é comparável com a, contradição.

Basta usar o axioma da separação para tomar o subconjunto de X dos elementos para os quais existe um ordinal etc.

Finalmente, vamos provar que A é maximal. Note que, em algum ordinal α, $A_\alpha = \emptyset$ (caso contrário, teríamos que os ordinais formariam um conjunto). Mas note que isso só é possivel se não "sobraram" elementos que possam estender A. $\square$

O próximo lema é útil na hora de encontrar boas ordens:

Lema 2.2.7. *Seja X um conjunto não vazio. Se existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ onde $f(V) \in V$ para todo $V \in \wp(X)$ não vazio, então existe uma boa ordem sobre X.*

Uma função assim é chamada de uma **função escolha** para $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$.

Demonstração. Defina a seguinte recursão sobre os ordinais (antes de começar, fixe um $Y \notin X$ qualquer). Tomamos $x_0 = f(X)$ e

$$x_\alpha = \begin{cases} f(X \smallsetminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}) & \text{se } \{x_\beta : \beta < \alpha\} \not\supset X \\ Y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que f precisa valer Y a partir de algum ordinal α, caso contrário teríamos que os ordinais formariam um conjunto pelo axioma da substituição. Note que assim $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ induz uma boa ordem sobre X. $\square$

Em particular, esse lema nos dá o seguinte:

Corolário 2.2.8. *Se vale o axioma da escolha, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja f uma função escolha sobre $\wp(X)$. Pelo lema anterior, temos que existe uma boa ordem sobre X. $\square$

Proposição 2.2.9. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos dois a dois não comparáveis, então todo conjunto totalmente ordenado admite uma boa ordem.*

Demonstração. Seja X totalmente ordenado por $<$. Se mostrarmos que existe uma função escolha para $\wp(X) \smallsetminus \emptyset$, o resultado segue pelo lema anterior. Seja $\mathcal{Y}$ o conjunto de todos os pares da forma (Y, y), onde $y \in Y \subset X$. Defina sobre tal conjunto a ordem

$$(Y_1, y_1) \preceq (Y_2, y_2) \text{ se } Y_1 = Y_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

Seja $A \subset \mathcal{Y}$ maximal tal que seus elementos são dois a dois incomparáveis. Vamos mostrar que A é uma função escolha desejada.

Note que, dado $Y \subset X$ não vazio, existe algum par da forma $(Y, y) \in \mathcal{Y}$ pois, caso contrário, qualquer um desta forma seria incomparável com todos os elementos de A. Mais que isso, como a ordem sobre X é total, existe um único elemento com tal formato. Ou seja, pela segunda parte, temos que A é função e, pela primeira, que o domínio de A é todo $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$. □

Proposição 2.2.10. *Se todo conjunto totalmente ordenado pode ser bem ordenado, então dado um conjunto bem ordenado A, temos que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Identifique o $\wp(A)$ com 2^A (veja o Exercício 1.3.12). Coloque em 2^A a ordem lexicográfica (veja Exercício 2.1.32). Assim, $\wp(A)$ fica totalmente ordenado e, portanto, bem ordenável. □

Dos resultados anteriores, obtemos:

Corolário 2.2.11. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos incomparáveis, vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Note que nossa hipótese implica que todo conjunto totalmente ordenado é bem ordenável (Proposição 2.2.9). Já essa condição implica o que queremos pela Proposição 2.2.10. □

Para fechar todas as equivalências, resta provar o seguinte:

Proposição 2.2.12. *Se vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenado, então vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Primeiramente, note que é suficiente mostrarmos que V_α é bem ordenado para todo α ordinal limite (já que todo X é suconjunto de algum V_α desta forma). Seja α ordinal limite. Se mostrarmos que existe uma família $(W_\beta)_{\beta<\alpha}$ onde cada W_β é uma boa ordem sobre V_β teremos o resultado (é fácil construir uma boa ordem a partir disso). Seja κ o menor ordinal tal que não existe uma função injetora de κ em V_α. Por hipótese, $\wp(\kappa)$ admite uma boa ordem $\leq$. Vamos agora definir cada W_β usando esta boa ordem recursivamente:

Aqui não podemos simplesmente aplicar indução, porque precisamos dizer qual boa ordem pegamos para cada β, caso contrário não temos como garantir a existência da família sem o axioma da escolha.

- $W_0 = \emptyset$
- se β é limite, definimos W_β de maneira padrão usando cada W_ξ com $\xi < \beta$.

- se $\beta = \gamma + 1$, então $V_\beta = \wp(V_\gamma)$. Por hipótese, V_γ é bem ordenado por W_γ e, portanto, tem um isomorfismo de ordem com algum $\xi < \kappa$. Daí usando esse isomorfismo mais a boa ordem $\leq$ de $\wp(\kappa)$, obtemos uma boa ordem sobre V_β.

$\square$

Com a sequência apresentada acima, mais os resultados anteriores, temos a equivalência entre princípio da boa ordem, lema de Zorn, axioma da escolha e todo espaço vetorial tem base (veja a Figura 2.1).

