Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

13 de setembro de 2016

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversas funções. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma se fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto, trabalharemos mais com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos "normais" no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos "normais". Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N, que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma "definição" intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Vazio $\exists x \, \forall y \; y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x \, \forall y \; (x = y) \leftrightarrow (\forall z \; (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Par $\forall x\ \forall y\ \exists z\ x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y, existe um conjunto z que os contém como elementos.

Veja o Alongamento 1.1.10.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ, temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U, mas não que só eles. U poderia conter "lixo" - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F}\ \exists U\ \forall x\ \forall y\ (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x, defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como "sucessor de x" - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S\ \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S\ s(x) \in S)$$

Partes $\forall x\ \exists y\ \forall z \subset x\ z \in y$. Isto é, dado um conjunto x, existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.17.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \in x\ \exists z' \in y\ \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D, conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D\ \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset\ \exists y \in x\ x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituido pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construido a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a $\leq$ entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X. A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivessemos trabalhando com a relação $\leq$ nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N}\ a + c = b\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar $\leq$, então isso ficaria meio circular.

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X. Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenas estão em X. Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y, uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.18

Note que, dados x, y, temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que $\leq$ é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

Definição 1.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

(a) $x \leq x$;

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \; s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução finita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω, temos que $\omega \subset X$. $\square$

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função "sucessor" usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. □

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b. Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

□

Note que $\subset$ é uma ordem sobre ω, já que $\subset$ é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω, podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por $\subset$.*

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. $\square$

Note que, assim, temos que a ordem $\leq$ usual dos naturais se traduz como $\subset$ aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como $\in$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações $\in$ e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando $\in$ e $=$:

(a) $x \subset y$

(b) $x \cap y$

(c) $x = \{a\}$ para algum a.

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y, de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre diretamente que os seguintes conjuntos são transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alongamento 1.1.15. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.16. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.17. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A, existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.18. Escreva a fórmula "x é um par ordenado".

Exercício 1.1.19. Uma função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.20. Seja $\leq$ uma ordem total sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\leq$ é uma boa ordem;

(ii) não existe $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.21. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

Exercício 1.1.22. Considere X o conjunto $\{0, 1\} \times \omega$ com a seguinte ordem:

$$(a, n) \preceq (b, m)$$

se $a < b$ ou se $a = b$ e $n \leq m$. Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Na verdade, para este texto, a maior importância da demonstração a seguir é que o princípio da boa ordem implica na existência de bases em espaços vetoriais - sem o uso do axioma da escolha.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre V. Defina B da seguinte maneira

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B.

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Vamos mostrar que B é uma base para V. Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, ..., b_n \in B$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Seja b_j o máximo de $\{b_1, ..., b_n\}$ (com relação a $\preceq$). Note que $b_j \in [\{b_1, ..., b_n\} \smallsetminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que $\preceq$ é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). □

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

Um jeito de ler essa é hipótese é "se vale para todo mundo antes de x, vale para x".

$$(\forall y \in X\ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ, temos que vale $\varphi(x)$, contradição. □

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n. Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar. Antes de provarmos tal resultado, é bom notar que, ao formarlizarmos o conceito de função em ZFC, tratamos cada função como um conjunto de pares ordenados

- essa formalização tem também a vantagem que podemos trabalhar com funções como se fossem conjuntos, podendo tomar uniões, intersecções etc. Veja o Alongamento 1.2.9 para ver essa formalização. Usaremos este fato implicitamente nesta demonstração e em muitas outras no decorrer deste texto.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(z, y)$ vale para algum z, y, então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.16.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X, isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g. Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em $\mathcal{F}$, elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.10), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X, terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \operatorname{dom}(f)\}$. Note que $f \restriction \{y \in X : y < x\}$ é um elemento de $\mathcal{F}$. Considere

$$g = (f \restriction \{y \in X : y < x\}) \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f. $\square$

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Ordem $\times$ escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se $\mathcal{C}$ é **totalmente ordenado** por $\leq$, isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a \leq b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq a$.

Formalmente, aqui estamos provando que o Princípio da Boa Ordem implica no Lema de Zorn

Proposição 1.2.5 (**Lema de Zorn**). *Seja $\leq$ uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a $\preceq$. Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existe A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a $\preceq$) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a $\preceq$, mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a $\leq$. Vamos fazer isso por indução sobre x. Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.12). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x. Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercicio 1.2.12, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a $\leq$. Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A. Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então $z \notin A$, já que x é o máximo de A. Note também que, pela definição de A_z, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y<z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. $\square$

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Cuidado que na próxima demonstração, trabalharemos com relações como se elas fosse conjuntos - da mesma maneira que fizemos com funções.

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos pares $(A, \leq_A)$ onde $A \subset X$ e $\leq_A$ é uma boa ordem sobre A. Considere a seguinte relação sobre $\mathcal{O}$:

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B, isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \smallsetminus A$, $a \leq_B b$. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{O}$. Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y = \bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{C}} A$. Que $\leq$ é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a $\leq_A$). Note que, pela maneira como $\preceq$ é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S. Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e, além disso, $(Y, \leq)$ é um majorante para a cadeia $\mathcal{C}$ (exercício). Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe $(B, \leq_B)$ maximal em $\mathcal{O}$. Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \smallsetminus B$, basta estender a ordem $\leq_B$ para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de $\mathcal{O}$ estritamente maior que $(B, \leq_B)$. $\square$

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.13.)

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (**Axioma da escolha**). *Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe $\leq$ uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. $\square$

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial admite uma base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação "princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base". A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto - primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F. Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.15). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com "variáveis" em X. Isto é, os elementos de $k(X)$ são "frações de polinômios de várias variáveis", mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X.

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F-grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F-homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F-grau n e todos os monômios de p_1 tem F-grau $d + n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K. Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K-espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V. Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.11). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x}\sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. Mais que isso, f é F-homogêneo de grau -1. Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. $\square$

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Sejam X e Y conjuntos. Dizemos que f é uma **função** de X em Y (notação $f : X \to Y$ se $f \subset X \times Y$ tal que:

- Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$;
- Para todo $x \in X$, se $(x, a), (x, b) \in f$, então $a = b$.

Usualmente, em vez de denotarmos $(x, y) \in f$, usamos $f(x) = y$.

(a) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $\mathrm{dom}(f)$ (domínio de f).

(b) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $Im(f)$ (imagem de f). Cuidado aqui, não queremos o contradomínio de f.

(c) Dados $f : X \to Y$ e $Z \subset X$, determine o conjunto $f \restriction Z$, onde $f \restriction Z$ é a **função restrição** de f a Z.

Alongamento 1.2.10. Mostre que, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.11. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de $\mathcal{F}$ não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G-grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.12. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou seja, $\mathcal{C}$ é uma cadeia com relação a $\subset$). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por $\leq$. Mostre que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por $\leq$.

Informalmente, lemos este exercício como "cadeia de cadeias é cadeia".

Exercício 1.2.13. Escreva a ordem usual de $\mathbb{Z}$ como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.14. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.15. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.16. Seja $\leq$ boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

"($x \in X$ e existe uma função f com domínio $\{y \in X : y \leq x\}$ tal que $f(z) = b$ onde $\varphi(\{z' : z' < z\}, b)$ e $f(x) = a$ onde $\varphi(\{z' : z < x\}, a)$) ou $a = \emptyset$"

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ.

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2 (**de Cantor-Bernstein-Schroeder**). *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado supondo que $A \cap B = \emptyset$. Para ver como obter o caso geral a partir desse, veja o Alongamento 1.3.10. Seja $x \in A \cup B$. Defina

- $s_0^x = x$

- $s^x_{n+1} = \begin{cases} f(s^x_n) & \text{se } s^x_n \in A \\ g(s^x_n) & \text{se } s^x_n \in B. \end{cases}$
- $s^x_{-(n+1)} = \begin{cases} f^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } B \\ g^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } A \end{cases}$

Note que s^x_z pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s^x_z \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s^x_z \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s^y_z = s^x_k$. Note que, então $s^y_{z+m} = s^x_{k+m}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $S^y = S^x$.

