Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

11 de agosto de 2016

[1] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversas funções. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma se fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto, trabalharemos mais com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos "normais" no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos "normais". Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N, que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma "definição" intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Vazio $\exists x \, \forall y \, y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$, que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x \, \forall y \, (x = y) \leftrightarrow (\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Par $\forall x\ \forall y\ \exists z\ x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y, existe um conjunto z que os contém como elementos.

Veja o Alongamento 1.1.10.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ, temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U, mas não que só eles. U poderia conter "lixo" - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F}\ \exists U\ \forall x\ \forall y\ (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x, defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como "sucessor de x" - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S\ \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S\ s(x) \in S)$$

Partes $\forall x\ \exists y\ \forall z \subset x\ z \in y$. Isto é, dado um conjunto x, existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.17.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \in x\ \exists z' \in y\ \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D, conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D\ \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset\ \exists y \in x\ x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituido pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construido a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a $\leq$ entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X. A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivessemos trabalhando com a relação $\leq$ nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N}\ a + c = b\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar $\leq$, então isso ficaria meio circular.

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X. Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenas estão em X. Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y, uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.18

Note que, dados x, y, temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Definição 1.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que $\leq$ é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

(a) $x \leq x$;

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução finita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω, temos que $\omega \subset X$. $\square$

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função "sucessor" usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. □

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b. Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

□

Note que $\subset$ é uma ordem sobre ω, já que $\subset$ é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω, podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por $\subset$.*

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. $\square$

Note que, assim, temos que a ordem $\leq$ usual dos naturais se traduz como $\subset$ aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como $\in$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações $\in$ e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando $\in$ e $=$:

(a) $x \subset y$

(b) $x \cap y$

(c) $x = \{a\}$ para algum a.

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y, de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre diretamente que os seguintes conjuntos são transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alongamento 1.1.15. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.16. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.17. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A, existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.18. Escreva a fórmula "x é um par ordenado".

Exercício 1.1.19. Um função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.20. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\leq$ é uma boa ordem;

(ii) não existe $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.21. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

Exercício 1.1.22. Considere X o conjunto $\{0, 1\} \times \omega$ com a seguinte ordem:

$$(a, n) \preceq (b, m)$$

se $a < b$ ou se $a = b$ e $n \leq m$. Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Na verdade, para este texto, a maior importância da demonstração a seguir é que o princípio da boa ordem implica na existência de bases em espaços vetoriais - sem o uso do axioma da escolha.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre V. Defina B da seguinte maneira

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B.

Vamos mostrar que B é uma base para V. Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, ..., b_n \in B$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Seja b_j o máximo de $\{b_1, ..., b_n\}$ (com relação a $\preceq$). Note que $b_j \in [\{b_1, ..., b_n\} \smallsetminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que $\preceq$ é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). □

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

Um jeito de ler essa é hipótese é "se vale para todo mundo antes de x, vale para x".

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ, temos que vale $\varphi(x)$, contradição. □

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n. Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar. Antes de provarmos tal resultado, é bom notar que, ao formarlizarmos o conceito de função em ZFC, tratamos cada função como um conjunto de pares ordenados

- essa formalização tem também a vantagem que podemos trabalhar com funções como se fossem conjuntos, podendo tomar uniões, intersecções etc. Veja o Alongamento 1.2.9 para ver essa formalização. Usaremos este fato implicitamente nesta demonstração e em muitas outras no decorrer deste texto.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(z, y)$ vale para algum z, y, então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.16.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X, isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g. Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em $\mathcal{F}$, elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.10), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X, terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \operatorname{dom}(f)\}$. Note que $f \restriction \{y \in X : y < x\}$ é um elemento de $\mathcal{F}$. Considere

$$g = (f \restriction \{y \in X : y < x\}) \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f. $\square$

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Ordem $\times$ escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se $\mathcal{C}$ é **totalmente ordenado** por $\leq$, isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a \leq b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq a$.