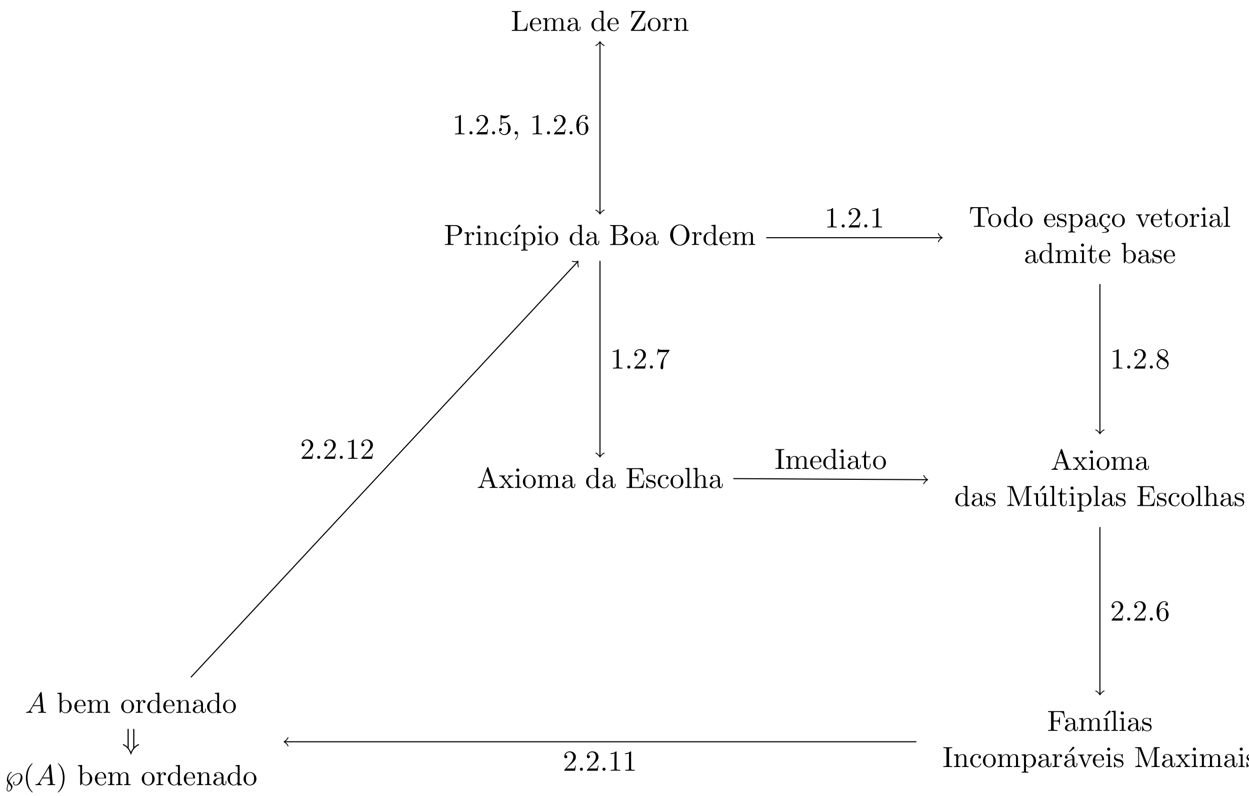

Figura 2.1: Equivalências do axioma da escolha

Alongamentos

Alongamento 2.2.13. Prove a tese da Proposição 2.2.6 supondo que vale o Lema de Zorn.

Exercícios

Exercício 2.2.14. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ é $\in$-crescente se $a_n \in a_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Dizemos que a mesma sequência é $\in$-decrescente se $a_{n+1} \in a_n$ para todo $n \in \omega$. Dê um exemplo de um destes tipos de sequências e prove que o outro tipo não existe.

Exercício 2.2.15. Seja α um ordinal. Determine $rank(\alpha)$.

2.3 Cardinais

Do mesmo jeito que ordinais representam todas as boas ordens, cardinais representam todos os tamanhos de conjuntos:

Definição 2.3.1. Seja α um ordinal. Dizemos que α é um **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ tal que $|\alpha| = |\beta|$.

Note que, dado um conjunto X qualquer, ele tem bijeção com algum ordinal, via princípio da boa ordem. Se tomarmos o menor ordinal tal que existe uma bijeção com X, obtemos um cardinal. Além disso, pela definição de cardinais, tal cardinal é único. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.2. Seja X um conjunto. Denotamos por $|X|$ o único cardinal κ tal que existe uma bijeção entre X e κ.

Note que isso estende o uso anterior que fazíamos de $|\cdot|$, afinal, existe uma bijeção entre X e Y se, e somente se, $|X| = |Y|$ como acima.

Note também que, dado um cardinal qualquer, existe um ordinal maior que ele que não tem bijeção com ele (veja o Alongamento 2.3.19). Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.3. Seja κ um cardinal. Denotamos por κ^+ o menor cardinal que é maior que κ.

Não confundir κ^+ com $\kappa + 1$ (soma ordinal).

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.3.4. Denotamos por $\aleph_0 = \omega$. Se $\aleph_\beta$ está definido para todo $\beta < \alpha$ (α um ordinal), denotamos por $\aleph_\alpha = \kappa$ onde κ é o menor cardinal tal que $\aleph_\beta < \kappa$ para todo $\beta < \alpha$.

Desta forma, é fácil ver que $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$. Além disso, muitas vezes usaremos a notação ω_α no lugar de $\aleph_\alpha$ quando quisermos destacar que queremos trabalhar com a ordem de $\aleph_\alpha$.