Com isso, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s^x_z está definido para todo z, f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.
- Se $s^x_z \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).
- Se $s^x_z \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

□

Uma aplicação simples do próximo resultado é que sempre podemos aumentar os tamanhos:

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \longrightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \longrightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A, temos que $x \notin f(x) = A$.
- Se $x \notin A$, então, pela definição de A, temos que $x \in f(x) = A$.

□

Uma aplicação com circunferências

Essa aplicação foi tirada de [2].

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que tivermos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem $\leq$ sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem qualquer sobre X. Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X. Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). □

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0. Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1. Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n, contradição. □

A situação muda bem quando passamos para o $\mathbb{R}^3$. Comecemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi$ é um plano tal que $x \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de $\mathcal{C}$ em P (basicamente, porque

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Considere

$$S = \{p \in \pi : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}.$$

Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$. Seja $p \in \pi \setminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p. A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de $\mathbb{R}$. Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. $\square$

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X. Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere $\leq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}^3$ com a propriedade apresentada na Proposição 1.3.4. Seja x o menor ponto de $\mathbb{R}^3$ segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x. Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

(i) se $y < z$, então $y \in C_y$.

(ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

(i) $z \in C_z$.

(ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguimos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.

- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X e seja $f : X \longrightarrow Y$ bijeção. Mostre que $\preceq$ dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y.

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \longrightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Este é um um roteiro para mostrar que, se vale o Teorema de Cantor-Bernstein-Schoroeder para conjuntos disjuntos, então vale para o caso geral. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injetoras.

(a) Considere os conjuntos $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$ e $B' = \{(b, 1) : b \in B\}$. Note que tais conjuntos são disjuntos.

(b) Mostre que $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$.

(c) Conclua o resultado.

Alongamento 1.3.11. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.12. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \longrightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Na sequência, vamos apresentar alguns resultados envolvendo reticulados. Entre eles, vamos apresentar um teorema de Tarski ([4]) e, como aplicação de tal teorema, uma nova demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.3.2).

Exercício 1.3.13. Dizemos que uma ordem $(A, \leq)$ é um **reticulado** se, para $a, b \in A$, existe o supremo do conjunto $\{a, b\}$ (normalmente denotado por $a \vee b$) e e também o ínfimo (denotado por $a \wedge b$). Dizemos que $(A, \leq)$ é um **reticulado completo** se, para todo $B \subset A$, existe o supremo e o ínfimo de B (denotados por $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ respectivamente).

(a) Mostre que toda ordem total é um reticulado.

(b) Mostre que $[a, b]$ com a ordem usual de $\mathbb{R}$ é um reticulado completo.

(c) Dados $a, b \in A$, denotamos por $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ e } x \leq b\}$. Mostre que, se $a \leq b$, então $[a, b]$ é um reticulado completo.

Exercício 1.3.14. Seja $(A, \leq)$ um reticulado completo. Seja $f : A \to A$ monótona não decrescente, isto é, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Este é um roteiro para mostrar que o conjunto $F = \{a \in A : f(a) = a\}$ dos pontos fixos de f é um reticulado completo.

(a) Considere $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Note que $B \neq \emptyset$.

(b) Mostre que, para todo $b \in B$, $f(b) \in B$.

(c) Seja $s = \bigvee B$. Mostre que $s \in B$.

(d) Note que s é um ponto fixo.

(e) Note que não existe um ponto fixo maior que s.

(f) Encontre i o menor ponto fixo.

(g) Considere $1 = \bigvee A$. Seja $C \subset F$. Seja $c = \bigvee C$. Note que $f[[c, 1]] \subset [c, 1]$.

(h) Note que, assim, existe um supremo para os pontos fixos de f restrita a $[c, 1]$. Note que tal supremo é o próprio c.

(i) Conclua que F é completa.

Exercício 1.3.15. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras.

(a) Note que $(\wp(X), \subset)$ é um reticulado completo.

(b) Mostre que $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ dada por $\varphi(A) = X \smallsetminus (g[Y \smallsetminus f[A]])$ é uma função monótona não decrescente.

(c) Seja $F \subset X$ ponto fixo de φ. Mostre que $i : X \to Y$ dada por

$$i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \smallsetminus F \end{cases}$$

é uma bijeção entre X e Y.

Exercício 1.3.16. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ função monótona não decrescente. Mostre que, além de f ter pontos fixos, o conjunto de tais pontos admite máximo e mínimo.

Note que nem precisamos de f contínua.

Capítulo 2

Ordinais, cardinais e outros

2.1 Ordinais

Já vimos que boa ordem é algo bastante importante neste texto. Agora, vamos apresentar certos conjuntos que, de alguma forma, são representantes canônicos de todas as boas ordens possíveis:

Definição 2.1.1. Dizemos que α é um **ordinal** se ele é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Cuidado aqui, dizemos que $\in$ é uma boa ordem no sentido de ordem estrita. Para ficarmos com a definição formal, precisamos trabalhar com "$\in$ ou igual".

Note que, pelo que provamos anteriormente, cada $n \in \omega$ é um ordinal. Mais que isso, o próprio conjunto ω também é um ordinal. E, não é muito difícil de ver, $\omega \cup \{\omega\}$ também é um ordinal.

Note que, como cada ordinal é transitivo, então todo elemento seu também é bem ordenado por $\in$. Assim, podemos provar:

Proposição 2.1.2. *Seja α um ordinal. Se $x \in \alpha$, então x é um ordinal.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que x é transitivo. Sejam a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$. Como α é transitivo, temos que $b \in \alpha$. E, pelo mesmo motivo, $a \in \alpha$. Como $\in$ é uma ordem sobre α, temos que esta é uma relação transitiva e, portanto, $a \in x$. □

Proposição 2.1.3. *Seja X um conjunto não vazio de ordinais. Então $\bigcap X$ é um ordinal.*

Demonstração. Basta notar que intersecção de conjuntos transitivos é transitivo e que, dado $\alpha \in X$, temos que $\bigcap X \subset \alpha$ e, portanto, como $\in$ bem ordena α, $\in$ bem ordena $\bigcap X$. □

Na sequência, vamos provar alguns resultados técnicos para ordinais. Um dos objetivos é formalizar indução e boa ordem sobre ordinais. Comecemos com a ideia de sucessor de um ordinal.

Proposição 2.1.4. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \in \alpha$. Suponha que $\gamma \in \alpha$ seja tal que γ é o menor tal que $\beta \in \gamma$. Então $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$.*

Demonstração. Como γ é um ordinal, temos que $\beta \subset \gamma$ e, portanto, $\beta \cup \{\beta\} \subset \gamma$. Por outro lado, dado $\xi \in \gamma$, temos pela minimalidade de γ que $\beta \notin \xi$. Ou seja, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos $\xi \in \beta$ ou $\xi = \beta$. Desta forma, temos que $\gamma \subset \beta \cup \{\beta\}$. $\square$

Note que pela transitividade dos ordinais, temos que todos os elementos aqui pertencem a α.

Proposição 2.1.5. *Seja α um ordinal. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ para algum β ou, para todo $\beta \in \alpha$, temos $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$. Suponha que exista $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$. Podemos supor que γ seja o menor com tal propriedade. Note que $\beta \in \gamma$ (de fato, como $\gamma, \beta \in \alpha$, se $\beta \notin \gamma$, como $\in$ é uma ordem total sobre α, teríamos que $\beta = \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Mas ambos esses casos contrariam o fato que $\gamma \in \alpha \smallsetminus (\beta \cup \{\beta\})$). Então, pelo resultado anterior, temos que $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ contrariando o fato que $\gamma \in \alpha$ e $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. $\square$

Os resultados anteriores nos motivam a denotar $\alpha \cup \{\alpha\}$ como $s(\alpha)$ (se α é um ordinal). Ainda mais, costumamos denotar por $\alpha + 1$ tal conjunto. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.6. Seja α um ordinal. Se $\alpha = \beta + 1$ para algum β ordinal, dizemos que α é um **ordinal sucessor**. Caso contrário, dizemos que α é um **ordinal limite**.

Note que todo $n \in \omega$ não vazio é um ordinal sucessor. Note também que ω é um ordinal limite (veja o Alongamento 2.1.22).

Lema 2.1.7. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$ e existe $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Então $\beta \subset \gamma$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \beta$. Vamos provar que $\xi \in \gamma$. Suponha que não. Note que $\xi, \gamma \in \alpha$. Logo, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos dois casos:

- $\xi = \gamma$. Mas isso é um contradição pois neste caso temos $\gamma \in \beta$, contrariando a definição de γ.

