

Notas de Aula

Leandro F. Aurichi ¹

9 de agosto de 2016

¹Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

I	ZFC	7
1	Preâmbulos	9
1.1	Alguns axiomas	9
	Um processo lento e doloroso	11
	Boa ordem	12
	Alongamentos	14
	Exercícios	15
1.2	Boa ordem é boa mesmo	15
	Ordem \times escolha	17
	Alongamentos	21
	Exercícios	21
1.3	Tamanhos, muitos tamanhos	22
	Uma aplicação com circunferências	24
	Alongamentos	26
	Exercícios	26
	Índices	34
	Notação	34
	Índice Remissivo	35

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversas funções. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma se fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto, trabalharemos mais com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos “normais” no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos “normais”. Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N ? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N , que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma “definição” intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

Vazio $\exists x \forall y y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por \emptyset , que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x \forall y (x = y) \leftrightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Veja o Alongamento
1.1.10.

Par $\forall x \forall y \exists z x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y , existe um conjunto z que os contém como elementos.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ , temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U , mas não que só eles. U poderia conter “lixo” - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F} \exists U \forall x \forall y (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x , defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como “sucessor de x ” - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o \emptyset como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S s(x) \in S)$$

Partes $\forall x \exists y \forall z \subset x z \in y$. Isto é, dado um conjunto x , existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.17.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x \exists y \forall z \in x \exists z' \in y \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D , conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset \exists y \in x x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituído pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construído a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a \leq entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X . A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivéssemos trabalhando com a relação \leq nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N} \ a + c = b\}$$

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X . Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenadas estão em X . Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y , uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar \leq , então isso ficaria meio circular.

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.18. Note que, dados x, y , temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Definição 1.1.1. Dizemos que \leq é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que \leq é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

- (a) $x \leq x$;
- (b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;
- (c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem \leq sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução finita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω , temos que $\omega \subset X$. □

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função “sucessor” usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que \emptyset é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. \square

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b . Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

\square

Note que \subset é uma ordem sobre ω , já que \subset é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω , podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por \subset .*

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo.

Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. \square

Note que, assim, temos que a ordem \leq usual dos naturais se traduz como \subset aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como \in .

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações \in e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando \in e $=$:

- (a) $x \subset y$
- (b) $x \cap y$
- (c) $x = \{a\}$ para algum a .

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y , de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre diretamente que os seguintes conjuntos são transitivos: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alongamento 1.1.15. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.16. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.17. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A , existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.18. Escreva a fórmula “ x é um par ordenado”.

Exercício 1.1.19. Um função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.20. Seja \leq uma ordem sobre X . Mostre que são equivalentes:

- (i) \leq é uma boa ordem;
- (ii) não existe $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.21. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

Exercício 1.1.22. Considere X o conjunto $\{0, 1\} \times \omega$ com a seguinte ordem:

$$(a, n) \preceq (b, m)$$

se $a < b$ ou se $a = b$ e $n \leq m$. Mostre que \preceq é uma boa ordem.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Na verdade, para este texto, a maior importância da demonstração a seguir é que o princípio da boa ordem implica na existência de bases em espaços vetoriais - sem o uso do axioma da escolha.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja \preceq uma boa ordem sobre V . Defina B da seguinte maneira

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B .

Vamos mostrar que B é uma base para V . Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, \dots, b_n \in B$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i . Seja b_j o máximo de $\{b_1, \dots, b_n\}$ (com relação a \preceq). Note que $b_j \in [\{b_1, \dots, b_n\} \setminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que \preceq é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). \square

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja \leq uma boa ordem sobre X . Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

Um jeito de ler essa é hipótese é “se vale para todo mundo antes de x , vale para x ”.

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ , temos que vale $\varphi(x)$, contradição. \square

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n . Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar. Antes de provarmos tal resultado, é bom notar que, ao formarlizarmos o conceito de função em ZFC, tratamos cada função como um conjunto de pares ordenados

- essa formalização tem também a vantagem que podemos trabalhar com funções como se fossem conjuntos, podendo tomar uniões, intersecções etc. Veja o Alongamento 1.2.9 para ver essa formalização. Usaremos este fato implicitamente nesta demonstração e em muitas outras no decorrer deste texto.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja \leq uma boa ordem sobre X . Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(z, y)$ vale para algum z, y , então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.16.

Demonstração. Considere \mathcal{F} o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X , isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g . Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em \mathcal{F} , elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.10), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X , terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \text{dom}(f)\}$. Note que $f \upharpoonright \{y \in X : y < x\}$ é um elemento de \mathcal{F} . Considere

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

$$g = (f \upharpoonright \{y \in X : y < x\}) \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f . \square

Ordem \times escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja \leq uma ordem sobre X . Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se \mathcal{C} é **totalmente ordenado** por \leq , isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a \leq b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$, temos que $y \leq a$.