Dizemos que um conjunto X é **finito** se existe $n \in \aleph_0$ tal que $|X| = n$. Dizemos que X é **infinito** caso contrário.

Uma ordem bacana sobre pares de ordinais

Vejamos agora como definir uma ordem sobre pares de ordinais. Isso vai nos facilitar na hora de calcular o tamanho de produtos. Mas antes, vamos definir uma notação que vai facilitar bastante:

Definição 2.3.5. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Dado $x \in X$, denotamos por $\downarrow x$ o conjunto $\{y \in X : y < x\}$.

Definição 2.3.6. Sejam (α, β) e (γ, δ) pares de ordinais. Vamos denotar por $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ se

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ e $\alpha < \gamma$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$, $\alpha = \gamma$ e $\beta < \delta$.

Ou seja, essa ordem começa assim:

$$(0,0) < (0,1) < (1,1) < (0,2) < (1,2) < (2,2) < \cdots < (0,\omega) < \cdots$$

Formalmente não é uma ordem, uma vez que pares de ordinais não é um conjunto. Mas deve dar para entender.

Não é difícil notar que $\leq$ é uma ordem e que qualquer conjunto não vazio de pares de ordinais admite mínimo com tal ordem (veja o Alongamento 2.3.20). Note também que, para qualquer ordinal α, temos (veja o Alongamento 2.3.21):

$$\alpha \times \alpha = \downarrow (0, \alpha)$$

Considere, para cada α, β ordinais, $o(\alpha, \beta)$ o único ordinal tal que $o(\alpha, \beta)$ é isomorfo a $\downarrow (\alpha, \beta)$.

Lema 2.3.7. *$o(0, \omega) = \omega$.*

Demonstração. Note que $\downarrow (0, \omega) = \omega \times \omega$. Como $\downarrow (0, \omega)$ é infinito, basta mostrarmos que, para cada elemento de $\downarrow (0, \omega)$ só existem finitos elementos menores que ele. De fato, dado $(a, b) \in \omega \times \omega$, temos que $(x, y) \leq (a, b)$ é tal que $x, y \leq \max\{a, b\}$. $\square$

Note que, como $o(0,\alpha) < o(0,\beta)$, se $\alpha < \beta$, temos que $\alpha \leq o(0,\alpha)$ para todo α. Vejamos a outra desigualdade para o caso de cardinais:

Proposição 2.3.8. *Para todo cardinal infinito κ, $o(0,\kappa) = \kappa$. Em particular, existe uma bijeção entre $\kappa \times \kappa$ e κ.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre κ. Note que, para $\kappa = \aleph_0$, já temos o resultado. Suponha então que o resultado é válido para todo $\eta < \kappa$ e vamos mostrar para κ. Suponha que não. Então $\kappa < o(0,\kappa)$. Logo, existe $(\gamma,\delta) < (0,\kappa)$ tal que $\kappa = o(\gamma,\delta)$. Note que, então, $\gamma,\delta < \kappa$. Seja η tal que

$$\gamma, \delta < \eta < \alpha.$$

Note que $(\gamma,\delta) < (0,\eta)$. Assim, $\kappa < o(0,\eta)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} |o(0,\eta)| &= |\eta \times \eta| \\ &= ||\eta| \times |\eta||. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, $||\eta| \times |\eta|| = o(0,|\eta|) = |\eta|$. Contradição já que $|\eta| < \kappa$. □

Corolário 2.3.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa = |\kappa \times \kappa|$.*

Corolário 2.3.10. *Seja X um conjunto infinito. Então $|X| = |X \times X|$.*

Corolário 2.3.11. *Sejam X, Y conjuntos infinitos. Então $|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.*

Demonstração. Suponha $|X| \leq |Y|$. Então $|X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|$. Como $|Y| \leq |X \times Y|$, temos o resultado. □

Corolário 2.3.12. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$ (κ é infinito) e cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| \leq \kappa$. Então $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demonstração. Note que podemos supor que cada $|F| = \kappa$. Fixe $\{F_\xi : \xi < \kappa\} = \mathcal{F}$ e, para cada $\xi < \kappa$, seja $f_\xi : \kappa \longrightarrow F_\xi$ bijetora. Note que $\varphi : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ dada por

$$\varphi(\alpha,\beta) = f_\alpha(\beta)$$

é sobrejetora. Logo, $\kappa = |\kappa \times \kappa| \leq |\bigcup \mathcal{F}|$. Como a outra desigualdade é imediata, temos o resultado. □

Um conceito que vai ser importante em vários contextos são subconjuntos de algum tamanho fixado:

Definição 2.3.13. Sejam X um conjunto e κ um cardinal. Denotamos por $[X]^\kappa$ o conjunto $\{A \subset X : |A| = \kappa\}$. Também usamos a notação $[X]^{<\kappa}$ para $\{Y \subset X : |X| < \kappa\}$.

Em particular, $[X]^{<\aleph_0}$ são todos os subconjuntos finitos de X:

Proposição 2.3.14. *Se X é infinito, então $|[X]^{<\aleph_0}| = |X|$.*

Demonstração. Note que $|[X]^n| = |X|$ para todo $n \in \aleph_0$, $n \neq 0$. Como $[X]^{<\aleph_0} = \bigcup_{n \in \omega} [X]^n$, temos o resultado. □

Terminamos essa seção com uma simples aplicação:

Teorema 2.3.15. *Seja V um espaço vetorial. Se A e B são bases para V, então $|A| = |B|$.*

Lembrando, $[X]$ denota o subespaço gerado por X.