- $\gamma \in \xi$. Mas isso é uma contradição, pois isso também implica que $\gamma \in \beta$.

$\square$

Da mesma forma que ocorre com os elementos de ω, temos a suguinte tradução:

Lema 2.1.8. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$. Então $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.*

Demonstração. Suponha $\beta \neq \alpha$. Seja $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Podemos supor γ o menor com tal propriedade. Vamos mostrar que $\gamma = \beta$ (note que isso implica que $\beta \in \alpha$ como queremos). Suponha que não. Pelo lema anterior, temos que $\beta \subset \gamma$. Então existe $\gamma' \in \gamma \smallsetminus \beta$. Logo, temos que $\gamma' \in \alpha \smallsetminus \beta$, contrariando o fato que γ era o menor com tal propriedade. $\square$

Teorema 2.1.9 (Indução para ordinais). *Seja φ uma fórmula tal que, se para todo α ordinal, temos que $\varphi(\beta)$ para $\beta \in \alpha$, então $\varphi(\alpha)$. Então, para todo α ordinal, temos que $\varphi(\alpha)$.*

Demonstração. Seja α um ordinal qualquer. Defina

$$B = \{\xi \in \alpha : \varphi(\xi)\}.$$

Se $B = \alpha$ então, por hipótese, temos que vale $\varphi(\alpha)$. Caso contrário, seja $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus B)$. Note que, como $\gamma \subset \alpha$, temos que, para todo $\xi \in \gamma$, vale $\varphi(\xi)$. Logo, por hipótese, vale $\varphi(\gamma)$, contrariando o fato que $\gamma \notin B$. $\square$

Estamos usando aqui o mínimo com relação ao $\in$.

Com isso, podemos provar que quaisquer dois ordinais são comparáveis com relação a $\subset$:

Proposição 2.1.10. *Sejam α, β ordinais. Então vale $\alpha \subset \beta$ ou $\beta \subset \alpha$.*

Demonstração. Vamos provar a afirmação por indução sobre α. Ou seja, fixe β ordinal e suponha que, para todo $\xi \in \alpha$, temos que vale

$$\xi \subset \beta \text{ ou } \beta \subset \xi$$

Suponha que exista $\xi \in \alpha$ tal que $\beta \subset \xi$. Então, pela transitividade, temos que que $\xi \subset \alpha$ e, assim, $\beta \subset \alpha$.

Suponha que o caso anterior não ocorra. Então, para todo $\xi \in \alpha$, temos que $\xi \subset \beta$. Pelo Lema 2.1.8, temos dois casos:

- $\xi = \beta$. Neste caso, pela transitividade, temos que $\beta \subset \alpha$.

- $\xi \in \beta$. Note que isso vale para todo $\xi \in \alpha$. Logo, $\alpha \subset \beta$.

□

Mais do que funcionar como uma ordem total para os ordinais, a inclusão funciona como uma boa ordem:

A ideia é que se certa propriedade vale para algum ordinal, então existe o menor ordinal que a satisfaz. Tomamos o sucessor para garantir que tal conjunto seja não vazio.

Teorema 2.1.11 (**Boa ordem para ordinais**). *Seja φ uma fórmula sobre ordinais tal que pelo menos um ordinal a satisfaça. Então existe um ordinal α tal que vale $\varphi(\alpha)$ e, se β é um ordinal tal que $\varphi(\beta)$, então $\alpha \subset \beta$.*

Demonstração. Seja ξ ordinal tal que vale $\varphi(\xi)$. Seja

$$\alpha = \min\{\eta \in s(\xi) : \varphi(\eta)\}.$$

Seja β um ordinal tal que vale $\varphi(\beta)$. Precisamos mostrar que $\alpha \subset \beta$. Suponha que não. Então, pela Proposicao 2.1.10, temos que $\beta \subset \alpha$. Note que, assim, temos que $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$. Mas ambos implicam em contradição. □

Com isso, podemos provar que "$\in \vee =$" funciona como uma boa ordem sobre os ordinais. Desta forma, muitas vezes vamos denotar por $<$ quando queremos dizer $\in$ com relação a ordinais. Também utilizaremos a notação min como se $\in$ fosse uma ordem comum. Uma observação importante a ser feita é que não podemos dizer que $\in$ é de fato uma boa ordem sobre os ordinais basicamente por que os ordinais não formam um conjunto:

Proposição 2.1.12. *A coleção de todos os ordinais não forma um conjunto.*

Demonstração. Suponha que A seja o conjunto de todos os ordinais. Note que A é também um ordinal. Logo, $A \in A$, o que é uma contradição. □

Aqui você poderia dizer que $A \in A$ contraria o axioma da fundação. Mas note que nem precisamos disso, basta lembrar que $\in$ é uma ordem estrita dentro de ordinais.

Formalmente, dada um fórmula φ sobre conjuntos, chamamos a coleção de todos os conjuntos que a satisfazem de uma **classe**. Claramente, todo conjunto é uma classe. Assim, para indicarmos que uma classe não é um conjunto, diremos que ela é uma **classe própria**.

Também é possível fazer recursão sobre ordinais:

Aqui pode parecer que estamos quantificando sobre fórmulas (o que não é permitido). A formalização é: para cada fórmula φ, provamos que a fórmula ψ apresentada satisfaz o enunciado - ou seja, temos infinitos teoremas.

Teorema 2.1.13 (**Recursão para ordinais**). *Seja φ uma fórmula do tipo função. Então existe uma fórmula ψ também do tipo função tal que, para todo ordinal α, vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, vale $\varphi((a_\xi)_{\xi<\alpha}, b)$, onde cada a_ξ é tal que vale $\psi(\alpha, a_\alpha)$. Além disso, se ψ' é outra fórmula satisfazendo tal enunciado, temos que, para todo ordinal α e todo conjunto b, temos que vale $\psi(\alpha, b)$ se, e somente se, $\psi'(\alpha, b)$.*

Demonstração. A parte da unicidade segue facilmente da “boa ordem” sobre os ordinais (exercício). Vamos então mostrar que existe alguma ψ.

Considere $\psi(\alpha, b)$ a afirmação:

Existe uma sequência $(a_\xi)_{\xi\in\alpha}$ tal que vale $\varphi((a_\xi)_{\xi\in\alpha}, b)$ e, para todo $\xi \in \alpha$, vale $\varphi((a_\eta)_{\eta\in\xi}, a_\xi)$.

Por indução, pode-se mostrar que ψ está bem definida e que é do tipo função como gostaríamos. □

Vamos terminar esta seção mostrando que os ordinais representam (de forma única) cada boa ordem:

Definição 2.1.14. Sejam X e Y conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \leq b$.

Proposição 2.1.15. *Sejam α e β ordinais. Se existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Vamos fazer por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, então claramente $\beta = \emptyset$. Agora suponha que o resultado vale para todo $\xi < \alpha$. Suponha que exista $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem. Seja $\xi < \alpha$. Note que $f \restriction \xi : \xi \longrightarrow A$ é um isomorfismo de ordem, onde $A \subset \beta$. Note que A é um segmento inicial de β e, portanto, $A = \gamma$ para algum $\gamma \in \beta$. Pela hipótese de indução, temos que $\xi = \gamma$. Ou seja, temos que $\alpha \subset \beta$. Trabalhando com a inversa, obtemos que $\beta \subset \alpha$. □

Teorema 2.1.16. *Seja X um conjunto bem ordenado. Então existe um, e apenas um, ordinal α tal que existe $f : X \longrightarrow \alpha$ isomorfismo de ordem.*

Demonstração. A unicidade segue do resultado anterior. Para a existência, basta definir f recursivamente como $f(x) = \min\{\beta : \forall y < x \ f(y) < \beta\}$. □

Ordinais compactos

Fixado um ordinal α, há uma topologia bastante natural sobre ele, a topologia da ordem:

Definição 2.1.17. Dado um ordinal α, chamamos de **topologia da ordem** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $]\xi, \eta[$ e $[0, \xi[$ para todo $\xi, \eta \in \alpha$.