Proposição 1.2.5 (Lema de Zorn). *Seja $\leq$ uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a $\preceq$. Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existe A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a $\preceq$) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a $\preceq$, mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a $\leq$. Vamos fazer isso por indução sobre x. Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.12). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x. Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercicio 1.2.12, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a $\leq$. Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A. Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então $z \notin A$, já que x é o máximo de A. Note também que, pela definição de A_z, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y<z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. $\square$

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Cuidado que na próxima demonstração, trabalharemos com relações como se elas fosse conjuntos - da mesma maneira que fizemos com funções.

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos pares $(A, \leq_A)$ onde $A \subset X$ e $\leq_A$ é uma boa ordem sobre A. Considere a seguinte relação sobre $\mathcal{O}$:

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B, isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \smallsetminus A$, $a \leq_B b$. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{O}$. Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} A$. Que $\leq$ é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a $\leq_A$). Note que, pela maneira como $\preceq$ é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S. Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e, além disso, $(Y, \leq)$ é um majorante para a cadeia $\mathcal{C}$ (exercício). Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe $(B, \leq_B)$ maximal em $\mathcal{O}$. Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \smallsetminus B$, basta estender a ordem $\leq_B$ para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de $\mathcal{O}$ estritamente maior que $(B, \leq_B)$. $\square$

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.13.)

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (Axioma da escolha). *Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe $\leq$ uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. $\square$

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial admite uma base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação "princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base". A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto - primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F. Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.15). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com "variáveis" em X. Isto é, os elementos de $k(X)$ são "frações de polinômios de várias variáveis", mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X.

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F-grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F-homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F-grau n e todos os monômios de p_1 tem F-grau $d + n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K. Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K-espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V. Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.11). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x}\sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. Mais que isso, f é F-homogêneo de grau -1. Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. $\square$

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Sejam X e Y conjuntos. Dizemos que f é uma **função** de X em Y (notação $f : X \to Y$ se $f \subset X \times Y$ tal que:

- Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$;
- Para todo $x \in X$, se $(x, a), (x, b) \in f$, então $a = b$.

Usualmente, em vez de denotarmos $(x, y) \in f$, usamos $f(x) = y$.

(a) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $\mathrm{dom}(f)$ (domínio de f).

(b) Dada $f : X \to Y$, defina o conjunto $Im(f)$ (imagem de f). Cuidado aqui, não queremos o contradomínio de f.

(c) Dados $f : X \to Y$ e $Z \subset X$, determine o conjunto $f \restriction Z$, onde $f \restriction Z$ é a **função restrição** de f a Z.

Alongamento 1.2.10. Mostre que, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.11. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de $\mathcal{F}$ não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G-grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.12. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset C$ (ou seja, $\mathcal{C}$ é uma cadeia com relação a $\subset$). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por $\leq$. Mostre que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por $\leq$.

Informalmente, lemos este exercício como "cadeia de cadeias é cadeia".

Exercício 1.2.13. Escreva a ordem usual de $\mathbb{Z}$ como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.14. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.15. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.16. Seja $\leq$ boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

"($x \in X$ e existe uma função f com domínio $\{y \in X : y \leq x\}$ tal que $f(z) = b$ onde $\varphi(\{z' : z' < z\}, b)$ e $f(x) = a$ onde $\varphi(\{z' : z < x\}, a)$) ou $a = \emptyset$"

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ.

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2 (**de Cantor-Bernstein-Schroeder**). *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Seja $x \in A \cup B$. Defina

- $s_0^x = x$
- $s_{n+1}^x = \begin{cases} f(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in A \\ g(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in B. \end{cases}$

- $s^x_{-(n+1)} = \begin{cases} f^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } B \\ g^{-1}(s^x_{-n}) & \text{se } s^x_{-n} \text{ está definido e pertence a } A \end{cases}$

Note que s^x_z pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s^x_z \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s^x_z \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s^y_z = s^x_k$. Note que, então $s^y_{z+m} = s^x_{k+m}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $S^y = S^x$.