Demonstração. Vamos apenas fazer o caso em que A e B são infinitas. Suponha que não vale o resultado e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $|A| < |B|$. Para cada $a \in A$, existe $B_a \subset B$ finito tal que $a \in [B_a]$. Seja $B' = \bigcup_{a \in A} B_a$. Note que $|B'| \leq |A|$. Por outro lado, note que $B' \subset B$ e $[B'] = V$, já que $[B'] \supset A$, contradição. □

Sequências convergem, mas e daí?

Já vimos que ω_1 não é compacto. Mas vamos ver nesta seção que ele tem certas propriedades "parecidas" com compactos:

Lema 2.3.16. *Seja $A \subset \omega_1$ enumerável. Então A é limitado.*

Demonstração. Suponha que não. Então $\omega_1 = \bigcup_{a \in A} \downarrow a$. Mas note que cada $\downarrow a$ é enumerável. Logo, ω_1 é enumerável, contradição. □

Lema 2.3.17. *Toda sequência $(x_n)_{n \in w}$ estritamente crescente de pontos de ω_1 é convergente.*

Demonstração. Como $A = \{x_n : n \in \omega\}$ é enumerável, temos que A admite supremo. Seja $\alpha \in \omega_1$ tal supremo. Note que, dado $]\beta, \alpha]$ aberto contendo α, temos que, existe $x_n > \beta$ (por α ser supremo) e todo x_k com $k > n$ é tal que $x_k \in]\beta, \alpha]$. □

Teorema 2.3.18. *Toda sequência (enumerável) de pontos de ω_1 admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \omega}$ sequência de pontos de ω_1. Note que, pelo Exercício 2.3.25, temos um dos seguintes casos:

- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência constante. Neste caso, o resultado é trivial.
- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente decrescente. Note que esse caso é impossível, uma vez que ω_1 é bem ordenado.
- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente crescente. Note que neste caso temos o resultado pelo lema anterior.

$\square$

Alongamentos

Alongamento 2.3.19. Seja κ. Mostre que $\kappa < |\wp(\kappa)|$.

Alongamento 2.3.20. Mostre que $\leq$ definida sobre os pares de ordinais é de fato uma ordem e que todo conjunto de pares admite mínimo.

Alongamento 2.3.21. Mostre que, dado um ordinal α, $\downarrow(0, \alpha) = \alpha \times \alpha$.

Alongamento 2.3.22. Mostre que todo cardinal infinito é um ordinal limite.

Exercícios

Exercício 2.3.23. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : \omega \longrightarrow X$ injetora.

Exercício 2.3.24. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora tal que $Y \subsetneq X$.

Exercício 2.3.25. Este é um roteiro para mostrar que toda sequência num conjunto totalmente ordenado admite uma subsequência constante, ou admite uma subsequência estritamente crescente ou admite uma subsequência estritamente decrescente. Assim, seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência num conjunto X totalmente ordenado por $\leq$

(a) Note que podemos supor que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ (se não pudermos, é que já resolvemos).

(b) Dizemos que x_n é um pico se, para todo $k > n$, temos que $x_k < x_n$. Suponha que existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência decrescente infinita.

(c) Suponha que não existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência crescente.

(d) Conclua o resultado.

Exercício 2.3.26. Considere $\omega_1 + 1$ como espaço topológico. Mostre que $\omega_1 \in \overline{\omega_1}$ mas não existe uma sequência em ω_1 convergente para ω_1.

2.4 Mais um pouco sobre ordens

Cofinalidade é uma espécie de "atalho" até o final de um conjunto:

Definição 2.4.1. Seja X ordenado por $\leq$. Dizemos que $A \subset X$ é **cofinal** em X se, para todo $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a$.

Definição 2.4.2. Seja X conjunto ordenado. Denotamos por $cf(X)$ (a **cofinalidade** de X) o menor cardinal κ tal que existe $A \subset X$ tal que A é cofinal em X e $|A| = \kappa$.

Muitas vezes é mais cômodo trabalhar com uma notação de função:

Definição 2.4.3. Sejam X conjunto ordenado e κ um cardinal. Dizemos que $f : \kappa \longrightarrow X$ é uma **função cofinal** se sua imagem é cofinal em X.

É imediato notar o seguinte:

Proposição 2.4.4. *Dado X um conjunto ordenado. Então $cf(X) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ cofinal.*

No caso de ordinais, podemos tomar a f crescente:

Proposição 2.4.5. *Seja α um ordinal. Então $cf(\alpha) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ função crescente e cofinal.*

Demonstração. Vamos mostrar que, se existe uma função cofinal, então existe uma cofinal e crescente com o mesmo domínio. Suponha $cf(\alpha) = \kappa$. Seja $g : \kappa \longrightarrow \alpha$ cofinal. Defina $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ da seguinte forma, para $\xi \in \kappa$:

$$f(\xi) = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Note que tal função é crescente. Resta apenas mostrar que, dado $\xi \in \kappa$, temos que $f(\xi) \in \alpha$. Pela definição de f, é imediato notar que $f(\xi) \leq \alpha$. Ou seja, só precisamos provar que $f(\xi) \neq \alpha$. Primeiramente, note que podemos supor α limite (veja o Alongamento 2.4.16). Suponha que $f(\xi) = \alpha$. Então

$$\alpha = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Ou seja, $g \restriction (\xi + 1)$ é cofinal em α. Mas isso é uma contradição com a definição de cofinalidade de α já que $|\xi + 1| < \kappa$ □