Os intervalos de ordinais são definidos de forma análoga aos intervalos de reais.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos um ordinal como um espaço topológico, estaremos adotando a topologia da ordem.

Proposição 2.1.18. *Seja α um ordinal. Se $A \subset \alpha$ é* **limitado**, *isto é, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \leq \beta$ para todo $a \in A$, admite supremo. Lembrando, o* **supremo** *é o menor dos majorantes de um conjunto.*

Demonstração. Como A é limitado, ele possui pelo menos um majorante. Logo, o conjunto dos majorantes de A admite mínimo. □

O seguinte resultado usaremos implicitamente diversas vezes ao longo do texto:

Proposição 2.1.19. *Seja α ordinal limite. Se $\beta \in \alpha$, então $\beta + 1 \in \alpha$.*

Demonstração. Temos que $\beta + 1 \subset \alpha$ ou que $\alpha \subset \beta + 1$. Como $\beta + 1 \neq \alpha$ (pois α é não é sucessor), temos que

$$\beta + 1 \in \alpha \text{ ou } \alpha \in \beta + 1$$

Note que, se $\alpha \in \beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, temos, novamente por $\alpha \neq \beta$, que $\alpha \in \beta$ - mas isso contraria o fato que $\beta \in \alpha$. Logo, obtemos o desejado. □

Proposição 2.1.20. *Se α é um ordinal limite diferente de 0, então α não é compacto.*

Demonstração. Basta notar que $\{[0, \beta + 1[: \beta \in \alpha\}$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita. □

Proposição 2.1.21. *Se α é um ordinal sucessor, então α é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Seja β tal que $\alpha = \beta + 1$. Se β for sucessor, terminamos (afinal, α será um compacto adicionado de um ponto). Suponha que β não seja sucessor. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos para α. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $\beta \in C$. Note que existe ξ tal que $]\xi, \beta] \subset C$. E, como β é limite, $\xi + 1 < \beta$. Por hipótese de indução, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $\xi + 1 = [0, \xi] \subset \bigcup \mathcal{C}'$. Note, então, $\mathcal{C}' \cup \{C\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \beta] = \alpha$. □

Alongamentos

Alongamento 2.1.22. Mostre que todo $n \in \omega$ não nulo é um ordinal sucessor. Mostre que ω é um ordinal limite.

Alongamento 2.1.23. Mostre que, para todo α ordinal, temos que $[0, \alpha] = [0, \alpha + 1[$.

Alongamento 2.1.24. Mostre que no Teorema 2.1.16 o isomorfismo também é único.

Alongamento 2.1.25. Considere ω com a seguinte ordem: se $a, b \neq 0$, então $a \preceq b$ se, e somente se, $a \leq b$ ($\leq$ é a ordem usual) e $a \leq 0$ para todo $a \in \omega$.

(a) Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

(b) Mostre que ω com esta ordem é isomorfo a $\omega + 1$.

Exercícios

Exercício 2.1.26. Mostre que, se X é um conjunto, não existe uma função com domínio X e sobrejetora nos ordinais.

Exercício 2.1.27. Mostre que não existe um conjunto ilimitado nos ordinais.

Exercício 2.1.28. Mostre que a coleção dos ordinais sucessores é uma classe própria.

Exercício 2.1.29. Mostre que num ordinal α, os únicos pontos isolados são os sucessores e o 0.

x é dito um **ponto isolado** se $\{x\}$ é aberto.

Exercício 2.1.30. Mostre que todo ordinal é um **espaço de Hausdorff**, isto é, dados dois pontos x, y distintos, existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Exercício 2.1.31. Mostre que se $\alpha = \sup A$, então $\alpha \in \overline{A}$.

Exercício 2.1.32. Sejam X bem ordenado e Y totalmente ordenado. Chamamos de **ordem lexicográfica** a seguinte ordem sobre Y^X: $f < g$ se $f(x) < g(x)$ onde $x = \min\{z \in X : f(z) \neq g(z)\}$. Mostre que isso é de fato uma ordem e mostre também que tal ordem é total. Mostre que se, além disso, Y é bem ordenado, então tal ordem é uma boa ordem.

Exercício 2.1.33. Sejam α e β ordinais. Defina $\alpha + \beta$ como o único ordinal que é isomorfo a $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ com a ordem lexicográfica. Verifique se é verdadeira a afirmação "$\omega + 1 = 1 + \omega$".

Exercício 2.1.34. Dizemos que uma função de ordinais em ordinais é uma **função normal** se $f(\alpha) < f(\beta)$ se $\alpha < \beta$ e $(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$ se α é limite e diferente de $\emptyset$. Seja f uma função normal. Mostre que:

(a) $f(\sup A) = \sup\{f(a) : a \in A\}$ para todo A conjunto de ordinais.

(b) $f(\alpha) \geq \alpha$ para todo α.

(c) dado β ordinal, existe $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

2.2 Medindo a complexidade dos conjuntos

Nesta seção, vamos mostrar uma maneira de medir o quão complicado é montar um determinado conjunto. A intuição é mais ou menos assim: $\emptyset$ é o mais simples, $\{\emptyset\}$ é um pouco mais complicado, enquanto $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ é um pouco mais ainda.

Comecemos com um resultado simples:

Chamamos $tr(X)$ de **fecho transitivo** de X.

Proposição 2.2.1. *Seja X um conjunto qualquer. Então existe um conjunto transitivo $tr(X)$ onde $X \subset tr(X)$ e, dado qualquer conjunto Y transitivo tal que $X \subset Y$, temos que $tr(X) \subset Y$.*

Cuidado aqui, $\bigcup T_n = \{x : \exists y \in T_n \ x \in y\}$.

Demonstração. Defina $T_0 = X$ e $T_{n+1} = \bigcup T_n$ para $n \in \omega$. Defina $tr(X) = \bigcup_{n\in\omega} T_n$. Claramente, $X \subset tr(X)$ e $tr(X)$ é transitivo. Note também que, se $x \in T_n$ para algum $n \in \omega$, $x \in Y$ para qualquer Y transitivo tal que $X \subset Y$. $\square$

Proposição 2.2.2. *Toda classe não vazia de conjuntos admite um elemento $\in$-minimal - isto é, um elemento a tal que não existe um elemento b na classe tal que $b \in a$.*

Demonstração. Lembre que uma classe é a coleção de conjuntos que satisfazem uma determinada fórmula. Assim, seja φ uma fórmula tal que exista X tal que vale $\varphi(X)$. Considere

$$A = \{a \in tr(X) : \varphi(a)\}$$

Note que A é um conjunto pelo axioma da separação. Assim, pelo axioma da fundação, existe $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$. Note que tal a é minimal: se $b \in a$ é tal que vale $\varphi(b)$, teríamos que $b \in A$ e, portanto, $b \in A \cap a$, contrariando a definição de a. $\square$

Esse resultado nos dá que podemos definir algo recursivamente sobre os próprios elementos. Para ficar mais claro, vejamos isso em ação, justamente no exemplo que nos será importante agora:

Definição 2.2.3. Seja X um conjunto. Definimos $rank(\emptyset) = \emptyset$ e denotamos por $rank(X)$= $\sup\{rank(y) + 1 : y \in X\}$.

Note que isso está bem definido. De fato, suponha que não. Considere todos os conjuntos X de forma que não foi possível definir o $rank$. Seja X o $\in$ minimal sem $rank$. Mas note que, então, todo elemento de X tem rank e, portanto, X também tem.

Formalmente, deveríamos trabalhar como na demonstração do teorema de recursão.

Além do $rank$ dar uma medida sobre a complexidade do conjunto, também nos dá uma ideia sobre sobre sua construção. Considere a seguinte construção recursiva:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$

Vamos provar que todo conjunto pertence a algum dos V_α's. Para isso, vamos provar o seguinte resultado:

Lema 2.2.4. *Sejam α, β ordinais. Temos:*

(a) V_α é transitivo.

(b) $V_\alpha \subset V_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

(c) se $X \subset V_\alpha$ e $\alpha < \beta$, então $X \in V_\beta$.

(d) se $X \in V_\alpha$, então $X \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

Demonstração. (a) Por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, é imediato. Se α é limite, o resultado é imediato uma vez que V_α é união de conjuntos transitivos. Finalmente, se $\alpha = \beta+1$, temos que, dado $X \in V_\alpha$, $X \subset V_\beta$. Logo, se $Y \in X$, temos que $Y \in V_\beta$. Mas, como V_β é transitivo, $Y \subset V_\beta$ e, portanto, $Y \in V_{\beta+1}$ como queríamos.