Com isso, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s^x_z está definido para todo z, f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.
- Se $s^x_z \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).
- Se $s^x_z \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

$\square$

Uma aplicação simples do próximo resultado é que sempre podemos aumentar os tamanhos:

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \longrightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \longrightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A, temos que $x \notin f(x) = A$.
- Se $x \notin A$, então, pela definição de A, temos que $x \in f(x) = A$.

$\square$

Uma aplicação com circunferências

Essa aplicação foi tirada de [2].

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que tivermos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem $\leq$ sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem qualquer sobre X. Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X. Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). □

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0. Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1. Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n, contradição. □

A situação muda bem quando passamos para o $\mathbb{R}^3$. Comecemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi$ é um plano tal que $x \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de $\mathcal{C}$ em P (basicamente, porque

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Considere

$$S = \{p \in \pi : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}.$$

Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$. Seja $p \in \pi \setminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p. A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de $\mathbb{R}$. Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. $\square$

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X. Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere $\leq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}^3$ com a propriedade apresentada na Proposição 1.3.4. Seja x o menor ponto de $\mathbb{R}^3$ segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x. Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

(i) se $y < z$, então $y \in C_y$.

(ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

(i) $z \in C_z$.

(ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguimos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.

- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X e seja $f : X \longrightarrow Y$ bijeção. Mostre que $\preceq$ dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y.

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \longrightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.11. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \longrightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Na sequência, vamos apresentar alguns resultados envolvendo reticulados. Entre eles, vamos apresentar um teorema de Tarski ([3]) e, como aplicação de tal teorema, uma nova demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.3.2).

Exercício 1.3.12. Dizemos que uma ordem $(A, \leq)$ é um **reticulado** se, para $a, b \in A$, existe o supremo do conjunto $\{a, b\}$ (normalmente denotado por $a \vee b$) e e também o ínfimo (denotado por $a \wedge b$). Dizemos que $(A, \leq)$ é um **reticulado completo** se, para todo $B \subset A$, existe o supremo e o ínfimo de B (denotados por $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ respectivamente).

(a) Mostre que toda ordem total é um reticulado.

(b) Mostre que $[a, b]$ com a ordem usual de $\mathbb{R}$ é um reticulado completo.

(c) Dados $a, b \in A$, denotamos por $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ e } x \leq b\}$. Mostre que, se $a \leq b$, então $[a, b]$ é um reticulado completo.

Exercício 1.3.13. Seja $(A, \leq)$ um reticulado completo. Seja $f : A \to A$ monótona não decrescente, isto é, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Este é um roteiro para mostrar que o conjunto $F = \{a \in A : f(a) = a\}$ dos pontos fixos de f é um reticulado completo.

(a) Considere $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Note que $B \neq \emptyset$.

(b) Mostre que, para todo $b \in B$, $f(b) \in B$.

(c) Seja $s = \bigvee B$. Mostre que $s \in B$.

(d) Note que s é um ponto fixo.

(e) Note que não existe um ponto fixo maior que s.

(f) Encontre i o menor ponto fixo.

(g) Considere $1 = \bigvee A$. Seja $C \subset F$. Seja $c = \bigvee C$. Note que $f[[c, 1]] \subset [c, 1]$.

(h) Note que, assim, existe um supremo para os pontos fixos de f restrita a $[c, 1]$. Note que tal supremo é o próprio c.

(i) Conclua que F é completa.

Exercício 1.3.14. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetoras.

(a) Note que $(\wp(X), \subset)$ é um reticulado completo.

(b) Mostre que $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ dada por $\varphi(A) = X \smallsetminus (g[Y \smallsetminus f[A]])$ é uma função monótona não decrescente.

(c) Seja $F \subset X$ ponto fixo de φ. Mostre que $i : X \to Y$ dada por

$$i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \smallsetminus F \end{cases}$$

é uma bijeção entre X e Y.

Exercício 1.3.15. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ função monótona não decrescente. Mostre que, além de f ter pontos fixos, o conjunto de tais pontos admite máximo e mínimo.

Note que nem precisamos de f contínua.

Dicas de alguns exercícios

1.1.16 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[2] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.

Notação

Índice Remissivo