Veja o Alongamento 2.4.17

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.4.6.
- Se α é da forma $\beta + 1$, então $cf(\alpha) = 1$.
- Pelos resultados da seção anterior, temos que $cf(\aleph_1) = \aleph_1$.
- $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Para isso, basta notar que $f : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_\omega$ dada por $f(n) = \aleph_n$ é cofinal (note que $cf(\aleph_\omega) \geq \aleph_0$ pelo Exercício **??**).

Vamos agora definir o produto generalizado:

Definição 2.4.7. Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ uma família de conjuntos. Denotamos por $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ o conjunto $\{(x_\xi)_{\xi<\kappa} : x_\xi \in B_\xi\}$. Chamamos cada x_ξ de **ξ-ésima** coordenada de $(x_\xi)_{\xi<\kappa}$.

Podemos ver $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ como o conjunto de todas as funções de κ em $\bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi$ tais que cada $f(\xi) \in X_\xi$.

Podemos agora fazer algumas aplicações em aritmética cardinal:

Teorema 2.4.8 (Teorema de König). *Seja κ cardinal e sejam $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(B_\xi)_{\xi<\kappa}$ famílias de conjuntos tais que $|A_\xi| < |B_\xi|$ para todo $\xi < \kappa$. Então $|\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi| < |\prod_{\xi<\kappa} B_\xi|$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe $f : \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ sobrejetora. Para cada $\xi < \kappa$, existe $b_\xi \in B_\xi$ tal que $b_\xi \notin \pi_\xi[f[A_\xi]]$ já que não existe uma função sobrejetora de A_ξ em B_ξ. Note que $(b_\xi)_{\xi<\kappa} \in \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ mas não está na imagem de f. De fato, suponha $(b_\xi)_{\xi<\kappa}$ na imagem de f. Seja a tal que $f(a) = (b_\xi)_{\xi<\kappa}$. Seja η tal que $a \in A_\eta$. Pela construção, temos que $b_\eta \notin \pi_\eta[f[A_\eta]]$, contradição. □

π_ξ é a projeção na ξ-ésima coordenada.

Dados η e κ cardinais, denotamos por $\eta^\kappa = |\eta^\kappa|$ (veja o Alongamento 2.4.19 para notar que essa notação é coerente com o caso em ω).

Corolário 2.4.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Demonstração. Seja $f : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ cofinal e crescente. Note que, para cada $\xi < cf(\kappa)$, temos que $|\downarrow f(\xi)| < \kappa$ (por κ se cardinal). Note também que $\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \downarrow f(\xi) = \kappa$. Finalmente, $\kappa^{cf(\kappa)} = |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa|$. Logo

$$|\kappa| = |\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} f(\xi)| < |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa| = \kappa^{cf(\kappa)}$$

□

Pré-ordens

Existe uma pré-ordem sobre as funções de ω em ω natural e com bastante aplicações. Começaremos a trabalhar com ela nesta seção.

Ou seja, o que está faltando para virar ordem é $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar $a = b$.

Definição 2.4.10. Dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem** sobre um conjunto X se, para todo $a, b, c \in X$ temos:

(a) $a \leq a$

(b) se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Veja o Alongamento 2.4.20.

Definição 2.4.11. Denotamos por $\leq^*$ a seguinte pré-ordem sobre ω^ω: dados $f, g \in \omega^\omega$, dizemos que $f \leq^* g$ se

$$\{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ é finito.}$$

Vejamos alguns conceitos sobre famílias de funções de ω^ω:

O conceito de ilimitado é meio que o mesmo que para ordens e o conceito de dominante é o de cofinal para ordens.

Definição 2.4.12. Seja $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família ilimitada** se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família dominante** se, para todo $g \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$.

Note que a própria família $\mathcal{F} = \omega^\omega$ é ilimitada e dominante.

Proposição 2.4.13. *Toda família dominante é ilimitada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Suponha que ela não seja ilimitada. Ou seja, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Defina $h \in \omega^\omega$ como

$$h(n) = g(n) + 1$$

para todo $n \in \omega$. Note que não existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $h \leq^* f$ e, portanto, $\mathcal{F}$ não é dominante. $\square$

Proposição 2.4.14. *Não existe uma família ilimitada enumerável.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\omega}$ família enumerável de funções de ω^ω. Para cada $n \in \omega$, defina

$$g(n) = \max\{f_0(n), ..., f_n(n)\}$$

Note que $\{k \in \omega : f_n(k) > g(k)\} \subset \{0, ..., n-1\}$.

Note que $f_n \leq^* g$ para todo $n \in \omega$ e, portanto, $(f_n)_{n\in\omega}$ não é ilimitada. $\square$

Olhando por cima do muro

Chamamos de $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $|2^\omega|$. Note que $\mathfrak{c} = |\omega^\omega|$. De fato, é imediato notar que $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$. Por outro lado, temos que ω^ω pode ser identificado com $[\omega]^\omega$ (ver Exercício 2.4.29). Assim,

$$|\omega^\omega| = |[\omega]^\omega| \leq |\wp(\omega)| = |2^\omega|$$

Com isso, é fácil ver que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ (ver o Exercício 2.4.30).