(b) Por indução sobre β. Se $\beta = \gamma+1$. Assim, se $\alpha \leq \gamma$, temos, por hipótese, que $V_\alpha \subset V_\gamma$. Logo, $V_\alpha \in V_{\gamma+1}$. Como $V_{\gamma+1}$ é transitivo, temos o que queríamos. Agora suponha que β é limite. Neste caso, é imediato que $V_\alpha \subset V_\beta$ pela definição de V_β.

(c) Basta notar que $X \in V_{\alpha+1} \subset V_\beta$.

(d) Por indução sobre V_α. Se $\alpha = \beta + 1$, o resultado é imediato ($\xi = \beta$). Se α é limite, então $X \in V_\beta$ para algum $\beta < \alpha$ e portanto o resultado segue por indução e pelo fato que $V_\beta \subset V_\alpha$.

□

Ou seja, todo conjunto é formado apenas por $\emptyset$ e pares de { e }. Se denotarmos $\emptyset$ por {}, então todo conjunto nada mais é que uma coleção de { e }. Parece um pouco triste.

Proposição 2.2.5. *Seja X um conjunto. Então $rank(X) = \alpha$ se, e somente se, $X \subset V_\alpha$ e $X \not\subset V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Suponha o resultado para todo $\xi < \alpha$. Seja X conjunto tal que $rank(X) = \alpha$. Assim, todo $Y \in X$ é tal que $rank(Y) < \alpha$ e, portanto, $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Logo, $Y \in V_\alpha$ pelo lema anterior. Ou seja, $X \subset V_\alpha$. Note também que $X \not\subset V_\xi$ para todo $\xi < \alpha$ por hipótese de indução.

Por outro lado, seja $X \subset V_\alpha \smallsetminus \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$. Dado $Y \in X$, temos, pelo lema anterior, que $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Portanto, $rank(Y) \leq \xi$. Assim, já temos que $rank(X) \leq \alpha$. Por outro lado, dado qualquer $\xi < \alpha$, existe $Y \in X$ tal que $rank(Y) \geq \xi$. Caso contrário, todo $Y \in X$ seria tal que $Y \in V_\xi$ e, portanto, $X \subset V_\xi$, uma contradição. □

Acabando com as escolhas

Esta seção foi bastante baseada no livro [3].

Nesta seção, vamos fechar as implicações para as diversas formulações equivalentes ao princípio da boa ordem e o axioma da escolha.

Proposição 2.2.6. *Se vale o axioma das múltiplas escolhas, vale que todo conjunto ordenado admite um conjunto maximal de elementos dois a dois incomparáveis.*

Demonstração. Seja X um conjunto ordenado. Pelo axioma das múltiplas escolhas, existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subset X$ não vazio, $f(A) \subset A$ é finito e não vazio. Defina $g : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ da seguinte forma, dado $A \subset X$:

$$g(A) = \{a \in f(A) : a \text{ é minimal em } f(A)\}$$

Note que, trivialmente, cada $g(A)$ é um suconjunto finito de A de elementos dois a dois incomparáveis.

Considere a seguinte construção recursiva sobre os ordinais:

- $A_0 = g(X)$
- $A_\alpha = g(\{x \in X : x \text{ é incomparável com cada } b \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\})$.

Note que os elementos de X que pertencem a algum A_α formam um conjunto - vamos chamar tal conjunto de A. Vamos provar que tal A é um subconjunto maximal de elementos incomparáveis. Suponha que $a, b \in A$ sejam comparáveis. Seja α tal que $a \in A_\alpha$ e $b \in A_\beta$. Se $\alpha = \beta$, temos uma contradição pois tanto a como b são minimais em A_α. Sem perda de generalidade, suponha $\alpha < \beta$. Então $b \notin A_\beta$ já que b é comparável com a, contradição.

Basta usar o axioma da separação para tomar o subconjunto de X dos elementos para os quais existe um ordinal etc.

Finalmente, vamos provar que A é maximal. Note que, em algum ordinal α, $A_\alpha = \emptyset$ (caso contrário, teríamos que os ordinais formariam um conjunto). Mas note que isso só é possivel se não "sobraram" elementos que possam estender A. $\square$

O próximo lema é útil na hora de encontrar boas ordens:

Lema 2.2.7. *Seja X um conjunto não vazio. Se existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$ onde $f(V) \in V$ para todo $V \in \wp(X)$ não vazio, então existe uma boa ordem sobre X.*

Uma função assim é chamada de uma **função escolha** para $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$.

Demonstração. Defina a seguinte recursão sobre os ordinais (antes de começar, fixe um $Y \notin X$ qualquer). Tomamos $x_0 = f(X)$ e

$$x_\alpha = \begin{cases} f(X \smallsetminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}) & \text{se } \{x_\beta : \beta < \alpha\} \not\supset X \\ Y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que f precisa valer Y a partir de algum ordinal α, caso contrário teríamos que os ordinais formariam um conjunto pelo axioma da substituição. Note que assim $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ induz uma boa ordem sobre X. $\square$

Em particular, esse lema nos dá o seguinte:

Corolário 2.2.8. *Se vale o axioma da escolha, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja f uma função escolha sobre $\wp(X)$. Pelo lema anterior, temos que existe uma boa ordem sobre X. $\square$

Proposição 2.2.9. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos dois a dois não comparáveis, então todo conjunto totalmente ordenado admite uma boa ordem.*

Demonstração. Seja X totalmente ordenado por $<$. Se mostrarmos que existe uma função escolha para $\wp(X) \smallsetminus \emptyset$, o resultado segue pelo lema anterior. Seja $\mathcal{Y}$ o conjunto de todos os pares da forma (Y, y), onde $y \in Y \subset X$. Defina sobre tal conjunto a ordem

$$(Y_1, y_1) \preceq (Y_2, y_2) \text{ se } Y_1 = Y_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

Seja $A \subset \mathcal{Y}$ maximal tal que seus elementos são dois a dois incomparáveis. Vamos mostrar que A é uma função escolha desejada.

Note que, dado $Y \subset X$ não vazio, existe algum par da forma $(Y, y) \in \mathcal{Y}$ pois, caso contrário, qualquer um desta forma seria incomparável com todos os elementos de A. Mais que isso, como a ordem sobre X é total, existe um único elemento com tal formato. Ou seja, pela segunda parte, temos que A é função e, pela primeira, que o domínio de A é todo $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$. □

Proposição 2.2.10. *Se todo conjunto totalmente ordenado pode ser bem ordenado, então dado um conjunto bem ordenado A, temos que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Identifique o $\wp(A)$ com 2^A (veja o Exercício 1.3.12). Coloque em 2^A a ordem lexicográfica (veja Exercício 2.1.32). Assim, $\wp(A)$ fica totalmente ordenado e, portanto, bem ordenável. □

Dos resultados anteriores, obtemos:

Corolário 2.2.11. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos incomparáveis, vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Note que nossa hipótese implica que todo conjunto totalmente ordenado é bem ordenável (Proposição 2.2.9). Já essa condição implica o que queremos pela Proposição 2.2.10. □

Para fechar todas as equivalências, resta provar o seguinte:

Proposição 2.2.12. *Se vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenado, então vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Primeiramente, note que é suficiente mostrarmos que V_α é bem ordenado para todo α ordinal limite (já que todo X é suconjunto de algum V_α desta forma). Seja α ordinal limite. Se mostrarmos que existe uma família $(W_\beta)_{\beta<\alpha}$ onde cada W_β é uma boa ordem sobre V_β teremos o resultado (é fácil construir uma boa ordem a partir disso). Seja κ o menor ordinal tal que não existe uma função injetora de κ em V_α. Por hipótese, $\wp(\kappa)$ admite uma boa ordem $\leq$. Vamos agora definir cada W_β usando esta boa ordem recursivamente:

Aqui não podemos simplesmente aplicar indução, porque precisamos dizer qual boa ordem pegamos para cada β, caso contrário não temos como garantir a existência da família sem o axioma da escolha.