Proposição 1.2.5 (Lema de Zorn). *Seja \leq uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Demonstração. Seja \preceq uma boa ordem sobre X . Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a \preceq . Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existe A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a \preceq) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a \preceq , mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a \leq . Vamos fazer isso por indução sobre x . Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.12). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x . Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercício 1.2.12, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a \leq . Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A . Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não

seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então $z \notin A$, já que x é o máximo de A . Note também que, pela definição de A_z , temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y < z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. \square

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja \mathcal{O} o conjunto dos pares (A, \leq_A) onde $A \subset X$ e \leq_A é uma boa ordem sobre A . Considere a seguinte relação sobre \mathcal{O} :

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B , isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \setminus A$, $a \leq_B b$. Seja \mathcal{C} uma cadeia de elementos de \mathcal{O} . Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} A$. Que \leq é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a \leq_A). Note que, pela maneira como \preceq é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S . Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e é um majorante para a cadeia \mathcal{C} . Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe (B, \leq_B) maximal em \mathcal{O} . Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \setminus B$, basta estender a ordem \leq_B para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de \mathcal{O} estritamente maior que (B, \leq_B) . \square

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (Axioma da escolha). *Dada uma família \mathcal{F} de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe \leq uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. \square

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial admite uma base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação “princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base”. A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto - primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Cuidado que na próxima demonstração, trabalharemos com relações como se elas fosse conjuntos - da mesma maneira que fizemos com funções.

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.13.)

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F . Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de \mathcal{F} são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.15). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com “variáveis” em X . Isto é, os elementos de $k(X)$ são “frações de polinômios de várias variáveis”, mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X .

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F -grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F -homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F -grau n e todos os monômios de p_1 tem F -grau $d + n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K . Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K -espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V . Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de \mathcal{F} são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.11). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que

cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x} \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. Mais que isso, f é F -homogêneo de grau -1 . Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. \square

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Sejam X e Y conjuntos. Dizemos que f é uma **função** de X em Y (notação $f : X \rightarrow Y$ se $f \subset X \times Y$ tal que:

- Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$;
- Para todo $x \in X$, se $(x, a), (x, b) \in f$, então $a = b$.

Usualmente, em vez de denotarmos $(x, y) \in f$, usamos $f(x) = y$.

- (a) Dada $f : X \rightarrow Y$, defina o conjunto $\text{dom}(f)$ (domínio de f).
- (b) Dada $f : X \rightarrow Y$, defina o conjunto $\text{Im}(f)$ (imagem de f). Cuidado aqui, não queremos o contradomínio de f .
- (c) Dados $f : X \rightarrow Y$ e $Z \subset X$, determine o conjunto $f \upharpoonright Z$, onde $f \upharpoonright Z$ é a **função restrição** de f a Z .

Alongamento 1.2.10. Mostre que, se \mathcal{F} é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.11. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de \mathcal{F} não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G -grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.12. Seja X um conjunto ordenado por \leq . Seja \mathcal{C} uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou seja, \mathcal{C} é uma cadeia com relação a \subset). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por \leq . Mostre que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por \leq . Informalmente, lemos este exercício como “cadeia de cadeias é cadeia”.

Exercício 1.2.13. Escreva a ordem usual de \mathbb{Z} como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.14. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.15. Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.16. Seja \leq boa ordem sobre X . Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

$$\begin{aligned} & \text{“}(x \in X \text{ e existe uma função } f \text{ com domínio } \{y \in X : y \leq x\} \text{ tal que} \\ & f(z) = b \text{ onde } \varphi(\{z' : z' < z\}, b) \text{ e } f(x) = a \text{ onde } \varphi(\{z' : z' < x\}, a) \\ & \text{ou } a = \emptyset\text{”} \end{aligned}$$

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ .

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \rightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2 (de Cantor-Bernstein-Schroeder). *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Seja $x \in A \cup B$. Defina

- $s_0^x = x$
- $s_{n+1}^x = \begin{cases} f(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in A \\ g(s_n^x) & \text{se } s_n^x \in B. \end{cases}$

$$\bullet s_{-(n+1)}^x = \begin{cases} f^{-1}(s_{-n}^x) & \text{se } s_{-n}^x \text{ está definido e pertence a } B \\ g^{-1}(s_{-n}^x) & \text{se } s_{-n}^x \text{ está definido e pertence a } A \end{cases}$$

Note que s_z^x pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s_z^x \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s_z^x \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s_z^y = s_k^x$. Note que, então $s_{z+m}^y = s_{k+m}^x$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Logo, $S^y = S^x$.