Note que $\mathfrak{c}$ é não enumerável. Logo, temos que

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$$

Pelos resultados da seção anterior, como existe pelo menos uma família dominante, podemos definir $\mathfrak{d}$ como a menor cardinalidade possível para uma família dominante e $\mathfrak{b}$ como a menor cardinalidade possível para uma família ilimitada. Como toda família dominante é ilimitada, temos

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

Como a própria família ω^ω é dominante, temos que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Finalmente, como não existe uma família ilimitada enumerável, temos que $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$. Resumindo, temos a seguinte situação:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$$

O curioso é que, com os axiomas que temos até o momento, isso é meio que tudo que podemos dizer sobre as relações entre esses quatro cardinais.

A **hipótese do contínuo** (uma afirmação que é independente dos axiomas de ZFC), afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Note que, supondo essa afirmação, as desigualdades acima viram todas igualdades.

Por outro lado, meio que qualquer outra combinação que quisermos é possível também. Veremos um pouco mais disso adiante.

Uma **afirmação independente** de uma lista de axiomas nada mais é que uma afirmação que nem ela, nem sua negação, podem ser provadas a partir da lista de axiomas. É a mesma situação que ocorre, por exemplo, em teoria dos corpos: considere T os axiomas de teoria dos corpos. Quando se prova que $\mathbb{R}$, estamos provando que $\mathbb{R}$ satisfaz todos os axiomas de corpo - vamos usar a notação $\mathbb{R} \vDash T$. Pode-se provar que, se φ é uma consequência de T, então vale também que $\mathbb{R} \vDash T$ (ou seja, todas as consequências de T também valem em $\mathbb{R}$). Podemos repetir este processo com qualquer outro

Para ver uma formalização deste argumento, recomendamos [?].

conjunto que satisfaça T. Isso nos permite fazer o seguinte argumento. Considere φ a afirmação

$$\exists x\ x \cdot x = 1 + 1$$

Intuitivamente, esta afirmação, completamente escrita na linguagem da teoria dos corpos, quer dizer que existe algum elemento cujo quadrado é dois. Note que essa afirmação não é uma consequência de T. Pois, se ela fosse, como $\mathbb{Q} \vDash T$, teríamos que $\mathbb{Q} \vDash \varphi$, o que não é verdade. Por outro lado, também temos que a negação de φ também não é consequência de T. Pois, se fosse, teríamos $\mathbb{R} \vDash \neg\varphi$, o que também não é verdade.

A argumentação acima não é possível com a teoria dos conjuntos (basicamente, por não existir um conjunto de todos os conjuntos). Mas ainda assim, podemos provar esse tipo de situação, usando outros métodos. Veremos alguns tópicos neste sentido mais adiante.

Alongamentos

Alongamento 2.4.15. Seja α um ordinal. Mostre que:

(a) $cf(\alpha) \leq \alpha$

(b) se $cf(\alpha)$ é finito, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Alongamento 2.4.16. Seja $\alpha = \beta + 1$ ordinal. Se $f : \kappa \to \alpha$ é cofinal, então existe $\xi < \kappa$ tal que $f(\xi) = \beta$.

Alongamento 2.4.17. Sejam α ordinal limite e $A \subset \alpha$. Mostre que A é cofinal se, e somente se, $\sup A = \alpha$.

Alongamento 2.4.18. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Alongamento 2.4.19. Considere $a, b \in \omega$. Mostre que $a^b = |\wp(a^b)|$ (onde o primeiro a^b é a exponenciação usual nos naturais e o segundo é o conjunto das funções de $\{0, ..., b-1\}$ em $\{0, ..., a-1\}$).

Alongamento 2.4.20. Mostre que $f \leq^* g$ se, e somente se, existe $n_0 \in \omega$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $f(n) \leq g(n)$.

Exercícios

Exercício 2.4.21. Seja α um ordinal.

(a) Mostre que se $cf(\alpha) = 1$, então $\alpha = \beta + 1$ para algum β.

(b) Mostre que se $cf(\alpha)$ é finita, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) Mostre que se κ é um cardinal infinito, então $cf(\kappa) \geq \aleph_0$.

Exercício 2.4.22. Sejam X, A, B conjuntos. Mostre que $|(X^A)^B| = |X^{A\times B}|$. Mostre que, em particular, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.4.23. Seja α ordinal limite. Mostre que $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Exercício 2.4.24. Seja α um ordinal de cofinalidade não enumerável. Mostre que $\{\beta < \alpha : cf(\beta) = \omega\}$ é ilimitado em α.

Exercício 2.4.25. Mostre que existem um cardinal κ e uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tais que $|\mathcal{F}| < \kappa$, cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| < \kappa$ e ainda assim $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$.

Exercício 2.4.26. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $g_f \in \omega^\omega$ por

$$g_f(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$. Mostre que $\mathcal{G} = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ é ilimitada mas não é dominante.

Exercício 2.4.27. Mostre que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.

Exercício 2.4.28. Mostre que existe α tal que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Exercício 2.4.29. Seja κ um cardinal. Seja X um conjunto tal que $\kappa \leq |X|$.