- $W_0 = \emptyset$
- se β é limite, definimos W_β de maneira padrão usando cada W_ξ com $\xi < \beta$.

- se $\beta = \gamma + 1$, então $V_\beta = \wp(V_\gamma)$. Por hipótese, V_γ é bem ordenado por W_γ e, portanto, tem um isomorfismo de ordem com algum $\xi < \kappa$. Daí usando esse isomorfismo mais a boa ordem $\leq$ de $\wp(\kappa)$, obtemos uma boa ordem sobre V_β.

$\square$

Com a sequência apresentada acima, mais os resultados anteriores, temos a equivalência entre princípio da boa ordem, lema de Zorn, axioma da escolha e todo espaço vetorial tem base (veja a Figura 2.1).

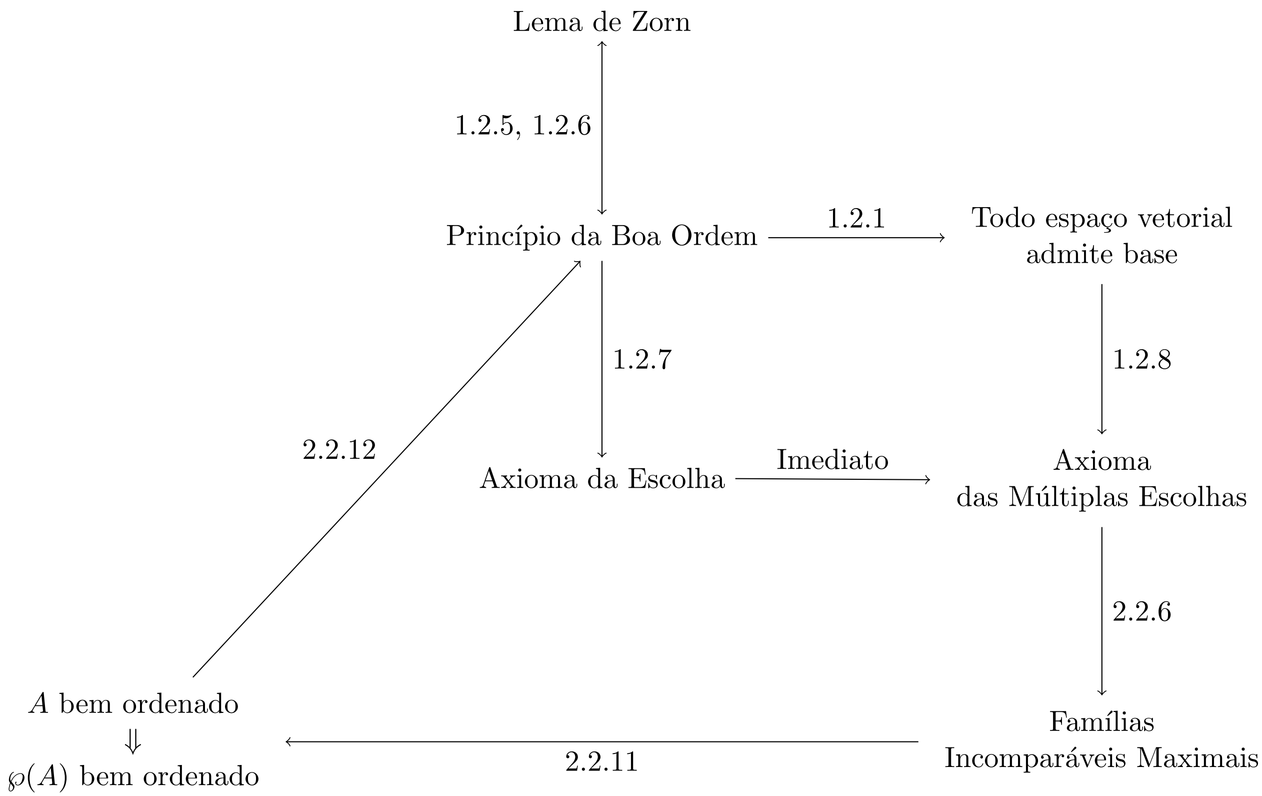

Figura 2.1: Equivalências do axioma da escolha

Alongamentos

Alongamento 2.2.13. Prove a tese da Proposição 2.2.6 supondo que vale o Lema de Zorn.

Exercícios

Exercício 2.2.14. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n\in\omega}$ é $\in$-crescente se $a_n \in a_{n+1}$ para todo $n \in \omega$. Dizemos que a mesma sequência é $\in$-decrescente se $a_{n+1} \in a_n$ para todo $n \in \omega$. Dê um exemplo de um destes tipos de sequências e prove que o outro tipo não existe.

Exercício 2.2.15. Seja α um ordinal. Determine $rank(\alpha)$.

2.3 Cardinais

Do mesmo jeito que ordinais representam todas as boas ordens, cardinais representam todos os tamanhos de conjuntos:

Definição 2.3.1. Seja α um ordinal. Dizemos que α é um **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ tal que $|\alpha| = |\beta|$.

Note que, dado um conjunto X qualquer, ele tem bijeção com algum ordinal, via princípio da boa ordem. Se tomarmos o menor ordinal tal que existe uma bijeção com X, obtemos um cardinal. Além disso, pela definição de cardinais, tal cardinal é único. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.2. Seja X um conjunto. Denotamos por $|X|$ o único cardinal κ tal que existe uma bijeção entre X e κ.

Note que isso estende o uso anterior que fazíamos de $|\cdot|$, afinal, existe uma bijeção entre X e Y se, e somente se, $|X| = |Y|$ como acima.

Note também que, dado um cardinal qualquer, existe um ordinal maior que ele que não tem bijeção com ele (veja o Alongamento 2.3.19). Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.3. Seja κ um cardinal. Denotamos por κ^+ o menor cardinal que é maior que κ.

Não confundir κ^+ com $\kappa + 1$ (soma ordinal).

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.3.4. Denotamos por $\aleph_0 = \omega$. Se $\aleph_\beta$ está definido para todo $\beta < \alpha$ (α um ordinal), denotamos por $\aleph_\alpha = \kappa$ onde κ é o menor cardinal tal que $\aleph_\beta < \kappa$ para todo $\beta < \alpha$.

Desta forma, é fácil ver que $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$. Além disso, muitas vezes usaremos a notação ω_α no lugar de $\aleph_\alpha$ quando quisermos destacar que queremos trabalhar com a ordem de $\aleph_\alpha$.

Dizemos que um conjunto X é **finito** se existe $n \in \aleph_0$ tal que $|X| = n$. Dizemos que X é **infinito** caso contrário.

Uma ordem bacana sobre pares de ordinais

Vejamos agora como definir uma ordem sobre pares de ordinais. Isso vai nos facilitar na hora de calcular o tamanho de produtos. Mas antes, vamos definir uma notação que vai facilitar bastante:

Definição 2.3.5. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Dado $x \in X$, denotamos por $\downarrow x$ o conjunto $\{y \in X : y < x\}$.

Definição 2.3.6. Sejam (α, β) e (γ, δ) pares de ordinais. Vamos denotar por $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ se

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ e $\alpha < \gamma$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$, $\alpha = \gamma$ e $\beta < \delta$.

Ou seja, essa ordem começa assim:

$$(0,0) < (0,1) < (1,1) < (0,2) < (1,2) < (2,2) < \cdots < (0,\omega) < \cdots$$

Formalmente não é uma ordem, uma vez que pares de ordinais não é um conjunto. Mas deve dar para entender.

Não é difícil notar que $\leq$ é uma ordem e que qualquer conjunto não vazio de pares de ordinais admite mínimo com tal ordem (veja o Alongamento 2.3.20). Note também que, para qualquer ordinal α, temos (veja o Alongamento 2.3.21):

$$\alpha \times \alpha = \downarrow (0, \alpha)$$

Considere, para cada α, β ordinais, $o(\alpha, \beta)$ o único ordinal tal que $o(\alpha, \beta)$ é isomorfo a $\downarrow (\alpha, \beta)$.