Com isso, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s_z^x está definido para todo z , f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.
- Se $s_z^x \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).
- Se $s_z^x \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

□

Uma aplicação simples do próximo resultado é que sempre podemos aumentar os tamanhos:

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \rightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \rightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A , temos que $x \notin f(x) = A$.
- Se $x \notin A$, então, pela definição de A , temos que $x \in f(x) = A$.

□

Essa aplicação foi tirada de [2].

Uma aplicação com circunferências

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que tivermos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem \leq sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X .*

Demonstração. Seja \preceq uma boa ordem qualquer sobre X . Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X . Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). \square

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família \mathcal{C} de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0 . Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1 . Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n \in \omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n \in \omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n , contradição. \square

A situação muda bem quando passamos para o \mathbb{R}^3 . Começemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja \mathcal{C} uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi \text{ é um plano tal que } p \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de \mathcal{C} em P (basicamente, porque

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Seja $S = \{p \in \pi : \text{existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}$. Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$. Seja $p \in \pi \setminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p . A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de \mathbb{R} . Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. \square

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde \mathcal{F} é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X . Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família \mathcal{C} de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere \leq uma boa ordem sobre \mathbb{R}^3 com a propriedade apresentada em 1.3.4. Seja x o menor ponto de \mathbb{R}^3 segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x . Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

- (i) se $y < z$, então $y \in C_y$.
- (ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

- (i) $z \in C_z$.
- (ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguirmos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.
- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. \square

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja \leq uma boa ordem sobre X e seja $f : X \rightarrow Y$ bijeção. Mostre que \preceq dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y .

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \rightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \rightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.11. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \rightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Na sequência, vamos apresentar alguns resultados envolvendo reticulados. Entre eles, vamos apresentar um teorema de Tarski ([3]) e, como aplicação de tal teorema, uma nova demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder (Teorema 1.3.2).

Exercício 1.3.12. Dizemos que uma ordem (A, \leq) é um **reticulado** se, para $a, b \in A$, existe o supremo do conjunto $\{a, b\}$ (normalmente denotado por $a \vee b$) e também o ínfimo (denotado por $a \wedge b$). Dizemos que (A, \leq) é um **reticulado completo** se, para todo $B \subset A$, existe o supremo e o ínfimo de B (denotados por $\bigvee B$ e $\bigwedge B$ respectivamente).

- (a) Mostre que toda ordem total é um reticulado.
- (b) Mostre que $[a, b]$ com a ordem usual de \mathbb{R} é um reticulado completo.
- (c) Dados $a, b \in A$, denotamos por $[a, b] = \{x \in A : a \leq x \text{ e } x \leq b\}$. Mostre que, se $a \leq b$, então $[a, b]$ é um reticulado completo.

Exercício 1.3.13. Seja (A, \leq) um reticulado completo. Seja $f : A \rightarrow A$ monótona não decrescente, isto é, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Este é um roteiro para mostrar que o conjunto $F = \{a \in A : f(a) = a\}$ dos pontos fixos de f é um reticulado completo.

- (a) Considere $B = \{a \in A : a \leq f(a)\}$. Note que $B \neq \emptyset$.
- (b) Mostre que, para todo $b \in B$, $f(b) \in B$.

- (c) Seja $s = \bigvee B$. Mostre que $s \in B$.
- (d) Note que s é um ponto fixo.
- (e) Note que não existe um ponto fixo maior que s .
- (f) Encontre i o menor ponto fixo.
- (g) Considere $1 = \bigvee A$. Seja $C \subset F$. Seja $c = \bigvee C$. Note que $f[[c, 1]] \subset [c, 1]$.
- (h) Note que, assim, existe um supremo para os pontos fixos de f restrita a $[c, 1]$. Note que tal supremo é o próprio c .
- (i) Conclua que F é completa.

Exercício 1.3.14. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ injetoras.

- (a) Note que $(\wp(X), \subset)$ é um reticulado completo.
- (b) Mostre que $\varphi : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ dada por $\varphi(A) = X \setminus (g[Y \setminus f[A]])$ é uma função monótona não decrescente.
- (c) Seja $F \subset X$ ponto fixo de φ . Mostre que $i : X \rightarrow Y$ dada por

$$i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus F \end{cases}$$

é uma bijeção entre X e Y .

Exercício 1.3.15. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ função monótona não decrescente. Note que nem precisamos. Mostre que, além de f ter pontos fixos, o conjunto de tais pontos admite de f contínua. máximo e mínimo.

Dicas de alguns exercícios

1.1.16 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

- [1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.
- [2] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–309, 1955.

Notação

Índice Remissivo