(a) Para cada $A \in [X]^\kappa$, fixe $f_A : \kappa \longrightarrow A$ bijetora. Mostre que $\varphi : [X]^\kappa \longrightarrow X^\kappa$ dada por $\varphi(A) = f_A$ é injetora.

(b) Observe que $X^\kappa \subset [\kappa \times X]^\kappa$.

(c) Mostre que $|X^\kappa| = |[X]^\kappa|$.

Exercício 2.4.30. Este é um roteiro para mostrar que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(a) Associe, para cada $x \in \mathbb{R}$, $s_x \in \mathbb{Q}^\omega$ de forma injetora.

(b) Seja $f \in 2^\omega$. Seja $\varphi(f) = \sum_{n\in\omega} f(n)10^{-n}$. Mostre que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

(c) Conclua que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.4.31. Seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável de subconjuntos infinitos de ω tais que, se $F \subset \mathcal{F}$ é finito, então $\bigcap F$ é infinito. Mostre que existe $A \subset \omega$ infinito tal que $A \subset^* B$ para todo $B \in \mathcal{F}$ ($X \subset^* Y$ se $X \smallsetminus Y$ é finito).

Exercício 2.4.32. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos infinitos de ω é **quase disjunta** se, para todo $F, G \in \mathcal{F}$ distintos, temos que $F \cap G$ é finito.

(a) Mostre que existe uma família quase disjunta maximal e infinita.

(b) Mostre que não existe uma família quase disjunta maximal infinita que seja enumerável.

(c) Mostre que existe uma família quase disjunta maximal de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

(d) Note que não existe uma família de suconjuntos de ω dois a dois disjuntos que seja não enumerável.

Ou seja, finito é bem diferente de vazio.

Capítulo 3

Algumas aplicações

Agora que finalmente terminamos a parte mais básica, vamos fazer um capítulo mais dedicado a aplicações.

3.1 Exemplos reais

Nesta seção, vamos nos concentrar em construções em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. No que se segue, vamos usar várias vezes o termo **enumeração** de um conjunto, para algo da forma $X = \{x_\xi : \xi < \kappa\}$. Isso apenas quer dizer que, se $\xi \neq \eta$, então $x_\xi \neq x_\eta$ (mas não quer dizer que κ é enumerável).

Talvez compense lembrar que já fizemos uma construção deste tipo (bem bacana) com circunferências na Proposição 1.3.7.

Estamos dando um número ordinal a cada elemento.

O primeiro exemplo é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde as fatias verticais são pequenas e as horizontais são grandes:

Proposição 3.1.1. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para toda reta da forma $v = \{(a, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ou da forma $h = \{(x, a) : x \in \mathbb{R}\}$ $(a \in \mathbb{R})$, temos que $v \cap A$ tem no máximo um ponto e $h \cap A$ tem projeção densa nos reais.*

Demonstração. Considere $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de todos os intervalos da forma $]a, b[$ com $a < b \in \mathbb{Q}$. Seja $\{a_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \omega$, seja $x_n^0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_n^0 \in I_n$. Seja $A_0 = \{(x_n^0, a_0) : n \in \omega\}$. Suponha definidos $\{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Para cada $k \in \omega$, seja $x_k^\alpha \in I_k \setminus \{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$. Defina $A_\alpha = \{(x_n^\alpha, a_\alpha) : n \in \omega\}$. Note que $A = \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha$ é o conjunto procurado. □

Note que podemos tomar tal elemento já que $|I_k| = \mathfrak{c}$.

O próximo exemplo é "bem distribuído" nas retas de $\mathbb{R}^2$:

Proposição 3.1.2. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer reta r, $|r \cap A| = 2$.*

Demonstração. Seja $(r_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}$ uma enumeração de todas as retas de $\mathbb{R}^2$. Seja $A_0 = \{a, b\}$, onde $a, b \in r_0$ são dois pontos distintos quaisquer. Fixe $\alpha < \mathfrak{c}$. Suponha definidos A_ξ para todo $\xi < \alpha$ e suponha por hipótese que não existam 3 pontos em $B = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$ colineares. Se $|r_\alpha \cap B| = 2$, defina $A_\alpha = \emptyset$. Caso contrário, primeiramente note que $|[B]^2| < \mathfrak{c}$. Note também que cada par de pontos de B determina uma reta que, por sua vez, intercepta r_α no máximo em um ponto. Seja X o conjunto de tais pontos. Note que $|X| < |r|$. Assim, se $r \cap B = \emptyset$, defina $A_\alpha = \{a, b\}$ onde $a, b \in r \setminus X$ são dois pontos distintos. Se $|r \cap B| = 1$, defina $A_\alpha = \{a\}$ onde $a \in r \setminus X$ é um ponto qualquer. Note que $A = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} A_\xi$ é o conjunto desejado. $\square$

Vamos mostrar que cada fechado não enumerável de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade contínuo. Para isso, o seguinte lema vai ajudar:

Lema 3.1.3. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ não enumerável. Então existem I, J intervalos de extremos racionais tais que $I \cap F$ e $J \cap F$ são não enumeráveis e $\overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Considere os intervalos da forma

$$I_z^n =]z\frac{1}{n}, (z+1)\frac{1}{n}[$$

com $z \in \mathbb{Z}$. Note que, pelo menos um destes intervalos é tal que $I_z^n \cap F$ é não enumerável. Vamos mostrar que pelo menos dois intervalos dessa forma com um mesmo n tem tal propriedade. Se nessa primeira etapa já encontramos dois intervalos assim, terminamos. Caso contrário, repita o processo com $n + k$ com $k \in \mathbb{N}$. Se para algum k encontramos dois intervalos cuja intersecção com F é não enumerável, terminamos. Suponha que isso não aconteça. Então podemos construir uma sequência $(z_k)_{k\in\omega}$ tal que $I_{z_k}^{n+k} \cap F$ é não enumerável e z_k é o único com tal propriedade. Note que $\bigcap_{k\in\omega} I_{z_k}^{n+k}$ tem no máximo um ponto. Logo, F é enumerável, já que, a menos de no máximo um ponto, está contido $\bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{z\neq z_k} I_z^{n+k} \cap F$ (e todos esses conjuntos são enumeráveis).

Note que pelo mesmo argumento acima, podemos exigir também que os dois intervalos encontrados sejam não consecutivos (se sempre fossem consecutivos, o argumento final funcionaria novamente, tratando-os como um único intervalo). Note que dois intervalos assim satisfazem o que queremos. $\square$

O seguinte corolário é apenas uma reformulação do lema, apenas deixado-o de jeito mais próximo ao que vamos usar.

Corolário 3.1.4. *Dado $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, existem dois intervalos I_0, I_1 fechados disjuntos e limitados tais que $I_0 \cap F$ e $I_1 \cap F$ são não enumeráveis.*

Proposição 3.1.5. *Todo subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ não enumerável é tal que $|F| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Sejam I_0 e I_1 como no corolário. Suponha definido I_s para $s \in \omega^{<\omega}$ de forma que $I_s \cap F$ seja não enumerável. Assim, podemos aplicar o corolário novamente e encontrar $I_{s^\frown 0}$ e $I_{s^\frown 1}$ intervalos fechados, limitados e disjuntos tais que $I_{s^\frown i} \cap F$ é não enumerável e $I_{s^\frown i} \subset I_s$.

Dada uma sequência s e um elemento n, denotamos por $s^\frown n$ a sequência s acrescida de n como último elemento.

Note que, dada $f : \omega \longrightarrow 2$, temos que existe $x_f \in \bigcap_{n \in \omega} I_{f \restriction n}$. Note também que $x_f \neq x_g$ se $f \neq g$ e, finalmente, que cada $x_f \in F$. □

A quantidade total de fechado não enumeráveis em $\mathbb{R}$ também é $\mathfrak{c}$:

Proposição 3.1.6. *Existem exatamente $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para $\mathbb{R}$. Note que todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união enumerável dos elementos desta base. Assim, existem, no máximo, $|\mathcal{B}|^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ abertos em $\mathbb{R}$ e, portanto, a mesma quantidade de fechados.

Por outro lado, para cada $r \in \mathbb{R}$, o intervalo $[r, r+1]$ é um fechado não enumerável e, portanto, existem $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$. □

Vamos terminar esta seção apresentando um tipo de conjunto que é grande o suficiente para interceptar cada fechado não enumerável e pequeno o suficiente que seu complementar também tenha essa propriedade.

Definição 3.1.7. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um **conjunto de Bernstein** se X é não enumerável e, para todo $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, temos que $F \cap X$ e $F \cap (\mathbb{R} \smallsetminus X)$ são não vazios.

Proposição 3.1.8. *Existe um conjunto de Bernstein.*

Demonstração. Seja $(F_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$ uma enumeração de todos os fechados não enumeráveis de $\mathbb{R}$. Sejam $x_0, y_0 \in F_0$ distintos. Suponha definidos $(x_\xi)_{\xi < \alpha}$ e $(y_\xi)_{\xi < \alpha}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Sejam dois pontos distintos

$$x_\alpha, y_\alpha \in F_\alpha \smallsetminus (\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi : \xi < \alpha\}).$$

Note que podemos fazer isso já que $|F_\xi| = \mathfrak{c}$. Finalmente, note que $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $Y = \{y_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ são conjuntos de Bernstein. □

Só note que os dois são disjuntos que tudo sai fácil.

Exercícios

Exercício 3.1.9. Adapte a demonstração da Proposição 3.1.1 e garanta que $v \cap A$ tenha exatamente um ponto.

Exercício 3.1.10. Mostre que $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ é uma união de retas disjuntas.

Exercício 3.1.11. Seja X um conjunto de Bernstein.

(a) Mostre que, para qualquer $K \subset X$ compacto, temos que K é enumerável.

(b) Mostre que, para qualquer A aberto tal que $X \subset A$, temos que $\mathbb{R} \setminus A$ é enumerável.

(c) Conclua que X não é mensurável.

A ideia aqui é só usar que os mensuráveis podem ser aproximados por baixo por compactos e por cima por abertos. Lembre também que conjuntos enumeráveis tem medida nula.

Dicas de alguns exercícios

1.1.16 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

1.2.14 Considere o conjunto das "funções escolhas parciais".

2.4.27 Corolário do König.

2.4.28 Função normal.

c Considere sequências de racionais convergindo para irracionais em $\mathbb{R}$.

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[2] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. 1973.

[4] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.

Notação

Índice Remissivo