Lema 2.3.7. *$o(0, \omega) = \omega$.*

Demonstração. Note que $\downarrow (0, \omega) = \omega \times \omega$. Como $\downarrow (0, \omega)$ é infinito, basta mostrarmos que, para cada elemento de $\downarrow (0, \omega)$ só existem finitos elementos menores que ele. De fato, dado $(a, b) \in \omega \times \omega$, temos que $(x, y) \leq (a, b)$ é tal que $x, y \leq \max\{a, b\}$. □

Note que, como $o(0,\alpha) < o(0,\beta)$, se $\alpha < \beta$, temos que $\alpha \leq o(0,\alpha)$ para todo α. Vejamos a outra desigualdade para o caso de cardinais:

Proposição 2.3.8. *Para todo cardinal infinito κ, $o(0,\kappa) = \kappa$. Em particular, existe uma bijeção entre $\kappa \times \kappa$ e κ.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre κ. Note que, para $\kappa = \aleph_0$, já temos o resultado. Suponha então que o resultado é válido para todo $\eta < \kappa$ e vamos mostrar para κ. Suponha que não. Então $\kappa < o(0,\kappa)$. Logo, existe $(\gamma,\delta) < (0,\kappa)$ tal que $\kappa = o(\gamma,\delta)$. Note que, então, $\gamma, \delta < \kappa$. Seja η tal que

$$\gamma, \delta < \eta < \alpha.$$

Note que $(\gamma,\delta) < (0,\eta)$. Assim, $\kappa < o(0,\eta)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} |o(0,\eta)| &= |\eta \times \eta| \\ &= ||\eta| \times |\eta||. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese de indução, $||\eta| \times |\eta|| = o(0,|\eta|) = |\eta|$. Contradição já que $|\eta| < \kappa$. □

Corolário 2.3.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa = |\kappa \times \kappa|$.*

Corolário 2.3.10. *Seja X um conjunto infinito. Então $|X| = |X \times X|$.*

Corolário 2.3.11. *Sejam X, Y conjuntos infinitos. Então $|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.*

Demonstração. Suponha $|X| \leq |Y|$. Então $|X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|$. Como $|Y| \leq |X \times Y|$, temos o resultado. □

Corolário 2.3.12. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$ (κ é infinito) e cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| \leq \kappa$. Então $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demonstração. Note que podemos supor que cada $|F| = \kappa$. Fixe $\{F_\xi : \xi < \kappa\} = \mathcal{F}$ e, para cada $\xi < \kappa$, seja $f_\xi : \kappa \longrightarrow F_\xi$ bijetora. Note que $\varphi : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ dada por

$$\varphi(\alpha,\beta) = f_\alpha(\beta)$$

é sobrejetora. Logo, $\kappa = |\kappa \times \kappa| \leq |\bigcup \mathcal{F}|$. Como a outra desigualdade é imediata, temos o resultado. □

Um conceito que vai ser importante em vários contextos são subconjuntos de algum tamanho fixado:

Definição 2.3.13. Sejam X um conjunto e κ um cardinal. Denotamos por $[X]^\kappa$ o conjunto $\{A \subset X : |A| = \kappa\}$. Também usamos a notação $[X]^{<\kappa}$ para $\{Y \subset X : |X| < \kappa\}$.

Em particular, $[X]^{<\aleph_0}$ são todos os subconjuntos finitos de X:

Proposição 2.3.14. *Se X é infinito, então $|[X]^{<\aleph_0}| = |X|$.*

Demonstração. Note que $|[X]^n| = |X|$ para todo $n \in \aleph_0$, $n \neq 0$. Como $[X]^{<\aleph_0} = \bigcup_{n\in\omega}[X]^n$, temos o resultado. $\square$

Terminamos essa seção com uma simples aplicação:

Teorema 2.3.15. *Seja V um espaço vetorial. Se A e B são bases para V, então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos apenas fazer o caso em que A e B são infinitas. Suponha que não vale o resultado e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $|A| < |B|$. Para cada $a \in A$, existe $B_a \subset B$ finito tal que $a \in [B_a]$. Seja $B' = \bigcup_{a\in A} B_a$. Note que $|B'| \leq |A|$. Por outro lado, note que $B' \subset B$ e $[B'] = V$, já que $[B'] \supset A$, contradição. $\square$

Lembrando, $[X]$ denota o subespaço gerado por X.

Sequências convergem, mas e daí?

Já vimos que ω_1 não é compacto. Mas vamos ver nesta seção que ele tem certas propriedades "parecidas" com compactos:

Lema 2.3.16. *Seja $A \subset \omega_1$ enumerável. Então A é limitado.*

Demonstração. Suponha que não. Então $\omega_1 = \bigcup_{a\in A} \downarrow a$. Mas note que cada $\downarrow a$ é enumerável. Logo, ω_1 é enumerável, contradição. $\square$

Lema 2.3.17. *Toda sequência $(x_n)_{n\in w}$ estritamente crescente de pontos de ω_1 é convergente.*

Demonstração. Como $A = \{x_n : n \in \omega\}$ é enumerável, temos que A admite supremo. Seja $\alpha \in \omega_1$ tal supremo. Note que, dado $]\beta, \alpha]$ aberto contendo α, temos que, existe $x_n > \beta$ (por α ser supremo) e todo x_k com $k > n$ é tal que $x_k \in]\beta, \alpha]$. $\square$

Teorema 2.3.18. *Toda sequência (enumerável) de pontos de ω_1 admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\omega}$ sequência de pontos de ω_1. Note que, pelo Exercício 2.3.25, temos um dos seguintes casos:

- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência constante. Neste caso, o resultado é trivial.
- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente decrescente. Note que esse caso é impossível, uma vez que ω_1 é bem ordenado.
- $(x_n)_{n\in\omega}$ admite subsequência estritamente crescente. Note que neste caso temos o resultado pelo lema anterior.

□

Alongamentos

Alongamento 2.3.19. Seja κ. Mostre que $\kappa < |\wp(\kappa)|$.

Alongamento 2.3.20. Mostre que $\leq$ definida sobre os pares de ordinais é de fato uma ordem e que todo conjunto de pares admite mínimo.

Alongamento 2.3.21. Mostre que, dado um ordinal α, $\downarrow(0, \alpha) = \alpha \times \alpha$.

Alongamento 2.3.22. Mostre que todo cardinal infinito é um ordinal limite.

Exercícios

Exercício 2.3.23. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : \omega \longrightarrow X$ injetora.

Exercício 2.3.24. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora tal que $Y \subsetneq X$.

Exercício 2.3.25. Este é um roteiro para mostrar que toda sequência num conjunto totalmente ordenado admite uma subsequência constante, ou admite uma subsequência estritamente crescente ou admite uma subsequência estritamente decrescente. Assim, seja $(x_n)_{n\in\omega}$ uma sequência num conjunto X totalmente ordenado por $\leq$

(a) Note que podemos supor que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ (se não pudermos, é que já resolvemos).

(b) Dizemos que x_n é um pico se, para todo $k > n$, temos que $x_k < x_n$. Suponha que existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência decrescente infinita.

(c) Suponha que não existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência crescente.

(d) Conclua o resultado.

Exercício 2.3.26. Considere $\omega_1 + 1$ como espaço topológico. Mostre que $\omega_1 \in \overline{\omega_1}$ mas não existe uma sequência em ω_1 convergente para ω_1.

2.4 Mais um pouco sobre ordens

Cofinalidade é uma espécie de "atalho" até o final de um conjunto:

Definição 2.4.1. Seja X ordenado por $\leq$. Dizemos que $A \subset X$ é **cofinal** em X se, para todo $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a$.

Definição 2.4.2. Seja X conjunto ordenado. Denotamos por $cf(X)$ (a **cofinalidade** de X) o menor cardinal κ tal que existe $A \subset X$ tal que A é cofinal em X e $|A| = \kappa$.

Muitas vezes é mais cômodo trabalhar com uma notação de função:

Definição 2.4.3. Seja X conjunto ordenado. Dizemos que $f : \kappa \longrightarrow X$ é uma **função cofinal** se sua imagem é cofinal em X.

É imediato notar o seguinte:

Proposição 2.4.4. *Dado X um conjunto ordenado. Então $cf(X) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ cofinal.*

No caso de ordinais, podemos tomar a f crescente:

Proposição 2.4.5. *Seja α um ordinal. Então $cf(\alpha) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ função crescente e cofinal.*

Demonstração. Suponha $cf(\alpha) = \kappa$. Seja $g : \kappa \longrightarrow \alpha$ cofinal. Defina $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ da seguinte forma, para $\xi \in \kappa$:

$$f(\xi) = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Note que $f(\xi) \in \alpha$ já que $|\xi| < cf(\alpha)$.

Note que f é a função procurada.

A outra implicação é imediata. □

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.4.6.
- Se α é da forma $\beta + 1$, então $cf(\alpha) = 1$.

- Pelos resultados da seção anterior, temos que $cf(\aleph_1) = \aleph_1$.
- $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Para isso, basta notar que $f : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_\omega$ dada por $f(n) = \aleph_n$ é cofinal.

Podemos agora fazer algumas aplicações em aritmética cardinal:

Teorema 2.4.7 (Teorema de König). *Seja κ cardinal e sejam $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(B_\xi)_{\xi<\kappa}$ famílias de conjuntos tais que $|A_\xi| < |B_\xi|$ para todo $\xi < \kappa$. Então $|\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi| < |\prod_{\xi<\kappa} B_\xi|$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe $f : \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ sobrejetora. Para cada $\xi < \kappa$, existe $b_\xi \in B_\xi$ tal que $b_\xi \notin \pi_\xi[f[A_\xi]]$ já que não existe uma função sobrejetora de A_ξ em B_ξ. Note que $(b_\xi)_{\xi<\kappa} \in \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ mas não está na imagem de f. $\square$

π_ξ é a projeção na ξ-ésima coordenada.

Dados η e κ cardinais, denotamos por $\eta^\kappa = |\eta^\kappa|$ (veja o Alongamento 2.4.16 para notar que essa notação é coerente com o caso em ω).

Corolário 2.4.8. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Demonstração. Seja $f : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ cofinal e crescente. Note que, para cada $\xi < cf(\kappa)$, temos que $|\downarrow f(\xi)| < \kappa$ (por κ se cardinal). Note também que $\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \downarrow f(\xi) = \kappa$. Finalmente, $\kappa^{cf(\kappa)} = |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa|$. Logo

$$|\kappa| = |\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} f(\xi)| < |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa| = \kappa^{cf(\kappa)}$$

$\square$

Pré-ordens

Existe uma pré-ordem sobre as funções de ω em ω natural e com bastante aplicações. Começaremos a trabalhar com ela nesta seção.

Definição 2.4.9. Dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem** sobre um conjunto X se, para todo $a, b, c \in X$ temos:

(a) $a \leq a$

(b) se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Ou seja, o que está faltando para virar ordem é $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar $a = b$.

Definição 2.4.10. Denotamos por $\leq^*$ a seguinte pré-ordem sobre ω^ω: dados $f, g \in \omega^\omega$, dizemos que $f \leq^* g$ se

$$\{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ é finito.}$$

Vejamos alguns conceitos sobre famílias de funções de ω^ω:

Definição 2.4.11. Seja $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família ilimitada** se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família dominante** se, para todo $g \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$.

O conceito de ilimitado é meio que o mesmo que para ordens e o conceito de dominante é o de cofinal para ordens.

Note que a própria família $\mathcal{F} = \omega^\omega$ é ilimitada e dominante.

Proposição 2.4.12. *Toda família dominante é ilimitada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Suponha que ela não seja ilimitada. Ou seja, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Defina $h \in \omega^\omega$ como

$$h(n) = g(n) + 1$$

para todo $n \in \omega$. Note que não existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $h \leq^* f$ e, portanto, $\mathcal{F}$ não é dominante. $\square$

Proposição 2.4.13. *Não existe uma família ilimitada enumerável.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\omega}$ família enumerável de funções de ω^ω. Para cada $n \in \omega$, defina

$$g(n) = \max\{f_0(n), ..., f_n(n)\}$$

Note que $f_n \leq^* g$ para todo $n \in \omega$ e, portanto, $(f_n)_{n\in\omega}$ não é ilimitada. $\square$

Note que $\{k \in \omega : f_n(k) > g(k)\} \subset \{0, ..., n-1\}$.

Olhando por cima do muro

Chamamos de $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $|2^\omega|$. Note que $\mathfrak{c} = |\omega^\omega|$. De fato, é imediato notar que $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$. Por outro lado, temos que ω^ω pode ser identificado com $[\omega]^\omega$ (ver Exercício 2.4.23). Assim,

$$|\omega^\omega| = |[\omega]^\omega| \leq |\wp(\omega)| = |2^\omega|$$

Com isso, é fácil ver que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ (ver o Exercício 2.4.24).

Note que $\mathfrak{c}$ é não enumerável. Logo, temos que

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$$

Pelos resultados da seção anterior, como existe pelo menos uma família dominante, podemos definir $\mathfrak{d}$ como a menor cardinalidade possível para uma família dominante e $\mathfrak{b}$ como a menor cardinalidade possível para uma família ilimitada. Como toda família dominante é ilimitada, temos

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

Como a própria família ω^ω é dominante, temos que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Finalmente, como não existe uma família ilimitada enumerável, temos que $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$. Resumindo, temos a seguinte situação:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$$

O curioso é que, com os axiomas que temos até o momento, isso é meio que tudo que podemos dizer sobre as relações entre esses quatro cardinais.

A **hipótese do contínuo** (uma afirmação que é independente dos axiomas de ZFC), afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Note que, supondo essa afirmarção, as desigualdades acima viram todas igualdades.

Por outro lado, meio que qualquer outra combinação que quisermos é possível também. Veremos um pouco mais disso adiante.

Uma **afirmação independente** de uma lista de axiomas nada mais é que uma afirmação que nem ela, nem sua negação, podem ser provadas a partir da lista de axiomas. É a mesma situação que ocorre, por exemplo, em teoria dos corpos. A partir dos axiomas de corpo não é possível provar que existe um elemento x tal que $x^2 = 2$. Mas também não é possível provar que não existe tal elemento.

Alongamentos

Alongamento 2.4.14. Seja α um ordinal. Mostre que:

(a) $cf(\alpha) \leq \alpha$

(b) se $cf(\alpha)$ é finito, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Alongamento 2.4.15. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Alongamento 2.4.16. Considere $a, b \in \omega$. Mostre que $a^b = |\wp(a^b)|$ (onde o primeiro a^b é a exponenciação usual nos naturais e o segundo é o conjunto das funções de $\{0, ..., b-1\}$ em $\{0, ..., a-1\}$).

Exercícios

Exercício 2.4.17. Sejam X, A, B conjuntos. Mostre que $|(X^A)^B| = |X^{A \times B}|$. Mostre que, em particular, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.4.18. Seja α ordinal limite. Mostre que $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Exercício 2.4.19. Mostre que existem um cardinal κ e uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tais que $|\mathcal{F}| < \kappa$, cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| < \kappa$ e ainda assim $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$.

Exercício 2.4.20. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $g_f \in \omega^\omega$ por

$$g_f(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$. Mostre que $\mathcal{G} = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ é ilimitada mas não é dominante.

Exercício 2.4.21. Mostre que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.

Exercício 2.4.22. Mostre que existe α tal que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Exercício 2.4.23. Seja κ um cardinal. Seja X um conjunto tal que $\kappa \leq |X|$.

(a) Para cada $A \in [X]^\kappa$, fixe $f_A : \kappa \longrightarrow A$ bijetora. Mostre que $\varphi : [X]^\kappa \longrightarrow X^\kappa$ dada por $\varphi(A) = f_A$ é injetora.

(b) Observe que $X^\kappa \subset [\kappa \times X]^\kappa$.

(c) Mostre que $|X^\kappa| = |[X]^\kappa|$.

Exercício 2.4.24. Este é um roteiro para mostrar que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(a) Associe, para cada $x \in \mathbb{R}$, $s_x \in \mathbb{Q}^\omega$ de forma injetora.

(b) Seja $f \in 2^\omega$. Seja $\varphi(f) = \sum_{n \in \omega} f(n) 10^{-n}$. Mostre que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

(c) Conclua que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Dicas de alguns exercícios

1.1.16 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

1.2.14 Considere o conjunto das "funções escolhas parciais".

2.4.21 Corolário do König.

2.4.22 Função normal.

55

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[2] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. 1973.

[4] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.

Notação

Índice Remissivo